ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

IV

В.Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ
Е.М. ЛИФШИЦ
Л.П. ПИТАЕВСКИЙ

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

IV

В.Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ
Е.М. ЛИФШИЦ
Л.П. ПИТАЕВСКИЙ

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Л.Д. ЛАНДАУ и Е.М. ЛИФШИЦ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В десяти томах

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ

В.Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ, Е.М. ЛИФШИЦ, Л.П. ПИТАЕВСКИЙ

Том IV

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Издание четвертое, исправленное
Под редакцией Л.П. Питаевского

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов физических специальностей университетов

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ

УДК 530.1(075.8)
Л22
ББК 22.31

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. **Теоретическая физика**: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. IV/В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. **Квантовая электродинамика**. — 4-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 720 с. — ISBN 5-9221-0058-0 (Т. IV).

Четвертое издание четвертого тома курса «Теоретическая физика», заслужившего широкую известность в нашей стране и за рубежом. Том включает в себя релятивистскую теорию свободных частиц во внешнем поле, теорию испускания и рассеяния света, релятивистскую теорию возмущений и ее применение к электродинамическим процессам, теорию радиационных поправок, асимптотическую теорию процессов при высоких энергиях.

3-е изд. — 1989 г.

Для студентов старших курсов физических специальностей вузов, а также аспирантов и научных работников соответствующих специальностей.

Ил. 27.

Ответственный редактор курса «Теоретическая физика» академик РАН, доктор физико-математических наук *Л. П. Питаевский*

ISBN 5-9221-0058-0 (Т. IV)
ISBN 5-9221-0053-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании «Квантовой электродинамики» исправлены ошибки и неточности, обнаруженные после выхода второго издания, и внесено несколько уточняющих текст добавлений.

Я признателен читателям книги, сообщившим мне свои замечания. В особенности я благодарен В. И. Когану, А. И. Никишову и В. И. Ритусу.

Сентябрь 1988 г. *Л. П. Питаевский*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание предлагаемого тома Курса теоретической физики было опубликовано в двух частях в 1968 и 1971 гг. под названием «Релятивистская квантовая теория». Кроме основного — квантовоэлектродинамического — материала это издание содержало также главы, посвященные слабым взаимодействиям и некоторым вопросам теории сильных взаимодействий. Сейчас включение этих глав представляется нам несвоевременным. Теория сильных и слабых взаимодействий бурно развивается на основе новых физических идей, и ситуация в этой области меняется очень быстро, так что момент для последовательного изложения теории заведомо еще не наступил. Ввиду этого в настоящем издании мы ограничились квантовой электродинамикой, что отражено в изменении заглавия книги.

Наряду со значительным числом исправлений и мелких изменений, в настоящем издании сделан также и ряд более крупных добавлений. Из них отметим операторный метод вычисления сечения тормозного излучения, вычисление вероятности рождения пар фотоном и вероятности распада фотона в магнитном поле, исследование асимптотического поведения амплитуд рассеяния при высоких энергиях, обсуждение процессов неупругого рассеяния электронов адронами и превращения электрон-позитронных пар в адроны.

Несколько слов об обозначениях. Мы вернулись в этой книге к обозначению операторов буквами со «шляпкой» — единообразно с остальными томами этого курса. Для произведения же 4-вектора с матричным вектором γ^μ (которое обозначалось буквой со шляпкой в первом издании книги) специальных обозначений не вводится. Такие произведения выписываются явно.

К сожалению, нам пришлось готовить это издание без участия Владимира Борисовича Берестецкого, скончавшегося в 1977 г. Но часть из указанных выше добавлений была составлена ранее всеми тремя авторами совместно.

Мы искренне благодарны всем нашим читателям, сообщившим нам свои замечания по первому изданию книги. В особенности мы благодарим В. П. Крайнова, Л. Б. Окуня, В. И. Ритуса, М. И. Рязанова и И. С. Шапиро.

Июль 1979 г. *Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В соответствии с общим планом этого курса настоящий том посвящен релятивистской квантовой теорий в широком смысле этого слова: теории всех явлений, связанных с конечностью скорости света, в том числе всей теории излучения.

Как известно, эта часть теоретической физики в настоящее время еще далека от своего завершения даже в отношении лежащих в ее основе физических принципов. Это относится в особенности к теории сильных и слабых взаимодействий. Но даже квантовая электродинамика, несмотря на достигнутые в ней за последние 20 лет блестящие успехи, все еще не удовлетворительна по своей логической структуре.

При отборе материала для этой книги мы ограничивались теми результатами, которые представляются, с разумной степенью уверенности, достаточно надежно установленными. Естественно, что при таком подходе большую часть книги занимает квантовая электродинамика. Мы стремились вести изложение с реалистической точки зрения, подчеркивая делаемые в теории физические предположения, но не вдаваясь в обоснования, которые при современном состоянии теории все равно имеют чисто формальный характер.

При рассмотрении конкретных применений теории мы не ставили своей целью охватить все огромное число относящихся сюда эффектов и ограничивались лишь основными из них, дав дополнительно некоторые ссылки на оригинальные работы, содержащие более детальные исследования. При проведении вычислений, отличающихся здесь обычно значительной громоздкостью, мы часто опускали некоторые промежуточные формулы, но всегда

старались указать все используемые нетривиальные методические моменты.

По сравнению с другими томами этого курса изложение в этой книге предполагает более высокий уровень подготовки читателя. Мы исходили из того, что читатель, который в процессе изучения теоретической физики достиг квантовой теории поля, уже не нуждается в излишнем «разжевывании» материала.

Эта книга написана без непосредственного участия нашего учителя Л. Д. Ландау. Но мы стремились руководствоваться тем духом и отношением к теоретической физике, которому он всегда учил нас и которое он проводил в других томах этого курса. Мы часто спрашивали себя, как бы отнесся Дау к тому или иному вопросу, и старались ответить так, как подсказывало нам многолетнее общение с ним.

Мы благодарны В. Н. Байеру, оказавшему нам большую помощь в составлении § 90 и 97, В. И. Ритусу за большую помощь в написании § 101, Б. Э. Мейеровичу за помощь в некоторых вычислениях. Мы благодарны также А. С. Компанейцу, предоставившему нам свои записи лекций по квантовой электродинамике, прочитанных Л. Д. Ландау в МГУ в 1959/60 учебном году.

Июнь 1967 г.

В. Б. Берестецкий,
Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Четырехмерные обозначения

Четырехмерные тензорные индексы обозначаются греческими буквами λ, μ, ν, ... , пробегающими значения 0, 1, 2, 3.

Принята 4-метрика с сигнатурой $(+---)$. Метрический тензор $g_{\mu\nu}(g_{00} = 1,\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1)$.

Перечисление компонент 4-вектора дается в виде $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$.

Для упрощения записи формул индекс компонент 4-векторов часто опускается [1]. При этом скалярные произведения 4-векторов записываются просто как (ab) или ab: $ab \equiv a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - \mathbf{ab}$.

4-радиус-вектор $x^\mu = (t, \mathbf{r})$. Элемент 4-объема d^4x.

Оператор дифференцирования по 4-координатам: $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$.

Антисимметричный единичный 4-тензор $e^{\lambda\mu\nu\rho}$, причем $e^{0123} = -e_{0123} = +1$.

Четырехмерная δ-функция: $\delta^{(4)}(a) = \delta(a_0)\delta(\mathbf{a})$.

Трехмерные обозначения

Трехмерные тензорные индексы обозначаются латинскими буквами i, k, l, ... , пробегающими значения x, y, z.

Трехмерные векторы обозначаются буквами жирного прямого шрифта.

Трехмерный элемент объема d^3x.

Операторы

Операторы обозначаются буквами со шляпкой $\widehat{\ }$ [2].

Коммутаторы или антикоммутаторы двух операторов:

$$\left\{\widehat{f}, \widehat{g}\right\}_\pm = \widehat{f}\,\widehat{g} \pm \widehat{g}\,\widehat{f}.$$

Транспонированный оператор $\tilde{\widehat{f}}$.

Эрмитово-сопряженный оператор $\widehat{f}^{+}$.

Матричные элементы

Матричный элемент оператора $\widehat{F}$ для перехода из начального состояния i в конечное f: F_{fi} или $\langle f|F|i\rangle$.

---

[1] Такой способ записи широко используется в современной литературе. Это требует, конечно, от читателя особого внимания.

[2] Для упрощения записи формул шляпка опускается над спиновыми матрицами. Шляпка не пишется также над обозначениями операторов в матричных элементах.

Обозначение $|i\rangle$ используется как абстрактный символ состояния независимо от конкретного представления, в котором может быть выражена его волновая функция. Обозначение $\langle f|$ — символ конечного («комплексно-сопряженного») состояния [1]).

Соответственно через $\langle s\,|\,r\rangle$ обозначаются коэффициенты разложения системы состояний с квантовыми числами r в суперпозицию состояний с квантовыми числами s: $|r\rangle = \sum_s |s\rangle\langle s\,|\,r\rangle$.

Приведенные матричные элементы сферических тензоров: $\langle f\|F\|i\rangle$.

Уравнение Дирака

Матрицы Дирака: γ^μ, причем $(\gamma^0)^2 = 1$, $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$. Матрицы $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\beta = \gamma^0$. Выражения в спинорном и стандартном представлениях: (21.3), (21.16), (21.20).

$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\quad (\gamma^5)^2 = 1 \quad$ (см. (22.18)).

$\sigma^{\mu\nu} = {}^1\!/\!_2\,(\gamma^\mu\gamma^{nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu) \quad$ (см. (28.2)).

Дираковское сопряжение: $\overline{\psi} = \psi^*\gamma^0$.

Матрицы Паули; $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$; определение на с. 97.

4-спинорные индексы: α, β, … и $\dot\alpha$, $\dot\beta$, … , пробегающие значения 1, 2 и $\dot 1$, $\dot 2$.

Биспинорные индексы: i, k, l, … , пробегающие значения 1, 2, 3, 4.

Разложение Фурье

Трехмерное разложение:

$$f(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad f(\mathbf{k}) = \int f(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}}d^3x,$$

и аналогично для четырехмерного случая.

Единицы

Везде, где не оговорено особо, используются релятивистские единицы, в которых $\hbar = 1$, $c = 1$. В этих единицах квадрат элементарного заряда $e^2 = 1/137$.

Атомные единицы: $e = 1$, $\hbar = 1$, $m = 1$. В этих единицах $c = 137$. Атомные единицы длины, времени и энергии: $\hbar^2/me^2$, $\hbar^3/me^4$ и $me^4/\hbar^2$ (величину $\mathrm{Ry} = me^4/2\hbar^2$ называют ридбергом).

Обычные единицы — абсолютная (гауссова) система единиц.

[1]) Обозначения Дирака

Постоянные

Скорость света $c = 2{,}998 \cdot 10^{10}$ см/с.
Элементарный заряд [1] $|e| = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ.
Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ г.
Постоянная Планка $\hbar = 1{,}055 \cdot 10^{-27}$ эрг · с.
Постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$; $1/\alpha = 137{,}04$.
Боровский радиус $\hbar^2/me^2 = 5{,}292 \cdot 10^{-9}$ см.
Классический радиус электрона $r_e = e^2/mc^2 = 2{,}818 \cdot 10^{-13}$ см.
Комптоновская длина волны электрона $\hbar/mc = 3{,}862 \cdot 10^{-11}$ см.
Энергия покоя электрона $mc^2 = 0{,}511 \cdot 10^6$ эВ.
Атомная единица энергии $me^4/\hbar^2 = 4{,}360 \cdot 10^{-11}$ эрг $= 27{,}21$ эВ.
Магнетон Бора $|e|\hbar/2mc = 9{,}274 \cdot 10^{-21}$ эрг · Гс$^{-1}$.
Масса протона $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-24}$ г.
Комптоновская длина волны протона $\hbar/m_p c = 2{,}103 \cdot 10^{-14}$ см.
Ядерный магнетон $|e|\hbar/2m_p c = 5{,}051 \cdot 10^{-24}$ эрг · Гс$^{-1}$.
Отношение масс мюона и электрона $m_\mu/m = 2{,}068 \cdot 10^2$.

Ссылки

Ссылки на другие тома этого курса снабжены римскими цифрами: I — «Механика», 1988; II — «Теория поля», 1988; III — «Квантовая механика», 1989; VIII — «Электродинамика сплошных сред», 1982; X — «Физическая кинетика», 1979.

[1]) В этой книге (везде, кроме гл. XIV) обозначение e для заряда частицы включает в себя его знак, так что для электрона $e = -|e|$.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Соотношения неопределенности в релятивистской области

Изложенная в т. III этого курса квантовая теория имеет существенно нерелятивистский характер и неприменима к явлениям, сопровождающимся движением со скоростями, не малыми по сравнению со скоростью света. На первый взгляд можно было бы ожидать, что переход к релятивистской теории возможен путем более или менее непосредственного обобщения аппарата нерелятивистской квантовой механики. Внимательное рассмотрение, однако, показывает, что построение логически замкнутой релятивистской теории требует привлечения новых физических принципов.

Напомним некоторые физические представления, лежащие в основе нерелятивистской квантовой механики (III, § 1). Мы видели, что фундаментальную роль в ней играет понятие измерения, под которым понимается процесс взаимодействия квантовой системы с «классическим объектом» («прибором»), в результате которого квантовая система приобретает определенные значения тех или иных динамических переменных (координат, скоростей и т. п.). Мы видели также, что квантовая механика сильно ограничивает возможность одновременного существования у электрона [1] различных динамических переменных. Так, неопределенности Δq и Δp, с которыми могут одновременно существовать координата и импульс, связаны соотношением $\Delta q \Delta p \sim \hbar$ [2]; с чем большей точностью измерена одна из этих величин, с тем меньшей точностью может быть одновременно измерена другая.

Существенно, однако, что каждая из динамических переменных электрона в отдельности могла быть измерена со сколь угодно большой точностью, причем в течение сколь угодно короткого промежутка времени. Это обстоятельство играет фундаменталь-

---

[1] Как и в т. III, § 1, мы говорим для краткости об электроне, имея в виду любую квантовую систему.

[2] В этом параграфе пользуемся обычными единицами.

ную роль для всей нерелятивистской квантовой механики. Только благодаря ему можно ввести понятие о волновой функции, основное в аппарате этой теории. Действительно, физический смысл волновой функций $\psi(q)$ заключается в том, что квадрат ее модуля определяет вероятность получения, в результате произведенного в данный момент времени измерения, того или иного значения координаты электрона. Ясно, что необходимой предпосылкой для введения понятия о такой вероятности является принципиальная возможность осуществления сколь угодно точного и быстрого измерения координаты; в противном случае это понятие стало бы беспредметным и потеряло бы свой физический смысл.

Существование предельной скорости (скорости света c) приводит к новым принципиальным ограничениям возможностей измерения различных физических величин (*Л. Д. Ландау*, *R. Peierls*, 1930).

В т. III, § 44 было получено соотношение

$$(v' - v)\Delta p \Delta t \sim \hbar, \tag{1.1}$$

связывающее неопределенность Δp измерения импульса электрона с продолжительностью Δt самого процесса измерения; v и v' — скорости электрона до и после измерения. Из этого соотношения следует, что добиться достаточно точного измерения импульса в течение достаточно короткого времени (т. е. малого Δp при малом Δt) можно лишь ценой достаточно большого изменения скорости в результате самого процесса измерения. В нерелятивистской теории это обстоятельство есть проявление неповторимости измерения импульса через короткие промежутки времени, но ни в коей мере не затрагивает принципиальной возможности сколь угодно точного однократного измерения импульса, поскольку разность $v' - v$ может быть сделана сколь угодно большой.

Наличие же предельной скорости меняет положение вещей коренным образом. Разность $v' - v$, как и самые скорости, не может теперь превышать c (точнее, $2c$). Заменив в (1.1) $v' - v$ на c, мы получим соотношение

$$\Delta p \Delta t \sim \hbar / c, \tag{1.2}$$

определяющее наилучшую принципиально достижимую точность измерения импульса при данной продолжительности измерения Δt. Таким образом, в релятивистской теории оказывается принципиально невозможным сколь угодно точное и быстрое измерение импульса. Точное измерение импульса ($\Delta p \to 0$) возможно лишь в пределе бесконечно большой продолжительности измерения.

Есть основания считать, что претерпевает изменения также и вопрос об измеримости координаты электрона самой по себе. В

математическом формализме теории это проявляется в несовместимости точного измерения координаты с утверждением о положительности энергии свободной частицы. Мы увидим в дальнейшем, что полная система собственных функций релятивистского волнового уравнения свободной частицы включает в себя (наряду с решениями с «правильной» зависимостью от времени) также решения с «отрицательной частотой». Эти функции войдут, в общем случае, и в разложение волнового пакета, отвечающего электрону, локализованному в небольшом участке пространства.

Волновые функции «отрицательной частоты» связаны, как будет показано, с существованием античастиц – позитронов. Появление этих функций в разложении волнового пакета выражает собой неизбежное в общем случае образование электрон-позитронных пар в процессе измерения координат электрона. Неконтролируемое самим процессом возникновение новых частиц лишает смысла измерения координат электрона.

В системе покоя электрона минимальная погрешность измерения его координат

$$\Delta q \sim \hbar/mc. \tag{1.3}$$

Этому значению (единственно допустимому уже из соображений размерности) отвечает неопределенность импульса $\Delta p \sim mc$, которая, в свою очередь, соответствует минимальной пороговой энергии образования пары.

В системе отсчета, в которой электрон движется с энергией ε, вместо (1.3) имеем

$$\Delta q \sim c\hbar/\varepsilon. \tag{1.4}$$

В частности, в предельном ультрарелятивистском случае энергия связана с импульсом соотношением $\varepsilon \approx cp$, и тогда

$$\Delta q \sim \hbar/p, \tag{1.5}$$

т. е. погрешность Δq совпадает с дебройлевской длиной волны частицы [1]).

Для фотонов всегда имеет место ультрарелятивистский случай, так что справедливо выражение (1.5). Это значит, что о координатах фотона имеет смысл говорить только в тех случаях, когда характерные размеры велики по сравнению с длиной волны. Но это есть не что иное, как «классический» предельный случай, соответствующий геометрической оптике, в которой

[1]) Речь идет об измерениях, для которых из любого результата опыта можно сделать заключение о состоянии электрона, т. е. мы отвлекаемся от измерений координат с помощью столкновений, когда за время наблюдения результат осуществляется не с вероятностью 1. Хотя из факта отклонения частицы в таком случае можно сделать заключение о местоположении электрона, из отсутствия отклонения вообще нельзя сделать никаких выводов.

можно говорить о распространении света вдоль определенных траекторий — лучей. В квантовом же случае, когда длина волны не может рассматриваться как малая, понятие координат фотона становится беспредметным. Мы увидим в дальнейшем (см. § 4), что в математическом формализме теории неизмеримость координат фотона проявляется уже в невозможности составить из его волновой функции величину, которая могла бы играть роль плотности вероятности, удовлетворяющей необходимым требованиям релятивистской инвариантности.

На основании всего сказанного естественно думать, что будущая теория вообще откажется от рассмотрения временного хода процессов взаимодействия частиц. Она покажет, что в этих процессах не существует точно определяемых характеристик (даже в пределах обычной квантовомеханической точности), так что описание процесса во времени окажется столь же иллюзорным, какими оказались классические траектории в нерелятивистской квантовой механике. Единственными наблюдаемыми величинами будут являться характеристики (импульсы, поляризации) свободных частиц – начальных частиц, вступающих во взаимодействие, и конечных частиц, возникших в результате процесса (*Л. Д. Ландау, R. Peierls*, 1930).

Характерная постановка вопроса в релятивистской квантовой теории состоит в определении амплитуд вероятности переходов, связывающих заданные начальные и конечные (т. е. при $t \to \mp\infty$) состояния системы частиц. Совокупность амплитуд переходов между всеми возможными состояниями составляет *матрицу рассеяния*, или *S-матрицу*. Эта матрица будет носителем всей информации о процессах взаимодействия частиц, имеющей наблюдаемый физический смысл (*W. Heisenberg*, 1938).

В настоящее время полной, логически замкнутой релятивистской квантовой теории еще нет. Мы увидим, что существующая теория вносит новые физические аспекты в характер описания состояния частиц, приобретающего некоторые черты теории поля (см. § 10). Она строится, однако, в значительной мере по образцу и с помощью понятий обычной квантовой механики. Такое построение теории привело к успеху в области квантовой электродинамики. Отсутствие полной логической замкнутости в этой теории проявляется в существовании расходящихся выражений при прямом применении ее математического аппарата, но для устранения этих расходимостей существуют вполне однозначные способы. Тем не менее эти способы в значительной степени сохраняют характер полуэмпирических рецептов, и наша уверенность в правильности получающихся таким путем результатов основана в конечном счете на их прекрасном согласии с опытом, а не на внутренней согласованности и логической стройности основных принципов теории.

ГЛАВА I

ФОТОН

§ 2. Квантование свободного электромагнитного поля

Поставив своей целью рассмотреть электромагнитное поле как квантовый объект, удобно исходить из такого классического описания поля, в котором оно характеризуется хотя и бесконечным, но дискретным рядом переменных; такое описание позволит непосредственно применить обычный аппарат квантовой механики. Представление же поля с помощью потенциалов, задаваемых в каждой точке пространства, есть по существу описание с помощью непрерывного множества переменных.

Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ — векторный потенциал свободного электромагнитного поля, удовлетворяющий «условию поперечности»

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{2.1}$$

При этом скалярный потенциал $\Phi = 0$, а поля́ $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{2.2}$$

Уравнения Максвелла сводятся к волновому уравнению для $\mathbf{A}$:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{2.3}$$

Как известно (см. II, § 52), в классической электродинамике переход к описанию с помощью дискретного ряда переменных осуществляется путем рассмотрения поля в некотором большом, но конечном объеме пространства V [1]. Напомним, как это делается, опустив детали вычислений.

Поле в конечном объеме может быть разложено на бегущие плоские волны, так что его потенциал изобразится рядом вида

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} + \mathbf{a}^*_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kr}}), \tag{2.4}$$

где коэффициенты $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ зависят от времени по закону

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \sim e^{-i\omega t}, \quad \omega = |\mathbf{k}|. \tag{2.5}$$

В силу условия (2.1) комплексные векторы $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ ортогональны соответствующим волновым векторам: $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}\mathbf{k} = 0$.

[1]) Во избежании загромождения формул лишними множителями будем полагать $V = 1$.

Суммирование в (2.4) производится по бесконечному дискретному набору значений волнового вектора (его трех компонент k_x, k_y, k_z). Переход к интегрированию по непрерывному распределению можно произвести с помощью выражения

$$d^3k/(2\pi)^3$$

для числа возможных значений $\mathbf{k}$, приходящихся на элемент объема $\mathbf{k}$-пространства $d^3k = dk_x dk_y dk_z$.

Заданием векторов $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ полностью определяется поле в данном объеме. Таким образом, эти величины можно рассматривать как дискретный набор классических «переменных поля». Для выяснения способа перехода к квантовой теории, однако, следует произвести еще некоторое преобразование этих переменных, в результате которого уравнения поля приобретают вид, аналогичный каноническим уравнениям (уравнениям Гамильтона) классической механики. Канонические переменные поля определяются посредством

$$\mathbf{Q}_\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(\mathbf{a}_\mathbf{k} + \mathbf{a}_\mathbf{k}^*),$$
$$\mathbf{P}_\mathbf{k} = -\frac{i\omega}{\sqrt{4\pi}}(\mathbf{a}_\mathbf{k} - \mathbf{a}_\mathbf{k}^*) = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k} \tag{2.6}$$

(они, очевидно, вещественны). Векторный потенциал выражается через канонические переменные согласно

$$\mathbf{A} = \sqrt{4\pi}\sum_\mathbf{k}\left(\mathbf{Q}_\mathbf{k}\cos\mathbf{kr} - \frac{1}{\omega}\mathbf{P}_\mathbf{k}\sin\mathbf{kr}\right). \tag{2.7}$$

Для нахождения функции Гамильтона H надо вычислить полную энергию поля

$$\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)d^3x,$$

выразив ее через величины $\mathbf{Q}_\mathbf{k}$, $\mathbf{P}_\mathbf{k}$. Представив $\mathbf{A}$ в виде разложения (2.7), вычислив $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ согласно (2.2) и произведя интегрирование, получим

$$H = \frac{1}{2}\sum_\mathbf{k}\left(\mathbf{P}_\mathbf{k}^2 + \omega^2\mathbf{Q}_\mathbf{k}^2\right).$$

Каждый из векторов $\mathbf{P}_\mathbf{k}$ и $\mathbf{Q}_\mathbf{k}$ перпендикулярен волновому вектору $\mathbf{k}$, т. е. имеет по две независимые компоненты. Направление этих векторов определяет направление поляризации соответствующей волны. Обозначив две компоненты векторов $\mathbf{Q}_\mathbf{k}$, $\mathbf{P}_\mathbf{k}$ (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$) посредством $Q_{\mathbf{k}\alpha}$, $P_{\mathbf{k}\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$), перепишем функцию Гамильтона в виде

$$H = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\frac{1}{2}\left(P_{\mathbf{k}\alpha}^2 + \omega^2 Q_{\mathbf{k}\alpha}^2\right). \tag{2.8}$$

Таким образом, функция Гамильтона распадается на сумму независимых членов, каждый из которых содержит только по одной паре величин $Q_{\mathbf{k}\alpha}$, $P_{\mathbf{k}\alpha}$. Каждый такой член соответствует бегущей волне с определенными волновым вектором и поляризацией, причем имеет вид функции Гамильтона одномерного гармонического осциллятора. Поэтому о полученном разложении говорят как о разложении поля на *осцилляторы*.

Перейдем теперь к квантованию свободного электромагнитного поля. Изложенный способ классического описания поля делает очевидным путь перехода к квантовой теории. Мы должны рассматривать теперь канонические переменные — обобщенные координаты $Q_{\mathbf{k}\alpha}$ и обобщенные импульсы $P_{\mathbf{k}\alpha}$ — как операторы с правилом коммутации

$$\widehat{P}_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} - \widehat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{P}_{\mathbf{k}\alpha} = -i \tag{2.9}$$

(операторы же с разными $\mathbf{k}\alpha$ все коммутативны друг с другом). Вместе с ними становятся операторами (эрмитовыми) также потенциал $\mathbf{A}$ и, согласно (2.2), напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Последовательное определение гамильтониана поля требует вычисления интеграла

$$\widehat{H} = \frac{1}{8\pi}\int (\widehat{\mathbf{E}}^2 + \widehat{\mathbf{H}}^2)d^3x, \tag{2.10}$$

в котором $\widehat{\mathbf{E}}$ и $\widehat{\mathbf{H}}$ выражены через операторы $\widehat{P}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\widehat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}$. Фактически, однако, некоммутативность последних при этом не проявляется, так как произведения $Q_{\mathbf{k}\alpha}P_{\mathbf{k}\alpha}$ входят с множителем $\cos\mathbf{kr}\cdot\sin\mathbf{kr}$, обращающимся в нуль при интегрировании по всему объему. Поэтому в результате для гамильтониана получается выражение

$$H = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\frac{1}{2}\left(\widehat{\mathbf{P}}^2_{\mathbf{k}\alpha} + \omega^2\widehat{\mathbf{Q}}^2_{\mathbf{k}\alpha}\right). \tag{2.11}$$

в точности соответствующее классической функции Гамильтона, что и естественно было ожидать.

Определение собственных значений этого гамильтониана не требует особых вычислений, так как сводится к известной задаче об уровнях энергии линейных осцилляторов (см. III, § 23). Поэтому мы можем сразу написать для уровней энергии поля

$$E = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right)\omega, \tag{2.12}$$

где $N_{\mathbf{k}\alpha}$ — целые числа.

К обсуждению этой формулы мы вернемся в следующем параграфе, а сейчас выпишем матричные элементы величин $Q_{\mathbf{k}\alpha}$,

что можно сделать непосредственно с помощью известных формул для матричных элементов координат осциллятора (см. III, § 23). Отличные от нуля матричные элементы равны

$$\langle N_{\mathbf{k}\alpha}|Q_{\mathbf{k}\alpha}|N_{\mathbf{k}\alpha}-1\rangle = \langle N_{\mathbf{k}\alpha}-1|Q_{\mathbf{k}\alpha}|N_{\mathbf{k}\alpha}\rangle = \sqrt{\frac{N_{\mathbf{k}\alpha}}{2\omega}}. \tag{2.13}$$

Матричные элементы величин $P_{\mathbf{k}\alpha} = \dot{Q}_{\mathbf{k}\alpha}$ отличаются от матричных элементов $Q_{\mathbf{k}\alpha}$ лишь множителем $\pm i\omega$.

В дальнейших вычислениях, однако, будет удобнее пользоваться вместо величин $Q_{\mathbf{k}\alpha}$, $P_{\mathbf{k}\alpha}$ их линейными комбинациями $\omega Q_{\mathbf{k}\alpha} \pm iP_{\mathbf{k}\alpha}$, которые имеют матричные элементы только для переходов $N_{\mathbf{k}\alpha} \to N_{\mathbf{k}\alpha} \pm 1$. Соответственно этому вводим операторы

$$\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\widehat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} + i\widehat{P}_{\mathbf{k}\alpha}), \quad \widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\widehat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} - i\widehat{P}_{\mathbf{k}\alpha}) \tag{2.14}$$

(классические величины $c_{\mathbf{k}\alpha}$, $c^*_{\mathbf{k}\alpha}$ совпадают с точностью до множителя $\sqrt{2\pi/\omega}$ с коэффициентами $a_{\mathbf{k}\alpha}$, $a^*_{\mathbf{k}\alpha}$ в разложении (2.4)) Матричные элементы этих операторов равны

$$\langle N_{\mathbf{k}\alpha}-1|c_{\mathbf{k}\alpha}|N_{\mathbf{k}\alpha}\rangle = \langle N_{\mathbf{k}\alpha}|c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}|N_{\mathbf{k}\alpha}-1\rangle = \sqrt{N_{\mathbf{k}\alpha}}. \tag{2.15}$$

Правило коммутации между $\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}$ получается с помощью определения (2.14) и правила (2.9):

$$\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha} - \widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha} = 1. \tag{2.16}$$

Для векторного потенциала мы возвращаемся к разложению вида (2.4), в котором, однако, коэффициенты являются теперь операторами. Напишем его в виде

$$\widehat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}(\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha} + \widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{A}^*_{\mathbf{k}\alpha}), \tag{2.17}$$

где

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha} = \sqrt{4\pi}\frac{\mathbf{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}e^{i\mathbf{kr}}. \tag{2.18}$$

Мы ввели обозначение $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ для единичных векторов, указывающих направление поляризации осцилляторов; векторы $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярны волновому вектору $\mathbf{k}$, причем для каждого $\mathbf{k}$ имеются две независимые поляризации.

Аналогично для операторов $\widehat{\mathbf{E}}$ и $\widehat{\mathbf{H}}$ напишем

$$\widehat{\mathbf{E}} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}(\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha} + \widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{E}^*_{\mathbf{k}\alpha}), \quad \widehat{\mathbf{H}} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}(\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha} + \widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{H}^*_{\mathbf{k}\alpha}), \tag{2.19}$$

причем

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha} = i\omega\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}, \quad \mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha} = [\mathbf{n}\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}] \qquad (\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega). \tag{2.20}$$

Векторы $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ взаимно ортогональны в том смысле, что

$$\int \mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{A}^*_{\mathbf{k}'\alpha'}d^3x = \frac{2\pi}{\omega}\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \tag{2.21}$$

Действительно, если $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\mathbf{A}^*_{\mathbf{k}'\alpha'}$ различаются волновыми векторами, то их произведение содержит множитель $e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}$, дающий нуль при интегрировании по объему; если же они различаются лишь поляризациями, то $\mathbf{e}^{(\alpha)}\mathbf{e}^{(\alpha')*} = 0$, так как два независимых направления поляризации взаимно ортогональны. Аналогичные соотношения справедливы для векторов $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}$. Их нормировку удобно записать в виде

$$\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{E}^*_{\mathbf{k}'\alpha'} + \mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{H}^*_{\mathbf{k}'\alpha'})d^3x = \omega\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}. \tag{2.22}$$

Подставив операторы (2.19) в (2.10) и произведя интегрирование с помощью (2.22), получим гамильтониан поля, выраженный через операторы $\widehat{c}$, $\widehat{c}^+$:

$$\widehat{H} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\frac{1}{2}\omega(\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha} + \widehat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}). \tag{2.23}$$

Этот оператор в рассматриваемом представлении (матричные элементы операторов $\widehat{c}$, $\widehat{c}^+$ из (2.15)) диагонален, и его собственные значения совпадают, конечно, с (2.12).

В классической теории импульс поля определяется как интеграл:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi}\int[\mathbf{E}\mathbf{H}]d^3x.$$

При переходе к квантовой теории заменяем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ операторами (2.19) и без труда находим

$$\widehat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\frac{1}{2}(\widehat{P}^2_{\mathbf{k}\alpha} + \omega^2\widehat{Q}^2_{\mathbf{k}\alpha})\mathbf{n} \tag{2.24}$$

— в соответствии с известным классическим соотношением между энергией и импульсом плоских волн. Собственные значения этого оператора

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{k}\left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right). \tag{2.25}$$

Представление операторов, осуществляемое матричными элементами (2.15), есть «представление чисел заполнения», — оно отвечает описанию состояния системы (поля) путем задания квантовых чисел $N_{\mathbf{k}\alpha}$ (*числа заполнения*). В этом представлении операторы поля (2.19) (а с ними и гамильтониан (2.11)) действуют на волновую функцию системы, выраженную в функции

чисел $N_{\mathbf{k}\alpha}$; обозначим ее $\Phi(N_{\mathbf{k}\alpha}, t)$. Операторы поля (2.19) не зависят явно от времени. Это соответствует обычному в нерелятивистской квантовой механике шредингеровскому представлению операторов. Зависящим же от времени является при этом состояние системы $\Phi(N_{\mathbf{k}\alpha}, t)$, причем эта зависимость определяется уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \widehat{H}\Phi.$$

Такое описание поля по существу релятивистски инвариантно, поскольку оно базируется на инвариантных уравнениях Максвелла. Но эта инвариантность не выявлена явно, — прежде всего потому, что пространственные координаты и время входят в описание крайне несимметричным образом.

В релятивистской теории целесообразно придать описанию внешне более инвариантный вид. Для этой цели надо воспользоваться так называемым гейзенберговским представлением, в котором явная временная зависимость перенесена на сами операторы (см. III, § 13). Тогда время и координаты будут равноправным образом входить в выражения для операторов поля, а состояние системы Φ будет функцией только от чисел заполнения.

Для оператора $\widehat{\mathbf{A}}$ переход к гейзенберговскому представлению сводится к замене в каждом члене суммы в (2.17), (2.18) множителя $e^{i\mathbf{kr}}$ на $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$, т. е. к тому, чтобы под $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ понимать зависящие от времени функции

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha} = \sqrt{4\pi}\frac{\mathbf{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})}. \qquad (2.26)$$

В этом легко убедиться, заметив, что матричный элемент гейзенберговского оператора для перехода $i \to f$ должен содержать множитель $\exp\{-i(E_i - E_f)t\}$, где E_i и E_f — энергии начального и конечного состояний (см. III, § 13). Для перехода с уменьшением или увеличением $N_{\mathbf{k}}$ на 1 этот множитель сводится соответственно к $e^{-i\omega t}$ или $e^{i\omega t}$. Это требование будет соблюдено в результате указанной замены.

В дальнейшем (при рассмотрении как электромагнитного поля, так и полей частиц) мы всегда будем подразумевать гейзенберговское представление операторов.

§ 3. Фотоны

Обратимся к обсуждению полученных формул квантования поля.

Прежде всего, формула (2.12) для энергии поля обнаруживает следующую трудность. Наиболее низкому уровню энергии

поля соответствует равенство нулю квантовых чисел $N_{\mathbf{k}\alpha}$ всех осцилляторов (это состояние называют состоянием *вакуума электромагнитного поля*). Но даже в этом состоянии каждый осциллятор обладает отличной от нуля «нулевой энергией» $\omega/2$. При суммировании же по всему бесконечному числу осцилляторов мы получим бесконечный результат. Таким образом, мы сталкиваемся с одной из «расходимостей», к которым приводит отсутствие полной логической замкнутости существующей теории.

Пока речь идет лишь о собственных значениях энергии поля, можно устранить эту трудность простым вычеркиванием энергии нулевых колебаний, т. е. написав для энергии и импульса поля [1])

$$E = \sum_{\mathbf{k}\alpha} N_{\mathbf{k}\alpha}\omega, \qquad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} N_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{k}. \tag{3.1}$$

Эти формулы позволяют ввести основное для всей квантовой электродинамики понятие о *световых квантах*, или *фотонах* [2]). Именно, мы можем рассматривать свободное электромагнитное поле как совокупность частиц, каждая из которых имеет энергию $\omega(=\hbar\omega)$ и импульс $\mathbf{k}(=\mathbf{n}\hbar\omega/c)$. Соотношение между энергией и импульсом фотона — такое, каким оно должно быть в релятивистской механике для частиц с равной нулю массой покоя, движущихся со скоростью света. Числа заполнения $N_{\mathbf{k}\alpha}$ приобретают смысл чисел фотонов с данными импульсами $\mathbf{k}$ и поляризациями $\mathbf{e}^{(\alpha)}$. Свойство поляризации фотона аналогично понятию спина у других частиц (специфические особенности фотона в этом отношении будут рассмотрены ниже, в § 6).

Легко видеть, что развитый в предыдущем параграфе математический формализм находится в полном соответствии с представлением об электромагнитном поле как о совокупности фотонов; это есть не что иное, как аппарат так называемого вторичного квантования в применении к системе фотонов [3]). В этом методе (см. III, § 64) роль независимых переменных играют числа заполнения состояний, а операторы действуют на функции этих чисел. При этом основную роль играют операторы «уни-

---

[1]) Это вычеркивание можно произвести формально не противоречивым образом, условившись понимать произведения операторов в (2.10) как «нормальные», т. е. такие, в которых операторы $\hat{c}^{+}$ располагаются всегда левее операторов $\hat{c}$. Формула (2.23) примет тогда вид

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left(\omega \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\right).$$

[2]) Представление о фотонах было впервые введено *Эйнштейном* (*A. Einstein*, 1905).

[3]) Метод вторичного квантования в применении к теории излучения был развит *Дираком* (*P. A. M. Dirac*, 1927).

чтожения» и «рождения» частиц, соответственно уменьшающие или увеличивающие на единицу числа заполнения. Именно такими операторами и являются $\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}$: оператор $\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$ уничтожает фотон в состоянии $\mathbf{k}\alpha$, а $\widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}$ — рождает фотон в этом состоянии.

Правило коммутации (2.16) соответствует случаю частиц, подчиняющихся статистике Бозе. Таким образом, фотоны являются бозонами, как этого и следовало ожидать заранее: допустимое число фотонов в любом состоянии может быть произвольным (мы вернемся еще в § 5 к роли этого обстоятельства).

Плоские волны $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}$ (2.26), фигурирующие в операторе $\widehat{\mathbf{A}}$ (2.17) в качестве коэффициентов перед операторами уничтожения фотонов, можно трактовать как волновые функции фотонов, обладающих определенными импульсами $\mathbf{k}$ и поляризациями $\mathbf{e}^{(\alpha)}$. Такая трактовка соответствует разложению ψ-оператора в виде ряда по волновым функциям стационарных состояний частицы в нерелятивистском аппарате вторичного квантования (в отличие от последнего, однако, в разложение (2.17) входят как операторы уничтожения, так и операторы рождения частиц; смысл этого различия выяснится в дальнейшем, см. § 12).

Волновая функция (2.26) нормирована условием

$$\int \frac{1}{4\pi}(|\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}|^2 + |\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}|^2)d^3x = \omega \tag{3.2}$$

Это есть нормировка на один фотон в объеме $V = 1$. Действительно, интеграл в левой стороне равенства представляет собой квантовомеханическое среднее значение энергии фотона в состоянии с данной волновой функцией [1]. В правой же стороне равенства (3.2) стоит энергия одного фотона.

Роль «уравнения Шредингера» для фотона играют уравнения Максвелла. В данном случае (для потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющего условию (2.1)) это — волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} = 0.$$

«Волновые функции» фотона в общем случае произвольных стационарных состояний представляют собой комплексные решения этого уравнения, зависящие от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$.

Говоря о волновой функции фотона, подчеркнем лишний раз, что ее отнюдь нельзя рассматривать как амплитуду вероятности

[1]) Обратим внимание на то, что коэффициент $1/(4\pi)$ в интеграле (3.2) в два раза больше обычного коэффициента $1/(8\pi)$ в (2.10). Эта разница связана, в конечном счете, с комплексностью векторов $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{k}\alpha}$, в отличие от эрмитовых операторов поля $\widehat{\mathbf{E}}$, $\widehat{\mathbf{H}}$.

пространственной локализации фотона — в противоположность основному смыслу волновой функции в нерелятивистской квантовой механике. Это связано с тем, что (как было указано в § 1) понятие координат фотона вообще не имеет физического смысла. К математическому аспекту этой ситуации мы вернемся еще в конце следующего параграфа.

Компоненты разложения Фурье функции $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ по координатам образуют волновую функцию фотона в импульсном представлении; обозначим ее $\mathbf{A}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{k})e^{-i\omega t}$. Так, для состояния с определенным импульсом $\mathbf{k}$ и поляризацией $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ волновая функция импульсного представления дается просто коэффициентом при экспоненциальном множителе в (2.26):

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{k}', \alpha') = \sqrt{4\pi}\frac{\mathbf{e}^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}\delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}\delta_{\alpha\alpha'}. \tag{3.3}$$

В соответствии с измеримостью импульса свободной частицы волновая функция импульсного представления имеет более глубокий физический смысл, чем функция координатного представления: она дает возможность вычислить вероятности $\omega_{\mathbf{k}\alpha}$ различных значений импульса и поляризации фотона, находящегося в заданном состоянии. Согласно общим правилам квантовой механики $\omega_{\mathbf{k}\alpha}$ дается квадратом модулей коэффициентов разложения функции $\mathbf{A}(\mathbf{k}')$ по волновым функциям состояний с определенными $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}^{(\alpha)}$:

$$w_{\mathbf{k}\alpha} \propto \left|\sum_{\mathbf{k}'\alpha'} \mathbf{A}^*_{\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{k}', \alpha')\mathbf{A}(\mathbf{k}')\right|^2$$

(коэффициент пропорциональности зависит от способа нормировки функций). Подставив сюда (3.3), получим

$$w_{\mathbf{k}\alpha} \propto |\mathbf{e}^{(\alpha)}\mathbf{A}(\mathbf{k})|^2. \tag{3.4}$$

После суммирования по двум поляризациям найдем вероятность того, что фотон имеет импульс $\mathbf{k}$:

$$w_{\mathbf{k}} \propto |\mathbf{A}(\mathbf{k})|^2. \tag{3.5}$$

§ 4. Калибровочная инвариантность

Как известно, выбор потенциалов поля в классической электродинамике неоднозначен: компоненты 4-потенциала A_μ можно подвергнуть произвольному *калибровочному* (или *градиентному*) преобразованию вида

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi, \tag{4.1}$$

где χ — произвольная функция координат и времени (см. II, § 18).

Для плоской волны, если ограничиться преобразованиями, не меняющими вида потенциала (его пропорциональности множителю $\exp(-ik_\mu x^\mu)$), неоднозначность сводится к возможности прибавления к амплитуде волны любого 4-вектора, пропорционального 4-вектору k^μ.

Неоднозначность потенциала сохраняется, конечно, и в квантовой теории — применительно к операторам поля или к волновым функциям фотонов. Не предрешая способа выбора потенциалов, надо писать вместо (2.17) аналогичное разложение для операторного 4-потенциала

$$\widehat{A}^\mu = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left(\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha} A^\mu_{\mathbf{k}\alpha} + \widehat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha} A^{\mu*}_{\mathbf{k}\alpha}\right), \tag{4.2}$$

где волновые функции $A^\mu_{\mathbf{k}\alpha}$ — 4-векторы вида

$$A^\mu_{\mathbf{k}} = \sqrt{4\pi}\frac{e^\mu}{\sqrt{2\omega}} e^{-ik_\nu x^\nu}, \qquad e_\mu e^{\mu*} = -1,$$

или в краткой записи, опуская четырехмерные векторные индексы:

$$A_{\mathbf{k}} = \sqrt{4\pi}\frac{e}{\sqrt{2\omega}} e^{-ikx}, \qquad ee^* = -1. \tag{4.3}$$

Здесь 4-импульс $k_\mu = (\omega, \mathbf{k})$ (так что $kx = \omega t - \mathbf{kr}$), а e — единичный 4-вектор поляризации [1].

Если ограничиться калибровочными преобразованиями, не меняющими зависимости функции (4.3) от координат и времени, то они будут состоять в замене

$$e_\mu \to e_\mu + \chi k_\mu, \tag{4.4}$$

где $\chi = \chi(k^\mu)$ — произвольная функция. Поперечность поляризации означает, что всегда возможна такая калибровка, при которой 4-вектор e имеет вид

$$e^\mu = (0, \mathbf{e}), \qquad \mathbf{ek} = 0 \tag{4.5}$$

(такую калибровку мы будем называть *трехмерно поперечной*). В инвариантном четырехмерном виде это требование записывается в виде условия *четырехмерной поперечности*

$$ek = 0. \tag{4.6}$$

Обратим внимание на то, что это условие (как и нормировочное условие $ee^* = -1$) не нарушается преобразованием (4.4)

[1]) Выражение (4.3) не имеет вполне релятивистски-ковариантного (4-векторного) вида, что связано с неинвариантным характером принятой нами нормировки на конечный объем $V = 1$. Это, однако, не имеет принципиального значения и вполне компенсируется удобствами такого способа нормировки. Мы увидим в дальнейшем, что им обеспечивается простое и автоматическое получение реальных физических величин в должной инвариантной форме.

в силу того, что $k^2 = 0$. С другой стороны, равенство нулю квадрата 4-импульса частицы означает равенство нулю ее массы. Тем самым выявляется связь между калибровочной инвариантностью и равенством нулю массы фотона (другие аспекты этой связи будут указаны в § 14).

Никакие измеримые физические величины не должны меняться при калибровочном преобразовании волновых функций фотонов, участвующих в процессе. Это требование *калибровочной инвариантности* играет в квантовой электродинамике даже большую роль, чем в классической теории. Мы увидим на многочисленных примерах, что оно является здесь, наряду с требованием релятивистской инвариантности, мощным эвристическим принципом.

В свою очередь калибровочная инвариантность теории тесно связана с законом сохранения электрического заряда; мы остановимся на этом ее аспекте в § 43.

Мы упоминали уже в предыдущем параграфе, что координатная волновая функция фотона не может быть истолкована как амплитуда вероятности его пространственной локализации. В математическом аспекте это обстоятельство проявляется в невозможности составить с помощью волновой функции величину, которая уже хотя бы по своим формальным свойствам могла играть роль плотности вероятности. Такая величина должна была бы выражаться существенно положительной билинейной комбинацией из волновой функции A_μ и ее комплексно-сопряженной. Кроме того, она должна была бы удовлетворять определенным требованиям релятивистской ковариантности — представлять собой временную компоненту 4-вектора (дело в том, что уравнение непрерывности, выражающее сохранение числа частиц, записывается в четырехмерном виде как равенство нулю дивергенции 4-вектора тока; временнóй компонентой последнего и является в данном случае плотность вероятности локализации частицы, см. II, § 29). С другой стороны, в силу требования калибровочной инвариантности 4-вектор A_μ мог бы входить в ток лишь в виде антисимметричного тензора $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -i(k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu)$. Таким образом, 4-вектор тока должен был бы составляться билинейно из $F_{\mu\nu}$ и $F^*_{\mu\nu}$ (и компонент 4-вектора k_μ). Но такой 4-вектор вообще невозможно составить: всякое выражение, удовлетворяющее поставленным условиям (например, $k^\lambda F^*_{\mu\nu} F_\lambda{}^\nu$), обращается в нуль в силу условия поперечности ($k^\lambda F_{\nu\lambda} = 0$), не говоря уже о том, что оно не было бы существенно положительным (так как содержит нечетные степени компонент k_μ).

§ 5. Электромагнитное поле в квантовой теории

Описание поля как совокупности фотонов есть единственное описание, вполне адекватное физическому смыслу электромагнитного поля в квантовой теории. Оно заменяет классическое описание с помощью напряженностей поля. Последние выступают в математическом аппарате фотонной картины как операторы вторичного квантования.

Как известно, свойства квантовой системы приближаются к классическим в тех случаях, когда велики квантовые числа, определяющие стационарные состояния системы. Для свободного электромагнитного поля (в заданном объеме) это означает, что должны быть велики квантовые числа осцилляторов, т. е. числа фотонов $N_{\mathbf{k}\alpha}$. В этом смысле глубокое значение имеет то обстоятельство, что фотоны подчиняются статистике Бозе. В математическом формализме теории связь статистики Бозе со свойствами классического поля проявляется в правилах коммутации операторов $\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}$. При больших $N_{\mathbf{k}\alpha}$, когда велики матричные элементы этих операторов, можно пренебречь единицей в правой стороне перестановочного соотношения (2.16), в результате чего получится

$$\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha} \simeq \widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha},$$

т. е. эти операторы перейдут в коммутирующие друг с другом классические величины $c_{\mathbf{k}\alpha}$, $c^{*}_{\mathbf{k}\alpha}$, определяющие классические напряженности поля.

Условие квазиклассичности поля требует, однако, еще уточнения. Дело в том, что если велики все числа $N_{\mathbf{k}\alpha}$, то при суммировании по всем состояниям $\mathbf{k}\alpha$ энергия поля во всяком случае окажется бесконечной, так что условие становится беспредметным.

Физически осмысленная постановка вопроса об условиях квазиклассичности основана на рассмотрении значений поля, усредненных по некоторому небольшому промежутку времени Δt. Если представить классическое электрическое поле $\mathbf{E}$ (или магнитное поле $\mathbf{H}$) в виде разложения в интеграл Фурье по времени, то при усреднении его по промежутку времени Δt заметный вклад в среднее значение $\overline{\mathbf{E}}$ дадут только те из компонент Фурье, частоты которых удовлетворяют условию $\omega\Delta t \lesssim 1$; в противном случае осциллирующий множитель $e^{-i\omega t}$ при усреднении почти обратится в нуль. Поэтому при выяснении условия квазиклассичности усредненного поля надо рассматривать лишь те из квантовых осцилляторов, частоты которых $\omega \lesssim 1/\Delta t$. Достаточно потребовать, чтобы были велики квантовые числа этих осцилляторов.

Число осцилляторов с частотами между нулем и $\omega \sim 1/\Delta t$ (отнесенное к объему $V = 1$) по порядку величины равно [1])

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \sim \frac{1}{(c\Delta t)^3}. \tag{5.1}$$

Полная энергия поля в единичном объеме $\sim \overline{\mathbf{E}^2}$. Разделив эту величину на число осцилляторов и на некоторую среднюю энергию отдельного фотона ($\sim \hbar\omega$), найдем порядок величины чисел фотонов

$$N_{\mathbf{k}} \sim \frac{\overline{\mathbf{E}^2} c^3}{\hbar\omega^4}.$$

Потребовав, чтобы это число было велико, получим неравенство

$$|\mathbf{E}| \gg \frac{\sqrt{\hbar c}}{(c\Delta t)^2}. \tag{5.2}$$

Это и есть искомое условие, допускающее классическое рассмотрение усредненного (по промежуткам времени Δt) поля. Мы видим, что поле должно быть достаточно сильным — тем большим, чем меньше интервал усреднения Δt. Для переменных полей этот интервал не должен, разумеется, превышать периодов времени, в течение которых поле заметно меняется. Поэтому достаточно слабые переменные поля во всяком случае не могут быть квазиклассичны. Лишь в случае статических (постоянных во времени) полей можно положить $\Delta t \to \infty$, так что правая сторона неравенства (5.2) обращается в нуль. Это значит, что статическое поле всегда классично.

Уже было указано, что классические выражения для электромагнитного поля в виде суперпозиции плоских волн должны рассматриваться в квантовой теории как операторные. Физический смысл этих операторов, однако, весьма ограничен. Действительно, физически осмысленный оператор поля должен был бы приводить к равным нулю значениям поля в состоянии фотонного вакуума. Между тем среднее значение оператора квадрата поля $\widehat{\mathbf{E}}^2$ в нормальном состоянии, совпадающее с точностью до множителя с нулевой энергией поля, оказывается бесконечным (под «средним значением» мы понимаем квантовомеханическое среднее значение, т. е. соответствующий диагональный матричный элемент оператора). Избежать этого нельзя даже с помощью какой-либо формальной операции вычеркивания (как это можно сделать для энергии поля), так как в данном случае мы должны были бы сделать это путем некоторого разумного видоизменения самих операторов $\widehat{\mathbf{E}}$, $\widehat{\mathbf{H}}$ (а не их квадратов), что оказывается невозможным.

[1]) В этом параграфе пользуемся обычными единицами.

§ 6. Момент и четность фотона

Как и всякая частица, фотон может обладать определенным моментом импульса. Для выяснения свойств этой величины у фотона предварительно напомним, каким образом связаны в математическом аппарате квантовой механики свойства волновой функции частицы с ее моментом.

Момент частицы $\mathbf{j}$ складывается из ее орбитального момента $\mathbf{l}$ и собственного момента — спина $\mathbf{s}$. Волновая функция частицы со спином s есть симметричный спинор ранга $2s$, т. е. представляет собой совокупность $2s+1$ компонент, которые при поворотах системы координат преобразуются друг через друга по определенному закону. Орбитальный же момент связан с координатной зависимостью волновых функций: состояниям с орбитальным моментом l соответствуют волновые функции, компоненты которых выражаются (линейно) через шаровые функции порядка l.

Возможность последовательным образом различать спин и орбитальный момент требует, следовательно, независимости «спиновых» и «координатных» свойств волновых функций: координатная зависимость компонент спинора (в заданный момент времени) не должна ограничиваться никакими дополнительными условиями.

В импульсном представлении волновых функций координатной зависимости отвечает зависимость от импульса $\mathbf{k}$. Волновой функцией фотона (в трехмерно поперечной калибровке) является вектор $\mathbf{A}(\mathbf{k})$. Вектор эквивалентен спинору второго ранга, и в этом смысле можно было бы приписать фотону спин 1. Но эта векторная волновая функция подчинена условно поперечности, $\mathbf{k}\mathbf{A}(\mathbf{k})=0$, представляющему собой дополнительное условие, налагаемое на импульсную зависимость вектора $\mathbf{A}(\mathbf{k})$. В результате эта зависимость уже не может быть задана для всех компонент вектора одновременно произвольным образом, что и приводит к невозможности разделения орбитального момента и спина.

Отметим, что к фотону неприменимо также определение спина как момента покоящейся частицы, поскольку для фотона, движущегося со скоростью света, вообще не существует системы покоя.

Таким образом, для фотона можно говорить лишь о его полном моменте. При этом заранее ясно, что полный момент может пробегать лишь целочисленные значения. Это видно уже из того, что среди величин, характеризующих фотон, нет никаких спиноров нечетного ранга.

Как и для всякой частицы, состояние фотона характеризуется также своей четностью, связанной с поведением волновой функции при инверсии системы координат (см. III, § 30). В им-

пульсном представлении изменению знака координат отвечает изменение знака всех компонент $\mathbf{k}$. Воздействие оператора инверсии $\widehat{P}$ на скалярную функцию $\varphi(\mathbf{k})$ заключается только в этом изменении: $\widehat{P}\varphi(\mathbf{k}) = \varphi(-\mathbf{k})$. При воздействии же на векторную функцию $\mathbf{A}(\mathbf{k})$) надо еще учесть, что изменение направления осей на обратное меняет также знак всех компонент вектора; поэтому [1])

$$\widehat{P}\mathbf{A}(\mathbf{k}) = -\mathbf{A}(-\mathbf{k}). \tag{6.1}$$

Хотя разделение момента фотона на орбитальный момент и спин лишено физического смысла, тем не менее удобно ввести «спин» s и «орбитальный момент» l формальным образом как вспомогательные понятия, выражающие свойства преобразования волновой функции по отношению к вращениям: значение $s = 1$ отвечает векторности волновой функции, а значение l есть порядок входящих в нее шаровых функций. Мы имеем при этом в виду волновые функции состояний с определенными значениями момента фотона, представляющие собой для свободной частицы сферические волны. Число l определяет, в частности, четность состояния фотона, равную

$$P = (-1)^{l+1} \tag{6.2}$$

В таком же смысле можно представить оператор момента $\widehat{\mathbf{j}}$ как сумму $\widehat{\mathbf{s}}+\widehat{\mathbf{j}}$. Оператор момента связан, как известно, с оператором бесконечно малого поворота системы координат; в данном случае — с действием этого оператора на векторное поле. В сумме $\widehat{\mathbf{s}} + \widehat{\mathbf{j}}$ оператор $\widehat{\mathbf{s}}$ действует на векторный индекс, преобразуя друг через друга различные компоненты вектора. Оператор же $\widehat{\mathbf{l}}$ действует на эти компоненты как на функции импульса (или координат).

Подсчитаем число состояний (с заданной энергией), которые возможны при заданном значении j момента фотона (отвлекаясь при этом от тривиального $(2j + 1)$-кратного вырождения по направлениям момента).

При независимых $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$ такое вычисление осуществляется простым подсчетом числа способов, которыми можно по правилам векторной модели сложить моменты $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$ так, чтобы получить

[1]) Условимся определять четность состояния по действию оператора инверсии на полярный вектор, каковым является $\mathbf{A}$ (или соответствующий электрический вектор $\mathbf{E} = i\omega\mathbf{A}$). Оно отличается по знаку от действия на аксиальный вектор $\mathbf{H} = i[\mathbf{k}\mathbf{A}]$, поскольку инверсия не меняет направление такого вектора:

$$\widehat{P}\mathbf{H}(\mathbf{k}) = \mathbf{H}(-\mathbf{k}).$$

нужное значение j. Для частицы со спином $s = l$ мы нашли бы таким образом (при заданном отличном от нуля значении j) три состояния со следующими значениями l и четности:

$$l = j,\ P = (-1)^{l+1} = (-1)^{j+1}; \quad l = j \pm 1,\ P = (-1)^{l+1} = (-1)^{j}.$$

Если же $j = 0$, то получается всего одно состояние (с $l = 1$) с четностью $P = +1$.

В этом подсчете, однако, не учтено условие поперечности вектора $\mathbf{A}$; все три его компоненты рассматривались как независимые. Поэтому из полученного числа состояний надо еще вычесть число состояний, соответствующих продольному вектору. Такой вектор можно написать в виде $\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k})$, откуда ясно, что по своим трансформационным (по отношению к вращениям) свойствам его три компоненты эквивалентны всего одному скаляру φ [1]. Следовательно, можно сказать, что лишнее состояние, не совместимое с условием поперечности, соответствовало бы состоянию частицы со скалярной волновой функцией (спинор ранга 0), т. е. со «спином 0» [2]. Момент j этого состояния совпадает поэтому с порядком входящих в φ сферических функций. Четность же этого состояния как состояния фотона определяется действием оператора инверсии на векторную функцию $\mathbf{k}\varphi$:

$$\widehat{P}(\mathbf{k}\varphi) = -(-\mathbf{k})\varphi(-\mathbf{k}) = (-1)^{j}\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k}),$$

т. е. равна $(-1)^j$. Таким образом, из полученного выше числа состояний с четностью $(-1)^j$ (двух при $j \neq 0$ и одного при $j = 0$) надо вычесть одно.

Окончательно мы приходим к результату, что при отличном от нуля моменте фотона j существуют одно четное и одно нечетное состояния. При $j = 0$ мы не получим вовсе никаких состояний. Это означает, что фотон вообще не может иметь равного нулю момента, так что j пробегает лишь значения 1, 2, 3, ... Невозможность значения $j = 0$, впрочем, очевидна: волновая функция состояния с равным нулю моментом должна быть сферически-симметрична, что заведомо невозможно для поперечной волны.

Принята определенная терминология для различных состояний фотона. Фотон в состоянии с моментом j и четностью $(-1)^j$ называют *электрическим* 2^j*-польным* (или Ej-фотоном), а при

---

[1]) Действительно, когда говорят о характере преобразования величины при вращении, речь идет о преобразовании в данной точке, т. е. при заданном $\mathbf{k}$. При таком преобразовании $\mathbf{k}\varphi(\mathbf{k})$ вообще не меняется, т. е. ведет себя как скаляр.

[2]) Подчеркнем лишний раз, что здесь не имеется в виду состояние какой-либо реальной частицы. Производимый подсчет имеет формальный характер и сводится, с математической точки зрения, к классификации всей совокупности преобразующихся друг через друга величин по неприводимым представлениям группы вращения.

четности $(-1)^{j+1}$ — *магнитным* 2^j*-польным* (или Mj-фотоном). Так, электрическому дипольному фотону отвечает нечетное состояние с $j = 1$, электрическому квадрупольному — четное состояние с $j = 2$, магнитному дипольному — четное состояние с $j = 1$ [1]).

§ 7. Сферические волны фотонов

Определив возможные значения момента фотона, мы должны теперь найти соответствующие им волновые функции [2]).

Рассмотрим сначала формальную задачу: определить такие векторные функции, которые являлись бы собственными функциями операторов $\hat{\mathbf{j}}^2$ и $\hat{j}_z$; при этом мы не предрешаем заранее, какие именно из этих функций входят в интересующие нас волновые функции фотона, и не учитываем условия поперечности.

Будем искать функции в импульсном представлении. Оператор координат в этом представлении $\hat{\mathbf{r}} = i\partial/\partial\mathbf{k}$ (см. III, (15.12)). Оператор же орбитального момента

$$\hat{\mathbf{l}} = [\hat{\mathbf{r}}\mathbf{k}] = -i\left[\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}\right],$$

т. е. отличается от оператора момента в координатном представлении лишь заменой буквы $\mathbf{r}$ на $\mathbf{k}$. Поэтому решение поставленной задачи в обоих представлениях формально одинаково.

Обозначим искомые собственные функции посредством $\mathbf{Y}_{jm}$ и будем называть их *шаровыми векторами*. Они должны удовлетворять уравнениям

$$\hat{\mathbf{j}}^2 = j(j+1)\mathbf{Y}_{jm}, \qquad \hat{j}_z\mathbf{Y}_{jm} = m\mathbf{Y}_{jm} \tag{7.1}$$

(ось z — заданное направление в пространстве). Покажем, что этим свойством обладает любая функция вида $\mathbf{a}Y_{jm}$, где $\mathbf{a}$ — какой-либо вектор, образованный с помощью единичного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, а Y_{jm} — обычные (скалярные) шаровые функции. Последние будем везде определять согласно III, § 28:

$$Y_{lm}(\mathbf{n}) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{7.2}$$

[1]) Эти названия соответствуют терминологии классической теории излучения: мы увидим в дальнейшем (§ 46, 47), что излучение фотонов электрического и магнитного типов определяется соответствующими электрическими и магнитными моментами системы зарядов.

[2]) Этот вопрос был впервые рассмотрен *Гайтлером* (*W. Heitler*, 1936). Излагаемая форма решения принадлежит *В. Б. Берестецкому* (1947).

(θ, φ — сферические углы, определяющие направление $\mathbf{n}$) [1]).

Для этого вспомним правило коммутации III, (29.4):

$$\{\widehat{l}_i, a_k\}_- = ie_{ikl}a_l.$$

Правую сторону этого равенства можно написать в виде $(-\widehat{s}_i a_k)$, где $\widehat{\mathbf{s}}$ — оператор спина 1 (воздействие этого оператора на векторную функцию как раз определяется равенством $\widehat{s}_i a_k = -ie_{ikl}a_l$; см. III, § 57, задача 2). Поэтому имеем

$$\widehat{l}_i a_k - a_k \widehat{l}_i = -\widehat{s}_i a_k.$$

Воспользовавшись этим равенством, найдем

$$\widehat{j}_i a_k = (\widehat{l}_i + \widehat{s}_i)a_k = a_k \widehat{l}_i.$$

Следовательно,

$$\widehat{\mathbf{j}}^2(\mathbf{a}Y_{jm}) = \mathbf{a}\widehat{\mathbf{l}}^2 Y_{jm}, \qquad \widehat{j}_z(\mathbf{a}Y_{jm}) = \mathbf{a}\widehat{l}_z Y_{jm}.$$

Но шаровая функция Y_{jm} есть собственная функция операторов $\widehat{\mathbf{l}}^2$ и $\widehat{l}_z$, соответствующая собственным значениям этих величин $j(j+1)$ и m, так что мы приходим к равенствам (7.1).

Мы получим три существенно различных типа шаровых векторов, выбирая в качестве вектора $\mathbf{a}$ один из следующих векторов [2]):

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{n}}}{\sqrt{j(j+1)}}, \qquad \frac{[\mathbf{n}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{n}}]}{\sqrt{j(j+1)}}, \qquad \mathbf{n}. \tag{7.3}$$

Таким образом, определяем шаровые векторы следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{(\text{э})}_{jm} &= \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{n}}, & P &= (-1)^j; \\ \mathbf{Y}^{(\text{м})}_{jm} &= [\mathbf{n}\mathbf{Y}^{(\text{э})}_{jm}], & P &= (-1)^{j+1}; \\ \mathbf{Y}^{(\text{п})}_{jm} &= \mathbf{n}Y_{jm}, & P &= (-1)^j. \end{aligned} \tag{7.4}$$

---

[1]) Отметим для будущих ссылок значение функций при $\theta = 0$ ($\mathbf{n}$ — вдоль оси z):

$$Y_{lm}(\mathbf{n}_z) = i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m0}. \tag{7.2a}$$

[2]) Оператор $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{n}} \equiv |\mathbf{k}|\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{k}}$ и действует на функции, зависящие только от направления $\mathbf{n}$. Он имеет (в сферических координатах) всего две составляющие:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{n}} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

Оператор, обозначенный ниже посредством $\Delta_{\mathbf{n}}$, — угловая часть оператора Лапласа:

$$\Delta_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Рядом с каждым вектором указана его четность P. Шаровые векторы трех типов взаимно ортогональны, причем $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{п})}$ — продолен, а $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{э})}$ и $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{м})}$ — поперечны по отношению к $\mathbf{n}$.

Шаровые векторы могут быть выражены через скалярные шаровые функции. При этом $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{м})}$ выражаются через шаровые функции лишь одного порядка $l = j$, а $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{э})}$ и $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{п})}$ — через шаровые функции порядков $l = j \pm 1$. Это обстоятельство очевидно: достаточно сравнить указанные в (7.4) четности шаровых векторов с четностью $(-1)^{l+1}$ векторного поля, выраженной через порядок содержащихся в нем шаровых функций.

Шаровые векторы каждого из типов взаимно ортогональны и нормированы согласно

$$\int \mathbf{Y}_{jm}\mathbf{Y}_{j'm'}^{*} do = \delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{7.5}$$

Для векторов $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{п})}$ это очевидно в силу условия нормировки шаровых функций Y_{jm}. Для векторов $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{э})}$ нормировочный интеграл

$$\frac{1}{j(j+1)}\int \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{n}}Y_{jm}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{n}}Y_{j'm'}^{*} do = -\frac{1}{j(j+1)}\int Y_{j'm'}^{*}\Delta_{\mathbf{n}}Y_{jm} do,$$

и, поскольку $\Delta_{\mathbf{n}}Y_{jm} = -j(j+1)Y_{jm}$, то мы приходим к (7.5). К такому же интегралу сводится нормировка векторов $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{м})}$.

Заметим, что к шаровым векторам (7.4) можно было бы прийти и без произведенной выше прямой проверки уравнений (7.1) — уже на основании общих соображений о трансформационных свойствах функций. Такие соображения привели нас в предыдущем параграфе к выводу о том, что векторная функция вида $\mathbf{n}\varphi$ отвечает значению j момента, совпадающему с порядком шаровых функций, входящих в φ; если положить просто $\varphi = Y_{jm}$, то функция $\mathbf{n}\varphi$ будет соответствовать также и определенному значению m проекции момента. Таким образом, мы сразу приходим к шаровым векторам $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{п})}$. Но изложенные в § 6 рассуждения о трансформационных свойствах не изменятся, если заменить множитель $\mathbf{n}$ в произведении $\mathbf{n}\varphi$ вектором $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{n}}$ или $[\mathbf{n}\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{n}}]$; таким образом, мы получим шаровые векторы двух других типов.

Вернемся к волновым функциям фотона. Для фотона электрического типа (Ej) вектор $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ должен обладать четностью $(-1)^j$. Такую четность имеют шаровые векторы $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{э})}$ и $\mathbf{Y}_{jm}^{(\text{п})}$; из них, однако, лишь первый удовлетворяет условию поперечности. Для фотона магнитного типа (Mj) вектор $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ должен иметь

четность $(-1)^{j+1}$; такую четность имеет только шаровой вектор $\mathbf{Y}^{(\text{м})}_{jm}$. Поэтому волновые функции фотона с определенным моментом j и его проекций m (и энергией ω)

$$\mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\delta(|\mathbf{k}| - \omega)\mathbf{Y}_{jm}(\mathbf{n}), \tag{7.6}$$

причем в качестве $\mathbf{Y}_{jm}$ надо писать $\mathbf{Y}^{(\text{э})}_{jm}$ или $\mathbf{Y}^{(\text{м})}_{jm}$ соответственно в случае фотона электрического или магнитного типа; заданное значение энергии учитывается множителем $\delta(|\mathbf{k}| - \omega)$. Функции (7.6) нормированы условием

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int \omega\omega' \mathbf{A}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{k})\mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{k})d^3k = \omega\delta(\omega' - \omega)\delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{7.7}$$

Для волновых функций координатного представления условие (7.7) эквивалентно условию [1])

$$\frac{1}{4\pi}\int \left\{\mathbf{E}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{r})\mathbf{E}_{\omega jm}(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{r})\mathbf{H}_{\omega jm}(\mathbf{r})\right\} d^3x = \\ = \omega\delta(\omega' - \omega)\delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{7.8}$$

Действительно, интеграл в левой стороне равенства, выраженный через потенциалы, имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int \mathbf{A}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{r})\mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{r})\omega'\omega d^3x.$$

Сюда надо подставить

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{r}) &= \int \mathbf{A}_{\omega jm}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kr}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \\ \mathbf{A}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{r}) &= \int \mathbf{A}^*_{\omega' j' m'}(\mathbf{k}')e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

После этого интегрирование по d^3x дает δ-функцию $(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$, которая устраняется интегрированием по d^3k', и интеграл приводится к виду (7.7).

До сих пор мы подразумевали поперечную калибровку потенциалов, при которой скалярный потенциал $\Phi = 0$. В различных применениях, однако, могут оказаться более удобными другие способы калибровки сферической волны.

---

[1]) Это условие того же типа, что и (2.22). Появление множителя $\delta(\omega' - \omega)$ в правой стороне равенства связано с тем, что здесь рассматривается поле (сферическая волна) во всем бесконечном пространстве вместо поля в конечном объеме $V = 1$.

Допустимое преобразование потенциалов в импульсном представлении состоит в замене

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \mathbf{n}f(\mathbf{k}), \qquad \Phi \to \Phi + f(\mathbf{k}),$$

где $f(\mathbf{k})$ — произвольная функция. Выберем ее в данном случае таким образом, чтобы новые потенциалы выражались через те же шаровые функции и чтобы они по-прежнему имели определенную четность. Для фотона электрического типа эти условия ограничивают выбор потенциалов следующими функциями:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(\text{э})}_{\omega jm}(\mathbf{k}) &= \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\delta(|\mathbf{k}| - \omega)(\mathbf{Y}^{(\text{э})}_{jm} + C\mathbf{n}Y_{jm}), \\ \Phi^{(\text{э})}_{\omega jm}(\mathbf{k}) &= \frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\delta(|\mathbf{k}| - \omega)CY_{jm}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

где C — произвольная постоянная. Для фотона же магнитного типа такая добавка к $\mathbf{A}^{(\text{м})}(\mathbf{k})$ лишала бы его определенной четности, и поэтому при тех же условиях выбор (7.6) оказывается однозначным.

Вероятность того, что фотон с определенными моментом и четностью будет зарегистрирован движущимся в направлении $\mathbf{n}$, лежащем в элементе телесного угла do, согласно (3.5) и (7.6) равна

$$w(\mathbf{n})do = \left|\mathbf{Y}^{(\text{э})}_{jm}\right|^2 do. \tag{7.11}$$

Мы написали выражение для фотона E-типа. Но поскольку $\left|\mathbf{Y}^{(\text{м})}_{jm}\right|^2 = \left|\mathbf{Y}^{(\text{э})}_{jm}\right|^2$, распределения вероятностей $w(\mathbf{n})$ для фотонов обоих типов одинаковы.

Квадрат модуля $\left|\mathbf{Y}^{(\text{э})}_{jm}\right|^2$ не зависит от азимутального угла φ (множители $e^{\pm im\varphi}$ в шаровых функциях сокращаются). Поэтому распределение вероятностей $w(\mathbf{n})$ симметрично относительно оси z. Далее, поскольку каждый из шаровых векторов обладает определенной четностью, квадраты их модулей четны по отношению к инверсии, т. е. по отношению к замене полярного угла $\theta \to \pi - \theta$; это значит, что функция $w(\theta)$, будучи разложена по полиномам Лежандра, содержит полиномы лишь четного порядка. Определение коэффициентов такого разложения сводится к вычислению интегралов от произведений трех шаровых функций и дальнейшему суммированию по компонентам. То и другое производится по формулам, полученным в III, § 107–108, и приводит

к следующему результату:

$$w(\theta) = (-1)^{m+1}\frac{(2j+1)^2}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(4n+1)\begin{pmatrix} j & j & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & j & 2n \\ m & -m & 0 \end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{Bmatrix} j & j & 1 \\ j & j & 2n \end{Bmatrix}P_{2n}(\cos\theta). \quad (7.12)$$

Приведем, наконец, выражения компонент шаровых векторов в виде разложений по шаровым функциям. При этом мы пользуемся «сферическими компонентами» вектора, определенными согласно III, § 107; компоненты f_λ вектора $\mathbf{f}$:

$$f_0 = if_z, \quad f_{+1} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(f_x + if_y), \quad f_{-1} = \frac{i}{\sqrt{2}}(f_x - if_y). \quad (7.13)$$

Если ввести «циркулярные орты»:

$$\mathbf{e}^{(0)}=i\mathbf{e}^{(z)},\ \mathbf{e}^{(+1)}=-\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^{(x)}+i\mathbf{e}^{(y)}),\ \mathbf{e}^{(-1)}=\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^{(x)}-i\mathbf{e}^{(y)}) \quad (7.14)$$

($\mathbf{e}^{(x,y,z)}$ — орты осей x, y, z), то

$$\mathbf{f} = \sum_\lambda(-1)^{1-\lambda}f_{-\lambda}\mathbf{e}^{(\lambda)}, \quad f_\lambda = (-1)^{1-\lambda}\mathbf{f}\mathbf{e}^{(-\lambda)*} = \mathbf{f}\mathbf{e}^{(\lambda)}. \quad (7.15)$$

Сферические компоненты шаровых векторов выражаются с помощью $3j$-символов через шаровые функции следующими формулами:

$$(-1)^{j+m+\lambda+1}\left(\mathbf{Y}^{(\text{э})}_{jm}\right)_\lambda = -\sqrt{j}\begin{pmatrix} j+1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix}Y_{j+1,m+\lambda} +$$
$$+\sqrt{j+1}\begin{pmatrix} j-1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix}Y_{j-1,m+\lambda},$$
$$(-1)^{j+m+\lambda+1}\left(\mathbf{Y}^{(\text{м})}_{jm}\right)_\lambda = -\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix}Y_{j,m+\lambda}, \quad (7.16)$$
$$(-1)^{j+m+\lambda+1}\left(\mathbf{Y}^{(\text{п})}_{jm}\right)_\lambda = \sqrt{j+1}\begin{pmatrix} j+1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix}Y_{j+1,m+\lambda} +$$
$$+\sqrt{j}\begin{pmatrix} j-1 & 1 & j \\ m+\lambda & -\lambda & -m \end{pmatrix}Y_{j-1,m+\lambda}.$$

Эти формулы выводятся следующим образом. Каждый из трех шаровых векторов имеет вид $\mathbf{Y}_{jm} = \mathbf{a}Y_{jm}$, где $\mathbf{a}$ — один из трех векторов (7.3). Поэтому

$$\mathbf{Y}_{jm} = \sum_{lm'}\langle lm'|\mathbf{a}|jm\rangle Y_{lm'},$$

и задача сводится к нахождению матричных элементов векторов $\mathbf{a}$ относительно собственных функций орбитального момента. Согласно (107.6) (см. III) имеем

$$\langle lm'|a_\lambda|jm\rangle = i(-1)^{j_{\max}-m'}\begin{pmatrix} l & 1 & j \\ -m' & \lambda & m \end{pmatrix}\langle l\|a\|j\rangle,$$

где $j_{\max}$ — большее из чисел l и j. Поэтому достаточно знать отличные от нуля приведенные матричные элементы $\langle l\|a\|j\rangle$. Для них имеются формулы:

$$\begin{aligned} \langle l-1\|n\|l\rangle &= \langle l\|n\|l-1\rangle^* = i\sqrt{l}, \\ \langle l\|\nabla_{\mathbf{n}}\|l-1\rangle &= i(l-1)\sqrt{l}, \\ \langle l-1\|\nabla_{\mathbf{n}}\|l\rangle &= i(l+1)\sqrt{l}, \\ \langle l\|[\mathbf{n}\nabla_{\mathbf{n}}]\|l\rangle &= i\sqrt{l(l+1)(2l+1)}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

§ 8. Поляризация фотона

Вектор поляризации $\mathbf{e}$ играет для фотона роль «спиновой части» волновой функции (с теми оговорками, которые были высказаны в § 6 по поводу понятия спина фотона).

Различные случаи, которые могут иметь место для поляризации фотона, ничем не отличаются от возможных типов поляризации классической электромагнитной волны (см. II, § 48).

Произвольную поляризацию $\mathbf{e}$ можно представить в виде наложения двух выбранных каким-либо определенным образом взаимно ортогональных поляризаций $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ ($\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{e}^{(2)*} = 0$). В разложении

$$\mathbf{e} = e_1\mathbf{e}^{(1)} + e_2\mathbf{e}^{(2)} \tag{8.1}$$

квадраты модулей коэффициентов e_1 и e_2 определяют вероятность того, что фотон имеет поляризацию $\mathbf{e}^{(1)}$ или $\mathbf{e}^{(2)}$.

В качестве последних можно выбрать две взаимно перпендикулярные линейные поляризации. Можно также разлагать произвольную поляризацию на две круговые с противоположными направлениями вращения. Векторы правой и левой круговой поляризации обозначим соответственно $\mathbf{e}^{(+1)}$ и $\mathbf{e}^{(-1)}$; в системе координат $\xi\eta\zeta$ с осью ζ вдоль направления фотона $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$

$$\mathbf{e}^{(+1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^{(\xi)} + i\mathbf{e}^{(\eta)}), \qquad \mathbf{e}^{(-1)} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^{(\xi)} - i\mathbf{e}^{(\eta)}). \tag{8.2}$$

Возможность двух различных поляризаций фотона (при заданном импульсе) означает, другими словами, что каждое собственное значение импульса двукратно вырождено. Это обстоятельство тесно связано с равенством массы фотона нулю.

Для свободно движущейся частицы с ненулевой массой всегда существует система покоя. Очевидно, что именно в этой системе отсчета выявляются собственные свойства симметрии частицы как таковой. При этом должна рассматриваться симметрия по отношению ко всем возможным поворотам вокруг центра

(т. е. по отношению ко всей группе сферической симметрии). Характеристикой свойств симметрии частицы по отношению к этой группе является ее спин s, определяющий кратность вырождения (число $2s+1$ преобразующихся друг через друга различных волновых функций). В частности, частице с векторной (три компоненты) волновой функцией отвечает спин 1.

Для частицы же с равной нулю массой не существует системы покоя — в любой системе отсчета она движется со скоростью света. По отношению к такой частице всегда имеется выделенное направление в пространстве — направление вектора импульса $\mathbf{k}$ (ось ζ). Ясно, что в таком случае отсутствует симметрия по отношению ко всей группе трехмерных вращений, и можно говорить лишь об аксиальной симметрии относительно выделенной оси.

При аксиальной симметрии сохраняется лишь *спиральность* частицы — проекция момента на ось ζ; обозначим ее λ [1]). Если потребовать также симметрии по отношению к отражениям в плоскостях, проходящих через ось ζ, то состояния, различающиеся знаком λ, будут взаимно вырождены; при $\lambda \neq 0$ мы будем иметь, следовательно, двукратное вырождение [2]). Состояние фотона с определенным импульсом и соответствует одному из типов таких двукратно вырожденных состояний. Оно описывается «спиновой» волновой функцией, представляющей собой вектор $\mathbf{e}$ в плоскости $\xi\eta$; две компоненты этого вектора преобразуются друг через друга при всех поворотах вокруг оси ζ и при отражениях в плоскостях, проходящих через эту ось.

Различные случаи поляризации фотона находятся в определенном соответствии с возможными значениями его спиральности. Это соответствие можно установить по формулам III, (57,9), связывающим компоненты векторной волновой функции с компонентами эквивалентного ей спинора второго ранга [3]). Проекциям $\lambda = +1$ или -1 соответствуют векторы $\mathbf{e}$ с отличной от нуля лишь компонентой $e_\xi - ie_\eta$ или $e_\xi + ie_\eta$, т. е. соответственно $\mathbf{e}=\mathbf{e}^{(+1)}$ или $\mathbf{e}=\mathbf{e}^{(-1)}$. Другими словами, значения $\lambda = +1$ и -1 соответствуют правой и левой круговой поляризации фотона (в § 16 этот же результат будет получен путем прямого вычисления собственных функций оператора проекции спина). Таким образом, проекция момента фотона на направление его движения может иметь лишь два значения (± 1); значение 0 не возможно.

---

[1]) В отличие от проекции m момента на заданное направление (ось z) в пространстве, о которой шла речь в предыдущем параграфе.

[2]) Отметим, что таким же образом классифицируются электронные термы двухатомной молекулы (см. III, § 78).

[3]) Напомним, что компонентам волновой функции как амплитудам вероятности различных значений проекции момента частицы (о которых здесь и идет речь) отвечают контравариантные компоненты спинора.

Состояние фотона с определенными импульсом и поляризацией есть чистое состояние (в смысле, разъясненном в III, § 14); оно описывается волновой функцией и соответствует полному квантовомеханическому описанию состояния частицы (фотона). Возможны также и «смешанные» состояния фотона, соответствующие менее полному описанию, осуществляемому не волновой функцией, а лишь матрицей плотности.

Рассмотрим состояние фотона, смешанное по его поляризации, но соответствующее определенному значению импульса **k**. В таком состоянии (его называют состоянием *частичной поляризации* существует «координатная» волновая функция.

Поляризационная матрица плотности фотона представляет собой тензор второго ранга $\rho_{\alpha\beta}$ в плоскости, перпендикулярной вектору **n** (плоскость $\xi\eta$; индексы α, β пробегают всего два значения). Этот тензор эрмитов:

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho^*_{\beta\alpha}, \tag{8.3}$$

и нормирован условием

$$\rho_{\alpha\alpha} = \rho_{11} + \rho_{22} = 1. \tag{8.4}$$

В силу (8.3) диагональные компоненты ρ_{11} и ρ_{22} вещественны, причем определяются одна по другой условием (8.4). Компонента же ρ_{12} комплексна, а $\rho_{21} = \rho^*_{12}$. Всего, следовательно, матрица плотности характеризуется тремя вещественными параметрами.

Если известна поляризационная матрица плотности, то можно найти вероятность того, что фотон имеет любую определенную поляризацию **e**. Эта вероятность определяется «проекцией» тензора $\rho_{\alpha\beta}$ на направление вектора **e**, т. е. величиной

$$\rho_{\alpha\beta} e^*_\alpha e_\beta. \tag{8.5}$$

Так, компоненты ρ_{11} и ρ_{22} представляют собой вероятности линейных поляризаций вдоль осей ξ и η. Проецирование на векторы (8.2) дает вероятности двух круговых поляризаций:

$$\frac{1}{2}[1 \pm i(\rho_{12} - \rho_{21})]. \tag{8.6}$$

Свойства тензора $\rho_{\alpha\beta}$ по форме и по существу совпадают со свойствами тензора $J_{\alpha\beta}$, описывающего частично поляризованный свет в классической теории (см. II, § 50). Напомним здесь некоторые из этих свойств.

В случае чистого состояния с определенной поляризацией **e** тензор $\rho_{\alpha\beta}$ сводится к произведениям компонент вектора **e**:

$$\rho_{\alpha\beta} = e_\alpha e^*_\beta. \tag{8.7}$$

При этом определитель $|\rho_{\alpha\beta} = 0|$. В обратном случае неполяризованного фотона все направления поляризации равновероятны, т. е.

$$\rho_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}/2, \tag{8.8}$$

при этом $|\rho_{\alpha\beta}| = 1/4$.

В общем случае частичную поляризацию удобно описывать с помощью трех вещественных параметров Стокса ξ_1, ξ_2, ξ_3 [1]), через которые матрица плотности выражается в виде

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}. \tag{8.9}$$

Все три параметра пробегают значения между -1 и $+1$. В неполяризованном состоянии $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$; для полностью поляризованного фотона $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$.

Параметр ξ_3 характеризует линейную поляризацию вдоль осей ξ или η; вероятность линейной поляризации фотона вдоль этих осей равна соответственно $(1+\xi_3)/2$ или $(1-\xi_3)/2$. Значения $\xi_3 = +1$ или -1 отвечают поэтому полной поляризации в этих направлениях.

Параметр ξ_1 характеризует линейную поляризацию вдоль направлений, составляющих угол $\varphi = \pi/4$ или $\varphi = -\pi/4$ с осью ξ. Вероятность линейной поляризации фотона в этих направлениях равна соответственно $(1+\xi_1)/2$ или $(1-\xi_1)/2$; в этом легко убедиться, спроецировав тензор $\rho_{\alpha\beta}$ на направления $\mathbf{e} = (1, \pm 1)/\sqrt{2}$.

Наконец, параметр ξ_2 есть степень круговой поляризации; согласно (8.6) вероятность того, что фотон имеет правую или левую круговую поляризацию, равна $(1+\xi_2)/2$ или $(1-\xi_2)/2$. Поскольку две поляризации отвечают спиральностям $\lambda = \pm 1$, то ясно, что в общем случае ξ_2 есть среднее значение спиральности фотона. Отметим также, что в случае чистого состояния с поляризацией $\mathbf{e}$

$$\xi_2 = i[\mathbf{e}\mathbf{e}^*]\mathbf{n}. \tag{8.10}$$

Напомним (см. II, § 50), что по отношению к преобразованиям Лоренца инвариантными величинами являются ξ_2 и $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2}$.

Мы встретимся также в дальнейшем с вопросом о поведении параметров Стокса по отношению к операции обращения времени. Легко видеть, что они инвариантны по отношению к этому преобразованию. Это свойство не зависит, очевидно, от природы поляризационного состояния, и потому достаточно убедиться в нем хотя бы в случае чистого состояния. Обращению времени отвечает в квантовой механике замена волновой функции ее комплексно-сопряженной (см. III, § 18). Для плоскополяризованной волны это означает замену [2])

$$\mathbf{k} \to -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{e} \to -\mathbf{e}^*. \tag{8.11}$$

---

[1]) Не смешивать обозначение параметров с обозначением оси ξ!

[2]) Дополнительное изменение знака $\mathbf{e}$ связано с тем, что обращение времени меняет знак векторного потенциала электромагнитного поля. Скалярный же потенциал не меняет знака; поэтому для 4-вектора e обращение времени есть преобразование

$$(e_0, \mathbf{e}) \to (e_0^*, -\mathbf{e}^*). \tag{8.11a}$$

При таком преобразовании симметричная часть матрицы плотности $(1/2)(e_\alpha e_\beta^* + e_\beta e_\alpha^*)$, а тем самым и параметры ξ_1 и ξ_3 не меняются. Неизменность же параметра ξ_2 при том же преобразовании видна из (8.10); она очевидна также уже из смысла ξ_2 как среднего значения спиральности. Действительно, спиральность есть проекция момента $\mathbf{j}$ на направление $\mathbf{n}$, т. е. произведение $\mathbf{jn}$; обращение же времени меняет знак обоих этих векторов.

В дальнейших вычислениях нам понадобится матрица плотности фотона, записанная в четырехмерной форме, т. е. в виде некоторого 4-тензора $\rho_{\mu\nu}$. Для поляризованного фотона, описываемого 4-вектором e_μ, этот тензор естественно определить как

$$\rho_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu^*. \tag{8.12}$$

При трехмерно поперечной калибровке $e = (0, \mathbf{e})$, если одна из пространственных осей координат выбрана вдоль $\mathbf{n}$, отличные от нуля компоненты этого 4-тензора совпадают с (8.7).

Для неполяризованного фотона трехмерно поперечной калибровке отвечает тензор $\rho_{\mu\nu}$ с компонентами

$$\rho_{ik} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k), \qquad \rho_{0i} = \rho_{i0} = \rho_{00} = 0 \tag{8.13}$$

(если одна из осей совпадает с направлением $\mathbf{n}$, мы возвращаемся к (8.8)). Непосредственно использовать тензор $\rho_{\mu\nu}$ в таком трехмерном виде, однако, неудобно. Но мы можем воспользоваться калибровочным преобразованием; для матрицы плотности это есть преобразование вида

$$\rho_{\mu\nu} \to \rho_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu, \tag{8.14}$$

где χ_μ — произвольные функции. Положив

$$\chi_0 = -1/(4\omega), \qquad \chi_i = k_i/(4\omega^2)$$

получим вместо (8.13) простое четырехмерное выражение

$$\rho_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}/2. \tag{8.15}$$

Четырехмерное представление матрицы плотности частично поляризованного фотона легко получить, переписав предварительно двумерный тензор (8.9) в трехмерном виде:

$$\rho_{ik} = (1/2)(e_i^{(1)} e_k^{(1)} + e_i^{(2)} e_k^{(2)}) + (\xi_1/2)(e_i^{(1)} e_k^{(2)} + e_i^{(2)} e_k^{(1)}) - \\ - (i\xi_2/2)(e_i^{(1)} e_k^{(2)} - e_i^{(2)} e_k^{(1)}) + (\xi_3/2)(e_i^{(1)} e_k^{(1)} - e_i^{(2)} e_k^{(2)}),$$

где $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ — единичные векторы, орты осей ξ и η. Требуемое обобщение достигается заменой этих 3-векторов пространственно-подобными единичными вещественными 4-векторами $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ортогональными друг другу и 4-импульсу фотона k:

$$e^{(1)2} = e^{(2)2} = -1, \qquad e^{(1)} e^{(2)} = 0, \qquad e^{(1)} k = e^{(2)} k = 0. \tag{8.16}$$

В трехмерно поперечной калибровке: $e^{(1)}{=}(0,\mathbf{e}^{(1)})$, $e^{(2)}{=}(0,\mathbf{e}^{(2)})$. Таким образом, четырехмерная матрица плотности фотона

$$\rho_{\mu\nu} = (1/2)(e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu + e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu) + (\xi_1/2)(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu + e^{(2)}_\mu e^{(1)}_\nu) - \\ - (i\xi_2/2)(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(1)}_\nu) + (\xi_3/2)(e^{(1)}_\mu e^{(1)}_\nu - e^{(2)}_\mu e^{(2)}_\nu). \quad (8.17)$$

Удобство того или иного фактического выбора 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ зависит от конкретных условий рассматриваемой задачи.

Надо иметь в виду, что условия (8.16) не фиксируют выбора $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ однозначным образом. Если какой-либо 4-вектор e_μ удовлетворяет этим условиям, то им же будет удовлетворять и любой 4-вектор вида $e_\mu + \chi k_\mu$ (в силу того, что $k^2 = 0$). Эта неоднозначность связана с калибровочной неоднозначностью матрицы плотности.

Первый член в (8.17) отвечает неполяризованному состоянию. Поэтому его можно было бы заменить, согласно (8.15), на $-g_{\mu\nu}/2$. Такая замена снова эквивалентна некоторому калибровочному преобразованию. При оперировании с 4-тензорами вида (8.17), разложенными по двум независимым 4-векторам, удобно применять следующий формальный прием. Записав (8.17) в виде

$$\rho_{\mu\nu} = \sum_{a,b=1}^{3} \rho^{(ab)} e^{(a)}_\mu e^{(b)}_\nu,$$

представим коэффициенты $\rho^{(ab)}$ двухрядной матрицей

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^{(11)} & \rho^{(12)} \\ \rho^{(21)} & \rho^{(22)} \end{pmatrix}.$$

Как всякую эрмитову двухрядную матрицу, ее можно разложить по четырем независимым двухрядным матрицам — матрицам Паули σ_x, σ_y, σ_z и единичной матрице 1:

$$\rho = (1/2)(1 + \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\sigma}), \qquad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (8.18)$$

в чем легко убедиться прямым сравнением с (8.17), использовав известные выражения матриц Паули (18.5) (объединение трех величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 в «вектор» $\boldsymbol{\xi}$ имеет, конечно, чисто формальный смысл, преследующий лишь цель удобства записи).

З а д а ч а

Написать матрицу плотности фотона в представлении, в котором «осями» координат являются циркулярные орты (8.2).

Р е ш е н и е. Компоненты тензора $\rho'_{\alpha\beta}$ в новых осях (α, $\beta = \pm 1$) получаются проецированием тензора (8.9) на орты (8.2):

$$\rho'_{11} = \rho_{\alpha\beta} e^{(+1)*}_\alpha e^{(+1)}_\beta, \qquad \rho'_{1-1} = \rho_{\alpha\beta} e^{(+1)*}_\alpha e^{(-1)}_\beta, \ldots,$$

$$\rho' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_2 & -\xi_3 + i\xi_1 \\ -\xi_3 - i\xi_1 & 1-\xi_2 \end{pmatrix}.$$

§ 9. Система двух фотонов

Рассуждения, аналогичные проведенным в § 6, позволяют произвести подсчет числа возможных состояний и в более сложном случае системы двух фотонов (*Л. Ландау*, 1948).

Будем рассматривать фотоны в системе их центра инерции; импульсы фотонов $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 \equiv \mathbf{k}$ [1]. Волновую функцию системы двух фотонов (в импульсном представлении) можно представить в виде трехмерного тензора второго ранга $A_{ik}(\mathbf{n})$ составленного билинейно из компонент векторных волновых функций обоих фотонов; каждый из индексов этого тензора соответствует одному из фотонов ($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$). Поперечность же каждого из фотонов выражается ортогональностью тензора A_{ik} вектору $\mathbf{n}$:

$$A_{il}n_l = 0, \qquad A_{lk}n_l = 0. \tag{9.1}$$

Взаимная перестановка фотонов означает перестановку индексов тензора A_{ik} вместе с одновременным изменением знака $\mathbf{n}$. Поскольку фотоны подчиняются статистике Бозе, то

$$A_{ik}(-\mathbf{n}) = A_{ki}(\mathbf{n}). \tag{9.2}$$

Тензор A_{ik}, вообще говоря, не симметричен по своим индексам. Разделим его на симметричную (s_{ik}) и антисимметричную (a_{ik}) части: $A_{ik} = s_{ik} + a_{ik}$. Соотношению (9.2) (а также условиям ортогональности (9.1)) должна, очевидно, удовлетворять каждая из этих частей в отдельности. Отсюда получаем

$$s_{ik}(-\mathbf{n}) = s_{ik}(\mathbf{n}), \tag{9.3}$$

$$a_{ik}(-\mathbf{n}) = -a_{ik}(\mathbf{n}). \tag{9.4}$$

Инверсия системы координат сама по себе не меняет знака компонент тензора второго ранга, но меняет знак $\mathbf{n}$. Поэтому из (9.3) видно, что волновая функция s_{ik} симметрична по отношению к инверсии, т. е. соответствует четным состояниям системы фотонов; волновая же функция a_{ik} отвечает нечетным состояниям.

Антисимметричный тензор второго ранга эквивалентен (дуален) некоторому аксиальному вектору $\mathbf{a}$, компоненты которого выражаются через компоненты тензора согласно $a_i = {}^1\!/_2 e_{ikl}a_{kl}$, где e_{ikl} — антисимметричный единичный тензор (см. II, § 6). Ортогональность тензора a_{kl} вектору $\mathbf{n}$ означает, что векторы $\mathbf{a}$ и

[1]) Такая система отсчета существует всегда, за исключением случая двух фотонов, движущихся параллельно друг другу в одну и ту же сторону. Суммарный импульс $\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2$ и суммарная энергия $\omega_1+\omega_2$ таких фотонов связаны друг с другом таким же соотношением, как и для одного фотона, и потому не существует системы отсчета, в которой было бы $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$.

$\mathbf{n}$ параллельны [1]) . Поэтому можно написать $\mathbf{a} = \mathbf{n}\varphi(\mathbf{n})$, где φ — скаляр; согласно (9.4) должно быть $\mathbf{a}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{a}(\mathbf{n})$, а потому

$$\varphi(-\mathbf{n}) = \varphi(\mathbf{n}).$$

Это равенство означает, что скаляр φ может быть линейно построен из шаровых функций только четного порядка L (включая порядок нуль).

Мы видим, что антисимметричный тензор a_{ik} по своим трансформационным (по отношению к вращениям) свойствам эквивалентен одному скаляру (ср. примеч. на с. 34). Сопоставив последнему «спин» 0, найдем, что момент состояния $J = L$. Таким образом, тензор a_{ik} соответствует нечетным состояниям системы фотонов с четным моментом J.

Обратимся к симметричному тензору s_{ik}. Поскольку он четен по отношению к изменению знака $\mathbf{n}$, ему отвечают четные состояния системы фотонов. Отсюда же следует, что все компоненты s_{ik} выражаются через шаровые функции четного порядка L (включая $L = 0$). Произвольный симметричный тензор второго ранга s_{ik} сводится, как известно, к скаляру (s_{ii}) и к симметричному тензору (s'_{ik}) с равным нулю следом ($s'_{ii} = 0$).

Скаляру s_{ii} приводится в соответствие «спин» 0, а потому момент отвечающих ему состояний $J = L$, т. е. четен. Тензору же s'_{ik} соответствует «спин» 2 (см. III, § 57). Складывая по правилу сложения моментов этот «спин» с четным «орбитальным моментом» L, находим, что при заданном четном $J \neq 0$ возможны три состояния (с $L = J \pm 2, J$), а при нечетном $J \neq 1$ — два состояния (с $L = J \pm 1$). Исключение составляет $J = 0$ с одним состоянием ($L = 2$) и $J = 1$ с одним состоянием ($L = 2$).

В этих подсчетах, однако, еще не учтено условие ортогональности тензора s_{ik} вектору $\mathbf{n}$. Поэтому из полученного числа состояний надо вычесть число состояний, которым соответствует симметричный тензор второго ранга, «параллельный» вектору $\mathbf{n}$. Такой тензор (обозначим его s''_{ik} можно представить в виде

$$s''_{ik} = n_i b_k + n_k b_i,$$

где $\mathbf{b}$ — некоторый вектор. Согласно (9.3) этот вектор должен удовлетворять условию $\mathbf{b}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{b}(\mathbf{n})$. Таким образом, ответственный за «лишние» состояния тензор s''_{ik} эквивалентен нечетному вектору. Этот вектор должен, следовательно, выражаться через шаровые функции только нечетных порядков L. Заметив

---

[1]) Имеем: $a_{ik} = e_{ikl} a_l$, и условие ортогональности дает

$$a_{ik} n_k = e_{ikl} a_l n_k = [\mathbf{na}]_i = 0.$$

также, что вектору соответствует «спин» 1, найдем, что для каждого четного момента $J \neq 0$ возможны два состояния (с $L = J \pm 1$), а для каждого нечетного J — одно состояние (с $L = J$); особый случай представляет $J = 0$ с одним состоянием ($L = 1$). Сведя вместе полученные результаты, получим следующую таблицу, указывающую число возможных четных и нечетных состояний системы из двух фотонов (с равной нулю суммой импульсов) для различных значений полного момента J:

J	Четные	Нечетные
0	1	1
1	—	—
$2k$	2	1
$2k+1$	1	—

(9.5)

(k — целое положительное число, отличное от нуля). Мы видим, что при нечетных J отсутствуют нечетные состояния, а значение $J = 1$ вообще невозможно [1]).

Волновая функция системы двух фотонов A_{ik} определяет корреляцию их поляризаций. Вероятность того, что два фотона одновременно имеют определенные поляризации $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, пропорциональна

$$A_{ik}e^*_{1i}e^*_{2k}.$$

Другими словами, если задана поляризация $\mathbf{e}_1$ одного фотона, то поляризация второго $\mathbf{e}_2$ пропорциональна

$$e_{2k} \propto A_{ik}e^*_{1i}. \tag{9.6}$$

В нечетных состояниях системы A_{ik} совпадает с антисимметричным тензором a_{ik}. При этом

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}^*_1 \propto a_{ik}e^*_{1i}e^*_{1k} = 0,$$

т. е. поляризации обоих фотонов взаимно ортогональны. В случае линейной поляризации это означает перпендикулярность их направлений, а в случае круговых поляризаций — противоположность направлений вращения.

Четное состояние с $J = 0$ описывается симметричным тензором, сводящимся к скаляру

$$s_{ik} = \text{const} \cdot (\delta_{ik} - n_i n_k).$$

Поэтому из (9.6) получим $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^*_2$. В случае линейной поляризации это означает параллельность их направлений, а в случае круговых поляризаций — снова противоположность направлений вращения. Последнее обстоятельство очевидно: при $J = 0$ во всяком случае должна быть равна нулю сумма проекций моментов фотонов на одно и то же направление $\mathbf{k}$ (проекции же на противоположные направления $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, т. е. спиральности, при этом одинаковы).

[1]) Другой способ вывода этих результатов — см. задачу 1 к § 69.

ГЛАВА II

БОЗОНЫ

§ 10. Волновое уравнение для частиц со спином 0

В гл. I было показано, каким образом можно построить квантовое описание свободного электромагнитного поля, отправляясь при этом от известных свойств поля в классическом пределе и опираясь на представления обычной квантовой механики. Полученная таким образом схема описания поля как системы фотонов несет в себе многие черты, которые переносятся и на релятивистское описание частиц в квантовой теории.

Электромагнитное поле представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Для нее не существует закона сохранения числа частиц (фотонов), и в ряду его возможных состояний имеются состояния с произвольным числом частиц [1]). Но таким же свойством должны, вообще говоря, обладать в релятивистской теории также и системы любых частиц. Сохранение числа частиц в нерелятивистской теории связано с законом сохранения массы: сумма масс (масс покоя) частиц не меняется при их взаимодействии; сохранение же суммы масс, скажем, в системе электронов означает неизменность также и их числа. В релятивистской же механике закона сохранения массы не существует; должна сохраняться лишь полная энергия системы (включающая в себя также и энергии покоя частиц). Поэтому число частиц уже не должно сохраняться и тем самым всякая релятивистская теория частиц должна быть теорией систем с бесконечным числом степеней свободы. Другими словами, такая теория частиц приобретает характер теории поля.

Адекватным математическим аппаратом для описания систем с переменным числом частиц является аппарат вторичного квантования (см. III, § 64, 65). В квантовом описании электромагнитного поля в роли оператора вторичного квантования выступает 4-потенциал $\hat{A}$. Он выражается через (координатные) волновые функции отдельных частиц (фотонов) и операторы их рождения и уничтожения. Аналогичную роль в описании системы частиц играет оператор квантованной волновой функции. Для его построения надо прежде всего знать вид волновой функции

---

[1]) Фактически, разумеется, число фотонов меняется лишь в результате различных процессов взаимодействия.

одной свободной частицы и уравнения, которому эта функция подчиняется.

Следует подчеркнуть вспомогательный характер понятия поля свободных частиц. Реальные частицы взаимодействуют, и задача теории состоит в изучении этих взаимодействий. Но всякое взаимодействие сводится к столкновению, до и после которого систему можно рассматривать как совокупность свободных частиц. В § 1 отмечалось, что это — единственно измеримые объекты. Поэтому мы пользуемся полями свободных частиц как средством описания начальных и конечных состояний.

Мы начнем релятивистское описание свободных частиц со случая частиц со спином 0. Математическая простота этого случая позволит наиболее ясно выявить основные идеи и характерные черты такого описания.

Состояние свободной частицы (без спина) может быть полностью определено заданием одного лишь ее импульса $\mathbf{p}$. При этом энергия ε частицы [1] $\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ (где m — масса частицы), или в четырехмерном виде:

$$p^2 = m^2. \tag{10.1}$$

Как известно, законы сохранения импульса и энергии связаны с однородностью пространства и времени, т. е. с симметрией по отношению к любому параллельному смещению 4-системы координат. В квантовом описании требование этой симметрии означает, что волновая функция частицы с определенным 4-импульсом при указанном преобразовании 4-координат может только умножаться на фазовый множитель (с равным единице модулем). Этому требованию удовлетворяет лишь экспоненциальная функция с линейным по 4-координатам показателем. Другими словами, волновая функция состояния свободной частицы с определенным 4-импульсом $p^\mu = (\varepsilon, \mathbf{p})$ должна быть плоской волной:

$$\text{const} \cdot e^{-ipx}, \qquad px = \varepsilon t - \mathbf{pr} \tag{10.2}$$

(выбор знака в показателе в релятивистской теории сам по себе условен: он сделан в соответствии с нерелятивистским случаем).

Волновое уравнение должно иметь функции (10.2) в качестве частных решений при произвольном 4-векторе p, удовлетворяющем условию (10.1). Оно должно быть линейным как выражение принципа суперпозиции: любая линейная комбинация функций (10.2) тоже описывает возможное состояние частицы и потому тоже должна быть решением. Наконец, оно должно быть по возможности более низкого порядка; более высокий порядок внес бы лишние решения.

[1]) Обозначим энергию отдельной частицы ε в отличие от энергии E системы частиц.

Спин есть момент частицы в системе отсчета, в которой она покоится. Если спин частицы есть s, то ее волновая функция в системе покоя является трехмерным спинором ранга $2s$. Для описания же частицы в произвольной системе отсчета ее волновая функция должна быть выражена в виде четырехмерных величин.

Частица со спином 0 описывается в системе покоя трехмерным скаляром. Такой скаляр, однако, может иметь различное четырехмерное «происхождение»: это может быть четырехмерный скаляр ψ, но может быть и четвертая компонента 4-вектора ψ_μ (времениподобного), у которого в системе покоя отлична от нуля лишь составляющая ψ_0 [1]).

Для свободной частицы единственный оператор, который может войти в волновое уравнение, — это оператор 4-импульса $\widehat{p}$. Его компонентами являются операторы дифференцирования по координатам и времени:

$$\widehat{p}^\mu = i\partial^\mu = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\boldsymbol{\nabla}\right). \tag{10.3}$$

Волновое уравнение должно представлять собой дифференциальную связь между величинами ψ и ψ_μ, осуществляемую с помощью оператора $\widehat{p}$. Эта связь должна, разумеется, выражаться релятивистски инвариантными соотношениями. Таковыми являются

$$m\psi_\mu = \widehat{p}_\mu\psi, \qquad \widehat{p}^\mu\psi_\mu = m\psi, \tag{10.4}$$

где m — размерная постоянная, характеризующая частицу [2]).

Подставив ψ_μ из первого уравнения во второе, получим

$$(\widehat{p}^2 - m^2)\psi = 0 \tag{10.5}$$

(*O. Klein*, *В. А. Фок*, 1926; *W. Gordon*, 1927). В раскрытом виде это уравнение записывается как

$$-\partial_\mu\partial^\mu\psi \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial^2 t} + \Delta\right)\psi = m^2\psi. \tag{10.6}$$

Подставив в него ψ в виде плоской волны (10.2), получим $p^2 = m^2$, откуда видно, что m — масса частицы. Отметим, что вид уравнения (10.5), конечно, заранее ясен из того, что $\widehat{p}^2$ — единственный скалярный оператор, который можно составить с помощью $\widehat{p}$ (по этой причине такому же уравнению удовлетворяет

[1]) Либо, аналогичным образом, временна́я компонента 4-тензора более высокого ранга; этот случай, однако, привел бы к уравнениям более высокого порядка.

[2]) Постоянные m введены в (10.4) так, что ψ_μ и ψ имеют одинаковую размерность. Вводить в этих двух уравнениях различные постоянные m_1 и m_2 было бы бессмысленно, так как их всегда можно было бы сделать одинаковыми путем переопределения ψ или ψ_μ.

каждая из компонент волновой функции частицы с любым спином — это мы неоднократно увидим в дальнейшем).

Таким образом, частица со спином 0 описывается по существу всего одним (четырехмерным) скаляром ψ, подчиняющимся уравнению второго порядка (10.5). В уравнениях же первого порядка (10.4) роль волновой функции играет совокупность величин ψ и ψ_μ, причем 4-вектор ψ_μ сводится к 4-градиенту скаляра ψ. В системе покоя волновая функция частицы не зависит от координат (пространственных) и поэтому пространственные компоненты 4-вектора ψ_μ обращаются, как и должно быть, в нуль.

Для проведения вторичного квантования полезно выразить энергию и импульс частицы в виде интегралов по пространству от некоторых билинейных (по ψ и ψ^*) комбинаций, представляющих собой как бы пространственную плотность этих величин. Другими словами, надо найти тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, соответствующий уравнению (10.5). С помощью этого тензора закон сохранения энергии и импульса выражается уравнением

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0. \tag{10.7}$$

Согласно общим правилам теории поля (см. II, § 32), напишем вариационный принцип, следствием которого являлось бы уравнение (10.5). Такой принцип должен заключаться в требовании минимальности «интеграла действия»

$$S = \int L\, d^4x \tag{10.8}$$

от некоторого вещественного 4-скаляра L — плотности лагранжевой функции поля [1]) . С помощью скаляра ψ (и оператора ∂^μ) можно составить вещественное билинейное скалярное выражение вида

$$L = \partial_\mu\psi^* \cdot \partial^\mu\psi - m^2\psi^*\psi, \tag{10.9}$$

где m — размерная постоянная. Рассматривая ψ и ψ^* как независимые переменные, описывающие поле («обобщенные координаты» поля q), легко видеть, что уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} = \frac{\partial L}{\partial q} \tag{10.10}$$

($q_{,\mu} \equiv \partial_\mu q$) действительно совпадают с уравнениями (10.5) для ψ и ψ^*, причем m — масса частицы. Отметим также, что выражение (10.9) написано с таким общим знаком, чтобы квадрат

---

[1]) Соответствующий вторично квантованный оператор $\widehat{L}$ называют *лагранжианом* поля. Для упрощения терминологии будем пользоваться этим термином как для «квантованной», так и для «неквантованной» плотности лагранжевой функции.

производной по времени, $|\partial\psi/\partial t|^2$, входил в L со знаком плюс; в противном случае действие не могло бы иметь минимума (ср. II, § 27). Выбор же общего числового коэффициента в L условен (и отражается лишь на нормировочном коэффициенте в ψ).

Тензор энергии-импульса вычисляется теперь по формуле

$$T_\mu^\nu = \sum q_{,\mu}\frac{\partial L}{\partial q_{,\mu}} - L\delta_\mu^\nu \tag{10.11}$$

(суммирование по всем q). Подставив (10.9), получим

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\psi^* \cdot \partial_\nu\psi + \partial_\nu\psi^* \cdot \partial_\mu\psi - Lg_{\mu\nu} \tag{10.12}$$

(эти величины, как и следовало, вещественны, что обеспечивается вещественностью L). В частности,

$$T_{00} = 2\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - L = \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + m^2\psi^*\psi, \tag{10.13}$$

$$T_{i0} = \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{10.14}$$

4-импульс поля дается интегралом

$$P_\mu = \int T_{\mu 0}\, d^3x, \tag{10.15}$$

т. е. T_{00} и T_{i0} играют роль плотности энергии и импульса. Отметим, что величина T_{00} существенно положительна.

Формулой (10.13) можно воспользоваться для нормировки волновой функции. Плоская волна, нормированная на одну частицу в объеме $V = 1$, запишется в виде

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{-ipx}. \tag{10.16}$$

Действительно, для этой функции $T_{00} = \varepsilon$, так что полная энергия в объеме $V = 1$ совпадает с энергией одной частицы.

Момент импульса, сохранение которого связано с изотропией пространства, тоже может быть выражен в виде пространственного интеграла; однако такое представление момента нам в дальнейшем не понадобится.

Наконец, помимо законов сохранения, связанных непосредственно с пространственно-временной симметрией, уравнения (10.4) допускают еще один закон сохранения. Действительно, легко убедиться, что в силу (10.4) (и таких же уравнений для ψ^*) имеет место уравнение

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{10.17}$$

где

$$j_\mu = m(\psi^*\psi_\mu + \psi_\mu^*\psi) = i[\psi^*\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\psi^*)\psi]. \tag{10.18}$$

Отсюда видно, что j^μ играет роль 4-вектора плотности тока. При этом (10.17) есть уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения величины

$$Q = \int j_0 d^3 x, \tag{10.19}$$

где

$$j_0 = j^0 = i\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right). \tag{10.20}$$

Обратим внимание на то, что j_0 — не положительно определенная величина. Уже это обстоятельство показывает, что в общем случае ее заведомо нельзя интерпретировать как плотность вероятности пространственной локализации частицы. Смысл выражаемого уравнением (10.17) закона сохранения выяснится в следующем параграфе.

§ 11. Частицы и античастицы

Следуя общим правилам проведения вторичного квантования, мы должны рассмотреть разложение произвольной волновой функции по собственным функциям полного набора возможных состояний свободной частицы, например по плоским волнам ψ_p:

$$\psi = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \psi_p, \qquad \psi^* = \sum_{\mathbf{p}} a^*_{\mathbf{p}} \psi^*_p.$$

После этого коэффициенты $a_{\mathbf{p}}$, $a^*_{\mathbf{p}}$ надо было бы понимать как операторы $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$, $\widehat{a}^+{}_{\mathbf{p}}$ уничтожения и рождения частиц в соответствующих состояниях [1]).

При этом, однако, мы сразу сталкиваемся со следующим новым (по сравнению с нерелятивистской теорией) принципиальным обстоятельством. В плоской волне, являющейся решением уравнения (10.5), энергия ε должна удовлетворять (при заданном импульсе $\mathbf{p}$) лишь условию $\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$, т. е. может иметь два значения: $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Физическим же смыслом энергии свободной частицы могут, однако, обладать лишь положительные значения ε. Между тем просто опустить отрицательные значения недопустимо: общее решение волнового уравнения образует лишь суперпозиция всех его независимых частных решений. Это обстоятельство указывает на необходимость некоторого из-

---

[1]) Снабжаем ψ-функции индексом 4-импульса p, в дальнейшем функции с «отрицательной частотой» будем обозначать через ψ_{-p}. Операторы же $\widehat{a}$, $\widehat{a}^+$ снабжаем индексом трехмерного импульса $\mathbf{p}$, полностью определяющего состояние реальной частицы.

менения истолкования коэффициентов разложения ψ и ψ^* при вторичном квантовании.

Напишем это разложение в виде

$$\psi = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} a_{\mathbf{p}}^{(+)} e^{i(\mathbf{pr}-\varepsilon t)} + \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} a_{\mathbf{p}}^{(-)} e^{i(\mathbf{pr}+\varepsilon t)}, \tag{11.1}$$

где в первой сумме стоят нормированные согласно (10.16) плоские волны с положительными, а во второй — с отрицательными «частотами»; ε везде обозначает положительную величину: $\varepsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. При вторичном квантовании коэффициенты $a_{\mathbf{p}}^{(+)}$ в первой сумме заменяем обычным образом операторами $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$ уничтожения частиц. Во второй же сумме замечаем, что при дальнейшем образовании матричных элементов временная зависимость ее слагаемых будет соответствовать не уничтожению, а рождению частиц; множитель $e^{i\varepsilon t} = (e^{-i\varepsilon t})^*$ отвечает одной лишней частице с энергией ε в конечном состоянии (ср. конец § 2). Соответственно этому коэффициенты $a_{\mathbf{p}}^{(-)}$ заменяем операторами $\widehat{b}_{-\mathbf{p}}^{+}$ рождения некоторых других частиц. Заменив также во второй сумме в (11.1) обозначение переменной суммирования $\mathbf{p}$ на $-\mathbf{p}$ (чтобы экспоненциальный множитель приобрел вид $e^{-i(\mathbf{pr}-\varepsilon t)}$ получим ψ-операторы в виде

$$\widehat{\psi} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (\widehat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \widehat{b}_{\mathbf{p}}^{+} e^{ipx}), \quad \widehat{\psi}^{+} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (\widehat{a}_{\mathbf{p}}^{+} e^{ipx} + \widehat{b}_{\mathbf{p}} e^{-ipx}). \tag{11.2}$$

Таким образом, все операторы $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$, $\widehat{b}_{\mathbf{p}}$ оказываются умноженными на функции с «правильной» зависимостью от времени $\left(\sim e^{-i\varepsilon t}\right)$, а операторы $\widehat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$, $\widehat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$ — на комплексно-сопряженные им функции. Это и дает возможность истолковать, в соответствии с общими правилами, операторы $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$, $\widehat{b}_{\mathbf{p}}$ как операторы уничтожения, а $\widehat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$, $\widehat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$ — как операторы рождения частиц с импульсами $\mathbf{p}$ и энергиями ε.

Мы приходим к представлению о частицах двух родов, выступающих совместно и равноправно. О них говорят как о *частицах* и *античастицах* (смысл такого названия выяснится ниже). Одним из них отвечают в аппарате вторичного квантования операторы $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$, $\widehat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$, а другим — $\widehat{b}_{\mathbf{p}}$, $\widehat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$. Оба вида частиц, операторы которых входят в один и тот же ψ-оператор, тем самым имеют одинаковые массы.

К этим результатам можно прийти и исходя из прямых требований релятивистской инвариантности.

Преобразования Лоренца представляют собой в математическом смысле повороты четырехмерной системы координат, меняющие направление оси времени (вместе с чисто пространственными поворотами, не затрагивающими оси времени, они составляют группу преобразований, которую называют *группой Лоренца* [1])). Все эти преобразования обладают тем общим свойством, что они не выводят ось t за пределы соответствующей полости светового конуса, чем и выражается физический принцип — существование предельной скорости распространения сигналов.

Но в чисто математическом отношении поворотом является также и одновременное изменение знака всех четырех координат (*четырехмерная инверсия*): определитель этого преобразования равен $+1$, как и определители всякого другого поворотного преобразования. При этом ось времени переводится из одной полости светового конуса в другую. Хотя это обстоятельство и означает физическую неосуществимость такого преобразования (как преобразования системы отсчета), но в математическом отношении отличие сводится лишь к тому, что (в силу псевдоевклидовости метрики) такой поворот не может быть произведен без того, чтобы не допустить попутно комплексное преобразование координат.

Естественно полагать, что это отличие должно быть несущественно, когда речь идет о четырехмерной инвариантности. Тогда всякое выражение, инвариантное по отношению к преобразованиям Лоренца, должно быть инвариантно и по отношению к 4-инверсии. Точная формулировка этого требования в применении к скалярному ψ-оператору будет дана в § 13. Но сразу же отметим, что оно во всяком случае приводит к необходимости одновременного присутствия в ψ-операторах членов с обоими знаками перед ε в показателях, поскольку замена $t \to -t$ как раз меняет этот знак.

Вернемся к выражениям (11.2) и установим перестановочные соотношения между операторами $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}}$, (и $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}$). В случае фотонов это было сделано (для операторов $\hat{c}_{\mathbf{p}}$, $\hat{c}^{+}_{\mathbf{p}}$) исходя из аналогии с осцилляторами, т. е. по существу из свойств электромагнитного поля в классическом пределе. Теперь такой аналогии нет. Для установления правил коммутации (Бозе или Ферми) между операторами мы можем руководствоваться лишь видом построенного из этих операторов гамильтониана.

---

[1]) Отметим, что совокупность всех трехмерных (пространственных) поворотов составляет сама по себе группу, входящую в группу Лоренца в качестве подгруппы. Совокупность же преобразований Лоренца сама по себе не составляет группы: результат последовательных преобразований Лоренца может сводиться к чисто пространственному повороту.

Последний получается (см. III, § 64) подстановкой $\widehat{\psi}$ и $\widehat{\psi}^+$ вместо ψ и ψ^* в интеграл $\int T_{00}\, d^3x$ [1]). Таким образом найдем

$$\widehat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\widehat{a}^+_{\mathbf{p}}\widehat{a}_{\mathbf{p}} + \widehat{b}_{\mathbf{p}}\widehat{b}^+_{\mathbf{p}}). \tag{11.3}$$

Легко видеть, что разумный результат для собственных значений этого гамильтониана получается, лишь если операторы удовлетворяют правилам коммутации Бозе:

$$\left\{\widehat{a}_{\mathbf{p}},\quad \widehat{a}^+_{\mathbf{p}}\right\}_- = \left\{\widehat{b}_{\mathbf{p}},\quad \widehat{b}^+_{\mathbf{p}}\right\}_- \tag{11.4}$$

(все другие пары операторов коммутативны; в том числе коммутативны все операторы частиц $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$, $\widehat{a}^+_{\mathbf{p}}$ со всеми операторами античастиц $\widehat{b}_{\mathbf{p}}$, $\widehat{b}^+_{\mathbf{p}}$). Действительно, в таком случае

$$\widehat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\widehat{a}^+_{\mathbf{p}}\widehat{a}_{\mathbf{p}} + \widehat{b}^+_{\mathbf{p}}\widehat{b}_{\mathbf{p}} + 1).$$

Собственные значения произведений $\widehat{a}^+_{\mathbf{p}}\widehat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\widehat{b}^+_{\mathbf{p}}\widehat{b}_{\mathbf{p}}$ равны положительным целым числам $N_{\mathbf{p}}$ и $\overline{N}_{\mathbf{p}}$ — числам частиц и античастиц. Бесконечную же аддитивную постоянную $\sum \varepsilon$ («энергия вакуума») можно снова просто опустить:

$$E = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(N_{\mathbf{p}} + \overline{N}_{\mathbf{p}}) \tag{11.5}$$

(ср. формулу (3.1) и примечание к ней). Это выражение существенно положительно и соответствует представлению о двух родах реально существующих частиц. Аналогичным образом для полного импульса системы частиц получим

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p}(N_{\mathbf{p}} + \overline{N}_{\mathbf{p}}). \tag{11.6}$$

Если бы мы приняли вместо (11.4) перестановочные соотношения Ферми (антикоммутаторы вместо коммутаторов), то получили бы

$$\widehat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\widehat{a}^+_{\mathbf{p}}\widehat{a}_{\mathbf{p}} - \widehat{b}^+_{\mathbf{p}}\widehat{b}_{\mathbf{p}} + 1)$$

и вместо формулы (11.5) — физически бессмысленное выражение $\sum \varepsilon(N_{\mathbf{p}} - \overline{N}_{\mathbf{p}})$. Это выражение не является положительно

[1]) В нерелятивистской теории при этом полагается писать сопряженный оператор $\widehat{\psi}^+$ слева от ψ. Здесь же порядок безразличен, так как перестановка $\widehat{\psi}^+$ и $\widehat{\psi}$ привела бы лишь к перестановке равноправных операторов $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\widehat{b}_{\mathbf{p}}$. Необходимо, однако, выбрав тот или иной порядок, всегда придерживаться одного правила.

определенным и поэтому не может представлять собой энергию системы свободных частиц.

Таким образом, частицы со спином 0 являются бозонами.

Далее, рассмотрим интеграл Q (10.19). Заменив в j^0 функций ψ и ψ^* операторами $\widehat{\psi}$ и $\widehat{\psi}^+$ и произведя интегрирование, получим

$$\widehat{Q} = \sum_{\mathbf{p}} (\widehat{a}^+_{\mathbf{p}} \widehat{a}_{\mathbf{p}} - \widehat{b}_{\mathbf{p}} \widehat{b}^+_{\mathbf{p}}) = \sum_{\mathbf{p}} (\widehat{a}^+_{\mathbf{p}} \widehat{a}_{\mathbf{p}} - \widehat{b}^+_{\mathbf{p}} \widehat{b}_{\mathbf{p}} - 1). \qquad (11.7)$$

Собственные значения этого оператора (за вычетом несущественной аддитивной постоянной $\sum 1$):

$$Q = \sum_{\mathbf{p}} (N_{\mathbf{p}} - \overline{N}_{\mathbf{p}}), \qquad (11.8)$$

т. е. равны разностям полных чисел частиц и античастиц.

До тех пор, пока мы рассматриваем свободные частицы, отвлекаясь от всякого взаимодействия между ними, смысл закона сохранения величины Q (как, впрочем, и законов сохранения полных энергии и импульса (11.5, 11.6)) остается, разумеется, в значительной степени условным: сохраняется в действительности не только эта сумма, но и каждое из чисел $N_{\mathbf{p}}$, $\overline{N}_{\mathbf{p}}$ в отдельности. Будет ли сохраняться величина Q в результате взаимодействия, зависит от характера взаимодействия. Если Q сохраняется (т. е. если оператор $\widehat{Q}$ коммутирует с гамильтонианом взаимодействия), то выражение (11.8) показывает, какое этот закон вносит ограничение на возможные изменения числа частиц: могут возникать и исчезать лишь пары «частица+античастица».

Если частица электрически заряжена, то ее античастица должна иметь заряд противоположного знака: если бы та и другая имели одинаковые заряды, то возникновение или уничтожение их пары противоречило бы строгому закону природы — сохранению полного электрического заряда. Мы увидим ниже (§ 32), каким образом эта противоположность зарядов (при взаимодействии частиц с электромагнитным полем) возникает в теории автоматически.

Величину Q иногда называют *зарядом* поля данных частиц. Для электрически заряженных частиц Q определяет, в частности, полный электрический заряд системы (в единицах элементарного заряда e). Подчеркнем, однако, что частицы и античастицы могут быть электрически нейтральны.

Таким образом, мы видим, как характер релятивистской зависимости энергии от импульса (двузначность корня уравнения $\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$) совместно с требованиями релятивистской инвариантности приводит в квантовой теории к появлению нового классификационного принципа для частиц—возможности существования пар различных частиц («частица + античастица»),

находящихся в описанном выше соответствии друг с другом. Это замечательное предсказание было впервые сделано (для частиц со спином 1/2) *Дираком* в 1930 г., еще до фактического открытия первой античастицы — позитрона [1]).

§ 12. Истинно нейтральные частицы

При проведении вторичного квантования ψ-функции (11.1) коэффициенты $a_{\mathbf{p}}^{(+)}$ и $a_{\mathbf{p}}^{(-)}$ рассматривались как операторы, относящиеся к различным частицам. Это, однако, не обязательно: как частный случай входящие в $\widehat{\psi}$ операторы уничтожения и рождения могут относиться к одним и тем же частицам (как это было для фотонов — ср. (2.17)). Обозначив в этом случае указанные операторы как $\widehat{c}_{\mathbf{p}}$ и $\widehat{c}_{\mathbf{p}}^{+}$, напишем ψ-оператор в виде

$$\widehat{\psi} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(\widehat{c}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \widehat{c}_{\mathbf{p}}^{+} e^{ipx}). \tag{12.1}$$

Описываемое таким оператором поле соответствует системе одинаковых частиц, о которых можно сказать, что они «совпадают со своими античастицами».

Оператор (12.1) эрмитов ($\widehat{\psi}^{+} = \widehat{\psi}$); в этом смысле такое поле имеет вдвое меньше «степеней свободы», чем комплексное поле, для которого операторы $\widehat{\psi}$ и $\widehat{\psi}^{+}$ не совпадают.

В связи с этим лагранжиан поля, выраженный через эрмитов оператор $\widehat{\psi}$, должен содержать лишний (по сравнению с (10.9)) множитель 1/2 [2])

$$\widehat{L} = (1/2)(\partial_\mu \widehat{\psi} \cdot \partial^\mu \widehat{\psi} - m^2 \widehat{\psi}^2). \tag{12.2}$$

Соответствующий тензор энергии-импульса

$$\widehat{T}_{\mu\nu} = \partial_\mu \widehat{\psi} \cdot \partial_\nu \widehat{\psi} - \widehat{L} g_{\mu\nu}, \tag{12.3}$$

так что оператор плотности энергии

$$\widehat{T}_{00} = \left(\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial t}\right)^2 - \widehat{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial t}\right)^2 + (\nabla \widehat{\psi})^2 + m^2 \widehat{\psi}^2\right]. \tag{12.4}$$

---

[1]) На бозоны понятие античастиц было распространено *Вайскопфом* и *Паули* (*V. Weisskopf*, *W. Pauli*, 1934).

[2]) Подобно лишнему множителю 1/2 в операторе (2.10) плотности энергии электромагнитного поля (выраженного через эрмитовы операторы $\widehat{E}$ и $\widehat{H}$), по сравнению с плотностью энергии фотона (3.2), выраженной через его комплексную волновую функцию; ср. примеч. на с. 26.

Подставив (12.1) в интеграл $\int \widehat{T}_{00}\, d^3x$, получим гамильтониан поля

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{p}} \varepsilon(\widehat{c}^{+}_{\mathbf{p}}\widehat{c}_{\mathbf{p}} + \widehat{c}_{\mathbf{p}}\widehat{c}^{+}_{\mathbf{p}}). \tag{12.5}$$

Отсюда снова видна необходимость квантования по Бозе:

$$\{\widehat{c}_{\mathbf{p}}, \widehat{c}^{+}_{\mathbf{p}}\}_{-} = 1, \tag{12.6}$$

и собственные значения энергии (снова за вычетом аддитивной постоянной)

$$E = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}}. \tag{12.7}$$

При квантовании же по Ферми мы получили бы бессмысленный результат — не зависящее от $N_{\mathbf{p}}$ значение E.

«Заряд» Q рассматриваемого поля равен нулю. Это ясно уже из того, что заряд Q должен менять знак при замене частиц античастицами, а в данном случае те и другие совпадают. В связи с этим не существует и 4-вектора плотности тока. Действительно, выражение

$$\widehat{j}_{\mu} = i[\widehat{\psi}^{+}\partial_{\mu}\widehat{\psi} - (\partial_{\mu}\widehat{\psi}^{+})\widehat{\psi}] \tag{12.8}$$

для оператора сохраняющегося 4-вектора $\widehat{j}$ при $\widehat{\psi} = \widehat{\psi}^{+}$ обращается в нуль (вектор же $\widehat{\psi}\partial_{\mu}\widehat{\psi}$ сам по себе не сохраняется). Это в свою очередь означает отсутствие какого-либо особого закона сохранения, который бы ограничивал возможные изменения числа частиц. Очевидно, что такие частицы, во всяком случае, электрически нейтральны.

Частицы такого рода называют *истинно нейтральными*, в отличие от электрически нейтральных частиц, имеющих античастицу. В то время как последние могут аннигилировать (превращаясь в фотоны) лишь парами, истинно нейтральные частицы могут аннигилировать поодиночке.

Структура ψ-оператора (12.1) — такая же, как структура операторов (2.17)–(2.20) электромагнитного поля. В этом смысле можно сказать, что и сами фотоны — истинно нейтральные частицы. В случае электромагнитного поля эрмитовость операторов была связана с вещественностью напряженностей поля как измеримых (в классическом пределе) физических величин. В случае же ψ-операторов частиц такой связи не существует, поскольку им вообще не соответствуют какие-либо непосредственно измеримые величины.

Отсутствие сохраняющегося 4-вектора тока есть общее свойство истинно нейтральных частиц и не связано с равным нулю спином (так, оно имеет место и для фотонов). Физически оно

выражает отсутствие соответствующих запретов для изменения числа частиц. С формальной же точки зрения существует прямая связь между отсутствием сохраняющегося тока и вещественностью поля — эрмитовостью оператора $\widehat{\psi}$.

Лагранжиан комплексного поля

$$\widehat{L} = \partial_\mu \widehat{\psi}^+ \cdot \partial^\mu \widehat{\psi} - m^2 \widehat{\psi}^+ \widehat{\psi} \tag{12.9}$$

инвариантен по отношению к умножению ψ-оператора на произвольный фазовый множитель, т. е. по отношению к преобразованиям

$$\widehat{\psi} \to e^{i\alpha} \widehat{\psi}, \qquad \widehat{\psi}^+ \to e^{-i\alpha} \widehat{\psi}^+ \tag{12.10}$$

(их называют *калибровочными*). В частности, лагранжиан не меняется при бесконечно малом калибровочном преобразовании

$$\widehat{\psi} \to \widehat{\psi} + i\delta\alpha \cdot \widehat{\psi}, \qquad \widehat{\psi}^+ \to \widehat{\psi}^+ - i\delta\alpha \cdot \widehat{\psi}^+. \tag{12.11}$$

При бесконечно малом изменении «обобщенных координат» q лагранжиан испытывает изменение

$$\delta \widehat{L} = \sum \left(\frac{\partial \widehat{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \widehat{L}}{\partial q_{,\mu}} \right) =$$

$$= \sum \left(\frac{\partial \widehat{L}}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \widehat{L}}{\partial q_{,\mu}} \right) \delta q + \sum \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \widehat{L}}{\partial q_{,\mu}} \delta q \right)$$

(суммирование по всем q). Первый член обращается в нуль в силу «уравнений движения» (уравнений Лагранжа). Понимая под «координатами» q операторы $\widehat{\psi}$ и $\widehat{\psi}^+$ и положив

$$\delta \widehat{\psi} = i\delta\alpha \cdot \widehat{\psi}, \quad \delta \widehat{\psi}^+ = -i\delta\alpha \cdot \widehat{\psi}^+,$$

получим

$$\delta \widehat{L} = i\delta\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\widehat{\psi} \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \widehat{\psi}_{,\mu}} - \widehat{\psi}^+ \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \widehat{\psi}^+{}_{,\mu}} \right).$$

Отсюда видно, что условие неизменности лагранжиана ($\delta \widehat{L} = 0$) эквивалентно уравнению непрерывности ($\partial_\mu \widehat{j}^\mu = 0$) для 4-вектора

$$\widehat{j}^\mu = i \left(\widehat{\psi}^+ \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \widehat{\psi}^+_{,\mu}} - \widehat{\psi} \frac{\partial \widehat{L}}{\partial \widehat{\psi}_{,\mu}} \right). \tag{12.12}$$

Легко убедиться, что для лагранжиана (12.9) эта формула приводит к току (12.8).

Таким образом, в математическом формализме теории существование сохраняющегося тока оказывается связанным с инвариантностью лагранжиана по отношению к калибровочным преобразованиям (*W. Pauli*, 1941). Лагранжиан же истинно нейтрального поля (12.2) этой симметрией не обладает.

§ 13. Преобразования *C*, *P*, *T*

В противоположность 4-инверсии трехмерная (пространственная) инверсия не сводима к каким-либо поворотам 4-системы координат: определитель этого преобразования равен не $+1$, а -1. Свойства симметрии частиц по отношению к инверсии (P-преобразование) не предопределяются поэтому соображениями релятивистской инвариантности [1].

В применении к скалярной волновой функции операция инверсии заключается в преобразовании

$$\widehat{P}\psi(t, \mathbf{r}) = \pm\psi(t, -\mathbf{r}), \tag{13.1}$$

где знак «+» или «−» в правой стороне отвечает соответственно истинному скаляру или псевдоскаляру.

Отсюда видно, что надо различать два аспекта поведения волновой функции при инверсии. Один из них связан с зависимостью волновой функции от координат. В нерелятивистской квантовой механике рассматривался только этот вопрос, — он приводит к понятию четности состояния (которую мы будем называть теперь *орбитальной четностью*), характеризующей свойства симметрии движения частицы. Если состояние обладает определенной орбитальной четностью ($+1$ или -1), то это значит, что

$$\psi(t, -\mathbf{r}) = \pm\psi(t, \mathbf{r}).$$

Другой аспект — поведение (при инверсии координатных осей) волновой функции в данной точке (которую удобно представлять себе как начало координат). Оно приводит к понятию *внутренней четности частицы*. Внутренней четности $+1$ или -1 отвечают (для частицы со спином 0) два знака в определении (13.1). Полная четность системы частиц дается произведением их внутренних четностей и орбитальной четности относительного движения.

«Внутренние» свойства симметрии различных частиц проявляются, разумеется, лишь в процессах их взаимных превращений. Аналогом внутренней четности в нерелятивистской квантовой механике является четность связанного состояния сложной системы (например, ядра). С точки зрения релятивистской теории, не делающей принципиального различия между составными и элементарными частицами, такая внутренняя четность не отличается от внутренней четности частиц, фигурирующих в

[1]) Группу Лоренца, дополненную пространственной инверсией, называют *расширенной группой Лоренца* (в отличие от исходной группы, не содержащей P, которую в этой связи называют *собственной*). Расширенная группа содержит все преобразования, не выводящие ось t из соответствующих полостей светового конуса.

нерелятивистской теории в качестве элементарных. В нерелятивистской области, где последние ведут себя как неизменяемые, их внутренние свойства симметрии не наблюдаемы, и поэтому их рассмотрение было бы лишено физического смысла.

В аппарате вторичного квантования внутренняя четность выражается поведением ψ-операторов при инверсии. Скалярному и псевдоскалярному полям отвечают законы преобразования

$$P : \widehat{\psi}(t, \mathbf{r}) \to \pm\widehat{\psi}(t, -\mathbf{r}). \tag{13.2}$$

Самый же смысл воздействия инверсии на ψ-оператор должен быть сформулирован в виде определенного преобразования операторов уничтожения и рождения частиц — такого, чтобы в его результате возникало изменение (13.2). Легко видеть, что таковым является

$$P : \widehat{a}_{\mathbf{p}} \to \pm\widehat{a}_{-\mathbf{p}}, \quad \widehat{b}_{\mathbf{p}} \to \pm\widehat{b}_{-\mathbf{p}} \tag{13.3}$$

(и то же самое для сопряженных операторов). Действительно, произведя эту замену в операторе:

$$\widehat{\psi}(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\widehat{a}_{\mathbf{p}} e^{-i\omega t + i\mathbf{pr}} + \widehat{b}^{+}_{\mathbf{p}} e^{i\omega t - i\mathbf{pr}} \right) \tag{13.4}$$

и переобозначив затем переменную суммирования ($\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$), мы приведем его к виду $\pm\widehat{\psi}(t, -\mathbf{r})$. Таким образом, если обозначить через $\widehat{\psi}^P(t, \mathbf{r})$ оператор, в котором произведено преобразование (13.3), то можно написать равенство

$$\widehat{\psi}^P(t, \mathbf{r}) = \pm\widehat{\psi}(t, -\mathbf{r}). \tag{13.5}$$

Отметим, что преобразование (13.3) имеет вполне естественный вид: инверсия меняет знак полярного вектора $\mathbf{p}$, так что частицы с импульсом $\mathbf{p}$ заменяются частицами с импульсом $-\mathbf{p}$.

В (13.3) операторы $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\widehat{b}_{\mathbf{p}}$ преобразуются либо оба с верхними, либо оба с нижними знаками. В аппарате вторичного квантования это является выражением одинаковости внутренних четностей частицы и античастицы (со спином 0). Сама же по себе эта одинаковость очевидна уже из того, что частицы и античастицы (со спином 0) описываются одними и теми же (скалярными или псевдоскалярными) волновыми функциями.

В релятивистской теории возникает также симметрия по отношению к преобразованию, не имеющему аналога в нерелятивистской теории; его называют *зарядовым сопряжением* (C-преобразование). Если взаимно переставить все операторы $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\widehat{b}_{\mathbf{p}}$:

$$C : \widehat{a}_{\mathbf{p}} \to \widehat{b}_{\mathbf{p}}, \quad \widehat{b}_{\mathbf{p}} \to \widehat{a}_{\mathbf{p}} \tag{13.6}$$

(т. е. взаимно заменить частицы античастицами), то $\widehat{\psi}$ перейдет в «зарядово-сопряженный» оператор $\widehat{\psi}^C$с, причем

$$\widehat{\psi}^C(t, \mathbf{r}) = \widehat{\psi}^+(t, \mathbf{r}) \tag{13.7}$$

Это равенство выражает симметрию, с которой входят в теорию понятия частиц и античастиц.

Отметим, что в определении преобразования зарядового сопряжения содержится некоторый несущественный формальный произвол. Смысл преобразования не изменится, если ввести в определение (13.6) произвольный фазовый множитель:

$$\widehat{a}_{\mathbf{p}} \to e^{i\alpha}\widehat{b}_{\mathbf{p}}, \quad \widehat{b}_{\mathbf{p}} \to e^{-i\alpha}\widehat{a}_{\mathbf{p}}.$$

Тогда было бы

$$\widehat{\psi} \to e^{i\alpha}\widehat{\psi}^+, \quad \widehat{\psi}^+ \to e^{-i\alpha}\widehat{\psi},$$

а двукратное повторение этого преобразования по-прежнему приводило бы к тождеству ($\widehat{\psi} \to \widehat{\psi}$). Все такие определения, однако, эквивалентны друг другу. Поскольку свойства ψ-операторов не меняются при умножении на фазовый множитель (ср. конец предыдущего параграфа), можно просто переобозначить $\widehat{\psi}$ на $\widehat{\psi}e^{i\alpha/2}$, после чего вернуться к определению зарядового сопряжения в виде (13.6),(13.7).

Поскольку зарядовое сопряжение заменяет частицу нетождественной ей античастицей, оно не приводит в общем случае к возникновению какой-либо новой характеристики частицы или системы частиц как таковых.

Исключение в этом смысле составляют системы, состоящие из равного числа частиц и античастиц. Оператор $\widehat{\mathbf{C}}$ переводит такую систему саму в себя, и потому в этом случае у нее существуют собственные состояния, отвечающие собственным значениям $C = \pm 1$ (последние следуют из того, что $\widehat{C}^2 = 1$). Для описания зарядовой симметрии можно при этом рассматривать частицу и античастицу как два различных «зарядовых состояния» одной и той же частицы, отличающихся значением зарядового квантового числа $Q = \pm 1$. Волновая функция системы представится как произведение орбитальной и «зарядовой» функции и должна быть симметричной по отношению к одновременной перестановке всех переменных (координатных и зарядовых) любой пары частиц. Симметрия же «зарядовой» функции определит зарядовую четность системы (см. задачу) [1]) .

Понятие зарядовой четности, естественным образом возникающее для «истинно нейтральных» систем, должно относиться и

[1]) В этих рассуждениях мы имеем в виду частицы со спином 0. Описанный способ рассмотрения непосредственно обобщается и на другие случаи — см., например, задачу к § 27.

к истинно нейтральным «элементарным» частицам. В аппарате вторичного квантования это понятие описывается равенством

$$\widehat{\psi}^C = \pm\widehat{\psi}; \tag{13.8}$$

знаки «+» и «−» отвечают зарядово-четным и зарядово-нечетным частицам.

В § 11 было указано, что релятивистская инвариантность должна означать также и инвариантность по отношению к 4-инверсии. По отношению к оператору скалярного (в смысле 4-поворотов) поля это значит, что при таком преобразовании должно быть:

$$\widehat{\psi}(t, \mathbf{r}) = \widehat{\psi}(-t, -\mathbf{r})$$

всегда с одинаковым знаком «+» в правой стороне. В терминах преобразования операторов $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$, $\widehat{b}_{\mathbf{p}}$ превращение $\widehat{\psi}(t, \mathbf{r})$ в $\widehat{\psi}(-t, -\mathbf{r})$ достигается перестановкой в (13.4) коэффициентов при e^{-ipx} и e^{ipx}, т. е. заменой

$$\widehat{a}_{\mathbf{p}} \to \widehat{b}^+_{\mathbf{p}}, \quad \widehat{b}_{\mathbf{p}} \to \widehat{a}^+_{\mathbf{p}} \tag{13.9}$$

Заменяя a-операторы b-операторами, это преобразование включает в себя взаимную замену частиц античастицами. Мы видим, что в релятивистской теории естественным образом возникает требование инвариантности по отношению к преобразованию, в котором одновременно с пространственной инверсией (P) и обращением времени (T) производится также зарядовое сопряжение (C); это утверждение называют *CPT-теоремой* [1]).

В этой связи, однако, уместно подчеркнуть, что хотя изложенные здесь и в § 11, 12 рассуждения и представляются естественным развитием понятий обычной квантовой механики и классической теории относительности, но полученные таким путем результаты выходят за их рамки как по форме (ψ-операторы, содержащие одновременно операторы рождения и уничтожения частиц), так и по существу (частицы и античастицы). Эти результаты нельзя поэтому рассматривать как чисто логическую необходимость. Они содержат в себе новые физические принципы, критерием правильности которых может быть лишь опыт.

Если обозначить через $\widehat{\psi}^{CPT}(t, \mathbf{r})$ оператор (13.4), в котором произведено преобразование (13.9), то можно записать:

$$\widehat{\psi}^{CPT}(t, \mathbf{r}) = \widehat{\psi}(-t, -\mathbf{r}). \tag{13.10}$$

Сформулировав, таким образом, 4-инверсию как преобразование (13.9), мы тем самым устанавливаем для ψ-оператора также и формулировку преобразования обращения времени: вместе

[1]) Оно было сформулировано *Людерсом* (*G. Lüders*, 1954) и *Паули* (*W. Pauli*, 1955).

с преобразованием CP (его называют *комбинированной инверсией*) оно должно давать (13.9) . Учитывая определения (13.3) и (13.6), находим поэтому

$$T: \widehat{a}_{\mathbf{p}} \to \pm\widehat{a}^{+}_{-\mathbf{p}}, \quad \widehat{b}_{\mathbf{p}} \to \pm\widehat{b}^{+}_{-\mathbf{p}} \tag{13.11}$$

(знаки «±» отвечают таким же знакам в (13.3)). Смысл этого преобразования вполне естествен: обращение времени не только переводит движение с импульсом $\mathbf{p}$ в движение с импульсом $-\mathbf{p}$, но также и переставляет начальные и конечные состояния в матричных элементах; поэтому операторы уничтожения частиц с импульсами $\mathbf{p}$ заменяются операторами рождения частиц с импульсами $-\mathbf{p}$. Произведя в (13.4) замену (13.11) и переобозначив переменную суммирования ($\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$), найдем, что [1])

$$\widehat{\psi}^{T}(t, \mathbf{r}) = \pm\widehat{\psi}^{+}(-t, \mathbf{r}). \tag{13.12}$$

Это равенство аналогично обычному правилу обращения времени в квантовой механике: если некоторое состояние описывается волновой функцией $\psi(t, \mathbf{r})$, то «обращенное по времени» состояние описывается функцией $\psi^{*}(-t, \mathbf{r})$; переход к комплексно-сопряженной функции связан с необходимостью восстановить нарушенный изменением знака t «правильный» характер зависимости от времени (*E. P. Wigner*, 1932).

Поскольку преобразование T (а с ним и CPT) переставляют начальные и конечные состояния, то для них понятия собственных состояний и собственных значений не имеют смысла. Они не приводят поэтому к новым характеристикам частиц как таковых. О следствиях же, к которым они приводят в применении к процессам рассеяния, будет идти речь в § 69, 71.

Рассмотрим, как меняется при преобразованиях C, P и T операторный 4-вектор тока $\widehat{j}^{\mu}$ (12.8). Преобразование (13.2) вместе с заменой $(\partial_0, \partial_i) \to (\partial_0, -\partial_i)$ дает

$$P: (\widehat{j}^{0}, \widehat{\mathbf{j}})_{t,\mathbf{r}} \to (\widehat{j}^{0}, -\widehat{\mathbf{j}})_{t,-\mathbf{r}}, \tag{13.13}$$

как и должно быть для истинного 4-вектора. Преобразование (13.7) дало бы просто

$$C: (\widehat{j}^{0}, \widehat{\mathbf{j}})_{t,\mathbf{r}} \to (-\widehat{j}^{0}, -\widehat{\mathbf{j}})_{t,\mathbf{r}}, \tag{13.14}$$

если бы операторы $\widehat{\psi}$ и $\widehat{\psi}^{+}$ были коммутативны. Некоммутативность этих операторов возникает, однако, только от некоммутативности $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$ и $\widehat{a}^{+}_{\mathbf{p}}$ (или $\widehat{b}_{\mathbf{p}}$ и $\widehat{b}^{+}_{\mathbf{p}}$ с одинаковыми $\mathbf{p}$; но в силу правил

---

[1]) Если определять операцию T безотносительно к другим преобразованиям, то возникнет тот же произвол в выборе фазового множителя, который имеется для операции C. Требование же симметрии CPT оставляет произвольным выбор фазового множителя лишь в одном из преобразований, C или T.

коммутации (11.4) перестановка этих операторов приводит лишь к появлению членов, не зависящих от чисел заполнения, т. е. от состояния поля. Отбрасывая (как и в (11.5),(11.6)) эти члены, как несущественные, мы вернемся к правилу (13.14), имеющему естественный смысл: заменяя частицы античастицами, зарядовое сопряжение меняет знак всех компонент 4-тока.

Поскольку операция обращения времени связана с транспонированием начальных и конечных состояний, при применении к произведению операторов она меняет порядок множителей. Так,

$$\left(\widehat{\psi}^{+}\partial_\mu\widehat{\psi}\right)^T = \left(\partial_\mu\widehat{\psi}\right)^T\left(\widehat{\psi}^{+}\right)^T.$$

В данном случае, однако, это обстоятельство несущественно: в силу коммутативности ψ-операторов (в указанном выше смысле) возвращение к исходному порядку множителей не отражается на результате. Заметив также, что при обращении времени $(\partial_0, \partial_i) \to (-\partial_0, \partial_i)$, найдем правило преобразования тока:

$$T: (\widehat{j}^0, \widehat{\mathbf{j}})_{t,\mathbf{r}} \to (\widehat{j}^0, -\widehat{\mathbf{j}})_{-t,\mathbf{r}}. \tag{13.15}$$

Трехмерный вектор $\mathbf{j}$ меняет знак в соответствии с классическим смыслом этой величины.

Наконец, при преобразовании CPT имеем

$$CPT: (\widehat{j}^0, \widehat{\mathbf{j}})_{t,\mathbf{r}} \to (-\widehat{j}^0, -\widehat{\mathbf{j}})_{-t,-\mathbf{r}}, \tag{13.16}$$

в соответствии со смыслом этой операции как 4-инверсии. Подчеркнем в этой связи, что поскольку 4-инверсия сводится к повороту 4-системы координат, по отношению к ней вообще не существует двух типов (истинных и псевдо) 4-тензоров любого ранга.

До сих пор мы подразумевали частицы свободными. Но реальный смысл квантовые числа четности приобретают лишь при рассмотрении взаимодействующих частиц, когда с ними связываются определенные правила отбора, разрешающие или запрещающие те или другие процессы. Такой смысл, однако, могут иметь только сохраняющиеся характеристики — собственные значения операторов, коммутирующих с гамильтонианом взаимодействующих частиц.

В силу релятивистской инвариантности коммутативным с гамильтонианом должен во всяком случае быть оператор CPT-преобразования. Что же касается преобразований C и T (а с ними и T) по отдельности, то опыт показывает, что электромагнитные и сильные взаимодействия инвариантны по отношению к ним, так что соответствующие квантовые числа четности в этих взаимодействиях сохраняются. В слабом же взаимодействии эти законы сохранения нарушаются [1]).

[1]) Идея о возможном несохранении четности в слабых взаимодействиях

Забегая несколько вперед, укажем, что оператор взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем дается произведением операторных 4-векторов $\widehat{A}$ и $\widehat{j}$. Поскольку зарядовое сопряжение меняет знак $\widehat{j}$, то инвариантность электромагнитного взаимодействия по отношению к этому преобразованию означает, что должен изменяться также и знак $\widehat{A}$. Другими словами, фотоны — зарядово-нечетные частицы.

Указанное поведение операторов $\widehat{A}$ находится в соответствии со свойствами 4-потенциала в классической теории. Действительно, из преобразований

$$C: \quad (\widehat{A}_0, \widehat{\mathbf{A}}) \to (-\widehat{A}_0, -\widehat{\mathbf{A}})_{t,\mathbf{r}},$$
$$P: \quad (\widehat{A}_0, \widehat{\mathbf{A}}) \to (\widehat{A}_0, -\widehat{\mathbf{A}})_{t,-\mathbf{r}},$$
$$CPT: \quad (\widehat{A}_0, \widehat{\mathbf{A}}) \to (-\widehat{A}_0, -\widehat{\mathbf{A}})_{-t,-\mathbf{r}},$$

следует:

$$T: \quad (\widehat{A}_0, \widehat{\mathbf{A}}) \to (\widehat{A}_0, -\widehat{\mathbf{A}})_{-t,\mathbf{r}},$$

что и отвечает классическому правилу преобразования потенциалов электромагнитного поля при обращении времени.

Требование CPT-инвариантности не накладывает каких-либо ограничений на свойства частиц самих по себе. Оно приводит, однако, к определенной связи между свойствами частиц и античастиц. Сюда относится, прежде всего, равенство масс тех и других, — это ясно уже из изложенной в § 11 связи между 4-инверсией и самим происхождением понятия о частицах и античастицах.

Далее, из CPT-инвариантности следует, что коэффициенты пропорциональности между векторами электрического и магнитного моментов и вектором спина различаются у частицы и античастицы лишь знаком. Действительно, магнитный момент меняет знак при C- и T-преобразованиях и (будучи аксиальным вектором) P-инвариантен. Поэтому преобразование CPT, превращая частицу в античастицу, в то же время не меняет знак магнитного момента; вектор же спина меняет знак. То же самое относится к электрическому моменту, остающемуся неизменным при обращении времени и меняющему знак при C-преобразовании и (по свойствам полярного вектора) при пространственной инверсии.

Требования же P- или T-инвариантности (если таковые соблюдаются) ограничивают свойства уже каждой из частиц: они

была впервые высказана *Ли* и *Янгом* (*T. D. Lee, C. N. Yang*, 1956). Еще раньше общая мысль о необязательности P- и T-инвариантности физических законов была высказана *Дираком* (1949).

запрещают существование у частицы электрического дипольного момента. Действительно, единственный вектор, который можно построить для покоящейся элементарной частицы из ее ψ-операторов, — это вектор оператора ее спина. Этот вектор P-четен и T-нечетен; он может поэтому определять только магнитный, но не электрический момент. Подчеркнем, что для этого запрета достаточно требования уже лишь одной P- или T-инвариантности.

Задача

Определить зарядовую и пространственную четности системы, состоящей из частицы со спином 0 и ее античастицы, с орбитальным моментом l относительного движения.

Решение. Перестановка координат частиц эквивалентна инверсии (относительно центра инерции) и поэтому умножает орбитальную функцию на $(-1)^l$; перестановка зарядовых переменных эквивалентна зарядовому сопряжению и умножает «зарядовый» множитель в волновой функции на искомое C. Из условия $C(-1)^l = 1$ имеем

$$C = (-1)^l.$$

Пространственная четность системы P есть произведение орбитальной четности и внутренних четностей обеих частиц. Поскольку внутренние четности частицы и античастицы одинаковы, то в данном случае P совпадает с орбитальной четностью: $P = (-1)^l$.

§ 14. Волновое уравнение для частицы со спином 1

Частица со спином 1 описывается в ее системе покоя трехкомпонентной волновой функцией — трехмерным вектором (о такой частице часто говорят как о *векторной*). По своему четырехмерному происхождению это могут быть три пространственные компоненты 4-вектора ψ^μ (пространственноподобного) или же смешанные компоненты антисимметричного 4-тензора второго ранга $\psi^{\mu\nu}$, у которых в системе покоя обращается в нуль временная (ψ^0) и пространственные (ψ^{ik}) компоненты [1]).

Волновое уравнение — дифференциальная связь между величинами ψ^μ, $\psi^{\mu\nu}$ — устанавливается соотношениями, которые мы запишем в виде

$$i\psi_{\mu\nu} = \widehat{p}_\mu\psi_\nu - \widehat{p}_\nu\psi_\mu, \tag{14.1}$$

$$im^2\psi_\mu = \widehat{p}^\nu\psi_{\mu\nu}, \tag{14.2}$$

[1]) Забегая вперед, укажем, что совокупности 4-вектора ψ_μ и 4-тензора $\psi^{\nu\mu}$ отвечает совокупность четырехмерных спиноров второго ранга $\xi^{\alpha\beta}$, $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$, $\zeta^{\alpha\dot\beta}$, причем $\xi^{\alpha\beta}$ и $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$ — симметричные спиноры, переходящие друг в друга при инверсии (см. § 19).

где $\widehat{p} = i\partial$ (*A. Proca*, 1936). Применив к обеим сторонам уравнения (14.2) операцию $\widehat{p}^{\mu}$, получим (ввиду антисимметричности $\psi_{\mu\nu}$)

$$\widehat{p}^{\mu}\psi_{\mu} = 0. \tag{14.3}$$

Из (14.1, 14.2) можно исключить $\psi_{\mu\nu}$, подставив первое уравнение во второе. Учитывая (14.3), получаем

$$(\widehat{p}^2 - m^2)\psi_{\mu} = 0, \tag{14.4}$$

откуда снова (ср. § 10) видно, что m — масса частицы. Таким образом, свободную частицу со спином 1 можно описывать всего одним 4-вектором ψ^{μ}, компоненты которого удовлетворяют уравнению второго порядка (14.4), а также и дополнительному условию (14.3), исключающему из ψ^{μ} часть, принадлежащую спину 0.

В системе покоя, где ψ_{μ} не зависит от пространственных координат, найдем, что $\widehat{p}^0\psi_0 = 0$. Поскольку в то же время $\widehat{p}^0\psi_0 = m\psi_0$, мы видим, что в системе покоя $\psi_0 = 0$, как и должно быть. Вместе с ψ_0 обращаются в нуль также и ψ_{ik}.

Частица со спином 1 может обладать различной внутренней четностью — в зависимости от того, является ли ψ^{μ} истинным вектором или псевдовектором. В первом случае

$$\widehat{P}\psi^{\mu} = \left(\psi^0, -\psi^i\right),$$

а во втором

$$\widehat{P}\psi^{\mu} = \left(-\psi^0, \psi^i\right).$$

Уравнения (14.1),(14.2) могут быть получены из вариационного принципа с лагранжианом:

$$L = (1/2)\,\psi_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu *} - (1/2)\psi^{\mu\nu *}(\partial_{\mu}\psi_{\nu} - \partial_{\nu}\psi_{\mu}) - \\ - (1/2)\psi^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\psi^*_{\nu} - \partial_{\nu}\psi^*_{\mu}) + m^2\psi_{\mu}\psi^{\mu *}. \tag{14.5}$$

Роль независимых обобщенных координат играют в нем ψ_{μ}, ψ^*_{μ}, $\psi_{\mu\nu}$, $\psi^*_{\mu\nu}$ [1]).

Для нахождения тензора энергии импульса формула (10.11) в данном случае не вполне удобна, так как она привела бы к несимметричному тензору, который нуждался бы еще в дополнительной симметризации. Вместо этого можно воспользоваться формулой

$$\frac{1}{2}\,T_{\mu\nu}\sqrt{-g} = -\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\,\frac{\partial\sqrt{-g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} + \frac{\partial\sqrt{-g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}}, \tag{14.6}$$

[1]) Если бы мы производили варьирование только по ψ_{μ} (предполагая заранее $\psi_{\mu\nu}$ выраженными через ψ_{μ} согласно (14.1)), то уравнение (14.3) должно было бы вводиться как дополнительное условие, не связанное с вариационным принципом.

в которой предполагается, что L выражено в виде, относящемся к произвольным криволинейным координатам (см. II, § 94). Если L содержит только компоненты самого метрического тензора $g_{\mu\nu}$ (но не их производные по координатам), то формула упрощается:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,L}{\partial g^{\mu\nu}} = 2\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}L$$

(напомним, что $d\ln g = -g_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}$).

Поскольку дифференцирование в формуле (14.6) производится не по величинам ψ_μ, $\psi_{\mu\nu}$, при ее применении необязательно считать эти величины независимыми; можно сразу воспользоваться связью (14.1) и переписать лагранжиан (14.5) в виде

$$L = (-1/2)\,\psi_{\mu\nu}\psi^*_{\lambda\rho}g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} + m^2\psi_\mu\psi^*_\nu g^{\mu\nu}. \qquad (14.7)$$

Тогда

$$T_{\mu\nu} = -\psi_{\mu\lambda}{\psi_\nu}^{\lambda*} - \psi^*_{\mu\lambda}{\psi_\nu}^{\lambda} + m^2\left(\psi^*_\mu\psi_\nu + \psi^*_\nu\psi_\mu\right) + \\ + g_{\mu\nu}\left((1/2)\,\psi_{\lambda\rho}\psi^{\lambda\rho*} - m^2\psi^*_\lambda\psi^\lambda\right). \qquad (14.8)$$

В частности, плотность энергии дается существенно положительным выражением

$$T_{00} = (1/2)\,\psi_{ik}\psi^*_{ik} + \psi_{0i}\psi^*_{0i} + m^2\left(\psi_0\psi^*_0 + \psi_i\psi^*_i\right). \qquad (14.9)$$

Сохраняющийся 4-вектор плотности тока дается выражением

$$j^\mu = i\left(\psi^{\mu\nu*}\psi_\nu - \psi^{\mu\nu}\psi^*_\nu\right). \qquad (14.10)$$

Его можно найти согласно формуле (12.12) дифференцированием лагранжиана (14.5) по производным $\partial_\mu\psi_\nu$. В частности,

$$j^0 = i\left(\psi^{0k*}\psi_k - \psi^{0k}\psi^*_k\right) \qquad (14.11)$$

и не является существенно положительной величиной.

Плоская волна, нормированная на одну частицу в объеме $V = 1$:

$$\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_\mu e^{-ipx}, \quad u_\mu u^{\mu*} = -1, \qquad (14.12)$$

где u_μ—единичный 4-вектор поляризации, удовлетворяющий (в силу (14.3)) условию четырехмерной поперечности

$$u_\mu p^\mu = 0. \qquad (14.13)$$

Действительно, подставив функцию (14.12) в (14.9) и (14.11), получим

$$T_{00} = -2\varepsilon^2\psi_\mu\psi^{\mu*} = \varepsilon, \qquad j^0 = 1.$$

В противоположность фотону векторная частица с ненулевой массой имеет три независимых направления поляризации. Соответствующие им амплитуды см. (16.21).

Поляризационная матрица плотности для частично поляризованных векторных частиц определяется таким образом, чтобы в чистом состоянии она сводилась к произведению

$$\rho_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu^*$$

(аналогично выражению (8.7) для фотонов). Согласно (14.12), (14.13) она удовлетворяет условиям

$$p^\mu \rho_{\mu\nu} = 0, \qquad \rho_\mu^\mu = -1. \tag{14.14}$$

Для неполяризованных частиц матрица $\rho_{\mu\nu}$ должна иметь вид $ag_{\mu\nu} + bp_\mu p_\nu$. Определив коэффициенты a и b из (14.14), найдем в результате

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right). \tag{14.15}$$

Квантование поля векторных частиц производится аналогично скалярному случаю, и нет необходимости повторять заново все рассуждения, ψ-операторы векторного поля имеют вид

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_\mu &= \sum_{\mathbf{p}\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(\widehat{a}_{\mathbf{p}\alpha} u_\mu^{(\alpha)} e^{-ipx} + \widehat{b}^+_{\mathbf{p}\alpha} u_\mu^{(\alpha)*} e^{ipx}\right), \\ \widehat{\psi}^+_\mu &= \sum_{\mathbf{p}\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(\widehat{a}^+_{\mathbf{p}\alpha} u_\mu^{(\alpha)*} e^{ipx} + \widehat{b}_{\mathbf{p}\alpha} u_\mu^{(\alpha)} e^{-ipx}\right), \end{aligned} \tag{14.16}$$

где индекс α нумерует три независимые поляризации.

Положительная определенность выражения (14.9) для T_{00} и неопределенность j^0 (14.11) приводят, как и в скалярном случае, к необходимости квантования по Бозе.

Существует тесная связь между свойствами истинно нейтрального векторного и электромагнитного полей. Нейтральное векторное поле описывается эрмитовым ψ-оператором:

$$\widehat{\psi}_\mu = \sum_{\mathbf{p}\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\left(\widehat{c}_{\mathbf{p}\alpha} u_\mu^{(\alpha)} e^{-ipx} + \widehat{c}^+_{\mathbf{p}\alpha} u_\mu^{(\alpha)*} e^{ipx}\right). \tag{14.17}$$

Лагранжиан этого поля

$$\widehat{L} = \frac{1}{4}\,\widehat{\psi}_{\mu\nu}\widehat{\psi}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\widehat{\psi}^{\mu\nu}(\partial_\mu\widehat{\psi}_\nu - \partial_\nu\widehat{\psi}_\mu) + \frac{1}{2}m^2\widehat{\psi}_\mu\widehat{\psi}^\mu. \tag{14.18}$$

Электромагнитному полю отвечает случай $m = 0$. При этом 4-вектор ψ^μ становится 4-потенциалом A^μ, а 4-тензор $\psi^{\mu\nu}$ — тензором поля $F^{\mu\nu}$, связанным с потенциалом определением (14.1). Уравнение (14.2) превращается в $\partial^\nu\psi_{\mu\nu} = 0$, что соответствует второй паре уравнений Максвелла. Из него уже не следует условие (14.3), которое, таким образом, перестает быть обязательным. Ввиду отсутствия дополнительного условия нет необходимости рассматривать в лагранжиане $\widehat{\psi}_\mu$ и $\widehat{\psi}_{\mu\nu}$ как независимые

«координаты», и лагранжиан (14.18) сводится к

$$\widehat{L} = -(1/4)\widehat{\psi}_{\mu\nu}\widehat{\psi}^{\mu\nu} \tag{14.19}$$

в согласии с известным классическим выражением лагранжиана электромагнитного поля. Этот лагранжиан, вместе с тензором $\widehat{\psi}_{\mu\nu}$, инвариантен по отношению к произвольному калибровочному преобразованию «потенциалов» $\widehat{\psi}_{\mu}$. Ясно видна связь этого обстоятельства с нулевой массой: лагранжиан (14.18) не обладает этим свойством благодаря члену $m^2\widehat{\psi}_{\mu}\widehat{\psi}^{\mu}$.

§ 15. Волновое уравнение для частиц с высшими целыми спинами

Поскольку волновые уравнения (14.3, 14.4) следуют непосредственно из задания массы и спина частицы, практическое использование лагранжиана сводится не столько к выводу этих уравнений, сколько к построению выражений для энергии, импульса и заряда поля.

Для этой цели, как уже отмечалось, можно пользоваться вместо (14.5) выражением (14.7), а последнее можно преобразовать еще дальше. Использовав (14.1), переписываем (14.7) в виде

$$L = -\left(\partial_\mu \psi_\nu^*\right)\left(\partial^\mu \psi^\nu\right) + \left(\partial_\nu \psi_\mu^*\right)\left(\partial^\mu \psi^\nu\right) + m^2 \psi_\mu \psi^{\mu *} =$$

$$-\left(\partial_\mu \psi_\nu^*\right)\left(\partial^\mu \psi^\nu\right) + m^2 \psi_\mu^* \psi^\mu + \partial_\nu\left(\psi_\mu^* \partial^\mu \psi^\nu\right) - \psi_\mu^* \partial^\mu \partial_\nu \psi^\nu.$$

В силу (14.3) последний член обращается в нуль, а предпоследний есть полная производная. Опустив ее, получим лагранжиан

$$L' = -\left(\partial_\mu \psi_\nu^*\right)\left(\partial^\mu \psi^\nu\right) + m^2 \psi_\mu^* \psi^\mu. \tag{15.1}$$

Он имеет ту же структуру, что и лагранжиан (10.9) частицы со спином 0, отличаясь лишь заменой скаляра ψ на 4-вектор ψ_μ и общим знаком. Последнее связано с тем, что ψ_μ — пространственноподобный вектор, так что $\psi_\mu\psi^{\mu *} < 0$, в то время как для скалярной частицы $\psi\psi^* > 0$.

Если построить 4-тензор энергии-импульса и 4-вектор тока с помощью лагранжиана (15.1), то мы получим выражения того же вида, что и выражения (10.12) и (10.18) для скалярного поля:

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu \psi^{\lambda *} \cdot \partial_\nu \psi_\lambda - \partial_\nu \psi^{\lambda *} \cdot \partial_\mu \psi_\lambda - L' g_{\mu\nu}, \tag{15.2}$$

$$j_\mu = -i\left[\psi_\lambda^* \partial_\mu \psi^\lambda - \left(\partial_\mu \psi_\lambda^*\right)\psi^\lambda\right]. \tag{15.3}$$

Их отличие от (14.8) и (14.10) тоже сводится к полным производным. Но локальные значения этих величин не имеют (как

уже подчеркивалось ранее) глубокого физического смысла. Существенны лишь объемные интегралы P_μ (10.15) и Q (10.19), которые будут совпадать при обоих выборах $T_{\mu\nu}$ и j_μ.

Такой способ описания непосредственно обобщается на частицы с произвольным (целым) спином. Волновая функция частицы со спином s есть неприводимый 4-тензор ранга s, т. е. тензор, симметричный по всем своим индексам и обращающийся в нуль при упрощении по любой паре индексов:

$$\psi_{\dots\mu\dots\nu\dots} = \psi_{\dots\nu\dots\mu\dots}, \quad \psi_{\dots\mu\dots}{}^{\mu}{}_{\dots} = 0. \tag{15.4}$$

Этот тензор должен удовлетворять дополнительному условию 4-поперечности:

$$\widehat{p}^{\,\mu}\psi_{\dots\mu\dots} = 0, \tag{15.5}$$

а каждая из его компонент — уравнению второго порядка:

$$(\widehat{p}^{\,2} - m^2)\psi_{\dots} = 0. \tag{15.6}$$

В системе покоя условие (15.5) приводит к обращению в нуль всех компонент 4-тензора, среди индексов которых есть 0. Другими словами, волновая функция в системе покоя (т. е. в нерелятивистском пределе) сводится, как и следовало, к неприводимому 3-тензору ранга s, число независимых компонент которого равно $2s+1$.

Лагранжиан, тензор энергии-импульса и вектор тока для поля частиц со спином s отличаются от (15.1)–(15.3) лишь заменой ψ_λ на $\psi_{\lambda\mu\dots}$.

Нормированная плоская волна:

$$\psi^{\mu\nu\dots} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u^{\mu\nu\dots} e^{-ipx}, \quad u^*_{\mu\nu\dots} u^{\mu\nu\dots} = -1, \tag{15.7}$$

причем амплитуда волны удовлетворяет условиям

$$u^{\dots\mu\dots} p_\mu = 0. \tag{15.8}$$

Имеется $2s+1$ независимых состояний поляризации.

Квантование поля производится очевидным обобщением случаев спина 0 или 1.

Изложенная схема вполне достаточна для поставленной цели — описания поля свободных частиц. Иное дело, если ставить задачу об описании взаимодействия частиц с электромагнитным полем. Это взаимодействие должно было бы вводиться в лагранжиан, из которого все уравнения могли бы быть получены без необходимости постановки дополнительных условий. Однако фактически оказывается, что такое описание взаимодействия применимо только для электронов — частиц со спином 1/2 (см. § 32). Поэтому для других спинов эта задача могла бы иметь лишь методический интерес.

Отметим, что для всех (целых и полуцелых) спинов $s > 1$ оказывается невозможным сформулировать вариационный принцип с помощью одной только функции (тензорной или спинорной), ранг которой соответствует данному спину. Для этой цели оказывается необходимым ввести в качестве вспомогательных также тензорные или спинорные величины более низкого ранга. При этом лагранжиан подбирается таким образом, чтобы эти вспомогательные величины автоматически обращались в нуль в силу следующих из вариационного принципа уравнений поля свободных частиц [1]).

§ 16. Спиральные состояния частицы [2])

В релятивистской теории орбитальный момент $\mathbf{l}$ и спин $\mathbf{s}$ движущейся частицы не сохраняются каждый в отдельности. Сохраняется лишь полный момент $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$. Не сохраняется поэтому и проекция спина на какое-либо заданное направление (ось z), и поэтому эта величина не может служить для перечисления поляризационных (спиновых) состояний движущейся частицы.

Сохраняется, однако, проекция спина на направление импульса: поскольку $\mathbf{l} = [\mathbf{rp}]$, то произведение $\mathbf{sn}$ совпадает с сохраняющимся произведением $\mathbf{jn}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$). Эту величину называют *спиральностью* [3]) (мы уже рассматривали ее для фотона в § 8). Ее собственные значения будем обозначать буквой λ ($\lambda = -s, \ldots, +s$), а состояния частицы с определенными значениями λ будем называть спиральными состояниями.

Пусть $\psi_{\mathbf{p}\lambda}$ — волновая функция (плоская волна), описывающая состояние частицы с определенными $\mathbf{p}$ и λ, а $u^{(\lambda)}(\mathbf{p})$ — ее амплитуда; для краткости обозначений мы не выписываем индексы компонент этой функции (для целого спина это — 4-тензорные индексы).

Мы видели в предыдущих параграфах, что при релятивистском описании частиц с отличным от нуля (целым) спином приходится вводить волновую функцию с числом компонент, превышающим $2s + 1$. Однако число независимых компонент при этом остается равным $2s + 1$; «лишние» компоненты устраняются наложением дополнительных условий, в силу которых эти

---

[1]) См. *Fierz M.*,*Pauli W.*//Proc. Roy. Soc. — 1939. — V. A 173. — P. 211. В этой работе указанная программа проведена для частиц со спином $3/2$ и 2.

[2]) Содержание этого параграфа относится к частицам с любым (целым или полуцелым) спином.

[3]) В английской литературе — helicity.

компоненты обращаются в нуль в системе покоя (в следующей главе мы увидим это же для полуцелых s).

Согласно формулам преобразования момента (см. II, § 14) спиральность инвариантна относительно преобразований Лоренца, не меняющих направления $\mathbf{p}$, на которое проецируется момент. Поэтому число λ сохраняет при таких преобразованиях свой смысл квантового числа, и для изучения свойств симметрии спиральных состояний можно воспользоваться системой отсчета, в которой импульс $|\mathbf{p}| \ll m$ (в пределе — системой покоя). Тогда $\psi_{\mathbf{p}\lambda}$ сведется к нерелятивистской $(2s+1)$-компонентной волновой функции. Обозначим ее амплитуду через $w^{(\lambda)}(\mathbf{n})$, указав в качестве аргумента направление $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, вдоль которого квантуется момент. Амплитуда $w^{(\lambda)}$ — собственная функция оператора $\mathbf{n}\hat{\mathbf{s}}$:

$$\mathbf{n}\hat{\mathbf{s}}w^{(\lambda)}(\mathbf{n}) = \lambda w^{(\lambda)}(\mathbf{n}) \tag{16.1}$$

В спинорном представлении $w^{(\lambda)}$ — контравариантный симметричный спинор ранга $2s$; согласно формулам соответствия (57.2) (см. III) его компоненты можно перечислять также по отвечающим им значениям проекции спина σ на фиксированную ось z [1]).

В импульсном представлении волновые функции рассматриваемых состояний совпадают в основном с амплитудами $u^{(\lambda)}(\mathbf{p})$. Именно:

$$\psi_{\mathbf{p}\lambda}(\mathbf{k}) = u^{(\lambda)}(\mathbf{k})\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{n}) = u^{(\lambda)}(\mathbf{p})\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{n}), \tag{16.2}$$

где импульс как независимая переменная обозначен $\mathbf{k}$, в отличие от его собственного значения $\mathbf{p}$, а $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, в отличие от $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ [2]). В нерелятивистском пределе

$$\psi_{\mathbf{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = w_\sigma^{(\lambda)}(\boldsymbol{\nu})\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{n}) = w^{(\lambda)}(\mathbf{n})\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{n}). \tag{16.3}$$

---

[1]) Приведенные рассуждения (как и перечисление возможных значений λ) относятся к частицам с отличной от нуля массой. Для частиц с нулевой массой системы покоя не существует, а спиральность может иметь лишь два значения $\lambda = \pm s$. Последнее связано с упомянутым уже в § 8 обстоятельством: состояния такой частицы классифицируются по их поведению по отношению к группе аксиальной симметрии, допускающей только двукратное вырождение уровней (с точки зрения свойств волнового уравнения это означает, что при переходе к пределу $m \to 0$ система уравнений для частицы со спином s распадается на независимые уравнения, отвечающие безмассовым частицам со спинами s, $s-1$, ...). Так, для фотона $\lambda = \pm 1$, а роль соответствующих $w^{(\lambda)}$ играют трехмерные векторы $\mathbf{e}^{(\pm 1)}$ (8.2).

[2]) Здесь δ-функция $\delta^{(2)}$ определена так, что $\int \delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{n})\, do_{\boldsymbol{\nu}} = 1$. В (16.2) (и в аналогичном случае ниже, см. (16.4)) опущена δ-функция, обеспечивающая заданное значение энергии.

Более подробно это выражение надо было бы написать в виде

$$\psi_{\mathbf{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu},\sigma)=w_\sigma^{(\lambda)}(\boldsymbol{\nu})\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\mathbf{n}),$$

где явно указана также и дискретная независимая переменная σ.

Оператор спиральности $\widehat{\mathbf{sn}}$ коммутативен с операторами $\widehat{j}_z$ и $\widehat{\mathbf{j}}^2$. Действительно, оператор момента связан с бесконечно малым поворотом системы координат, а скалярное произведение двух векторов инвариантно по отношению к любому повороту. Поэтому существуют стационарные состояния, в которых частица обладает одновременно определенными значениями момента j, его проекции $j_z=m$ и спиральности λ. Будем называть такие состояния *сферическими спиральными состояниями*.

Определим волновые функции этих состояний в импульсном представлении. Это можно сделать непосредственно по аналогии с полученными в т. III, § 103 формулами для волновых функций симметричного волчка. Они были получены там на основании формул для преобразования волновых функций при конечных вращениях (см. III, § 58). Последние, в свою очередь, основаны только на свойствах симметрии по отношению к вращениям; поэтому они применимы к функциям в импульсном представлении в той же мере, как и к координатным функциям.

Наряду с фиксированной в пространстве системой координат xyz (по отношению к которой записываются функции $\psi_{jm\lambda}$), введем также «подвижную» систему $\xi\eta\zeta$ с осью ζ вдоль направления $\boldsymbol{\nu}$. Не повторяя заново соответствующих рассуждений (ср. вывод формулы (103.8) (см. III)), напишем

$$\psi_{jm\lambda}(\mathbf{k})=\psi_{j\lambda}^{(0)}D_{\lambda m}^{(j)}(\boldsymbol{\nu}),$$

где $\psi_{j\lambda}^{(0)}$ — волновая функция в «подвижной» системе координат, описывающая состояние частицы с определенным значением ζ-проекции момента: $j_\zeta=\lambda$; в импульсном представлении эта функция совпадает, очевидно, с амплитудой $u^{(\lambda)}$. Нормированная (см. ниже) волновая функция

$$\psi_{jm\lambda}(\mathbf{k})=\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}D_{\lambda m}^{(j)}(\boldsymbol{\nu})u^{(\lambda)}(\mathbf{k}). \tag{16.4}$$

Здесь возникает, однако, вопрос о выборе фаз, связанный со следующей неоднозначностью. Поворот системы координат $\xi\eta\zeta$ относительно xyz определяется тремя углами Эйлера α, β, γ; направление же $\boldsymbol{\nu}$, от которого только и может зависеть волновая функция частицы, зависит лишь от двух сферических углов $\alpha\equiv\varphi$, $\beta\equiv\theta$. Поэтому надо условиться о каком-либо выборе угла γ. Будем полагать $\gamma=0$, т. е. определим $D_{\lambda m}^{(j)}(\boldsymbol{\nu})$ как

$$D_{\lambda m}^{(j)}(\boldsymbol{\nu})=D_{\lambda m}^{(j)}(\varphi,\theta,0)=e^{im\varphi}d_{\lambda m}^{(j)}(\theta). \tag{16.5}$$

В силу (58.21) (см. III) функции (16.5) удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки:

$$\int D^{(j_1)*}_{\lambda_1 m_1}(\boldsymbol{\nu}) D^{(j_2)}_{\lambda_2 m_2}(\boldsymbol{\nu}) \frac{do_{\nu}}{4\pi} = \frac{1}{2j+1}\delta_{j_1 j_2}\delta_{m_1 m_2} \tag{16.6}$$

($do_{\boldsymbol{\nu}} = \sin\theta d\theta d\varphi$). Ортогональность же функций $\psi_{jm\lambda}$ по индексу λ обеспечивается множителем $u^{(\lambda)}$. Таким образом, функции $\psi_{jm\lambda}$ ортогональны, как и должно быть, по всем индексам $jm\lambda$, а при выбранном в (16.4) коэффициенте они нормированы условием

$$\int |\psi_{jm\lambda}|^2 do_{\boldsymbol{\nu}} = 1. \tag{16.7}$$

При этом предполагается, что амплитуды $u^{(\lambda)}$ нормированы на единицу: $u^{(\lambda)}u^{(\lambda)*} = 1$.

Рассмотрим поведение волновых функций спиральных состояний по отношению к инверсии координат. Произведение полярного вектора $\boldsymbol{\nu}$ на аксиальный вектор $\mathbf{j}$ — псевдоскаляр. Поэтому ясно, что в результате инверсии состояние со спиральностью λ переходит в состояние с $-\lambda$; надо лишь определить фазовые множители в этих преобразованиях.

При инверсии $\boldsymbol{\nu} \to -\boldsymbol{\nu}$. Вектор $\boldsymbol{\nu}$ определяется двумя углами φ, θ, и преобразование $\boldsymbol{\nu} \to -\boldsymbol{\nu}$ осуществляется заменой $\varphi \to \to \varphi + \pi$, $\theta \to \pi - \theta$. Тем самым фиксируется ось ζ, но остается неопределенным положение осей ξ и η, зависящее также и от третьего угла Эйлера γ; преобразование одних только θ и φ не дает возможности различать в этом смысле инверсию системы координат от поворота оси ζ. В терминах всех трех углов Эйлера инверсия есть преобразование

$$\alpha \equiv \varphi \to \varphi + \pi, \quad \beta \equiv \theta \to \pi - \theta, \quad \gamma \to \pi - \gamma. \tag{16.8}$$

Поэтому, если $D^{(j)}_{\lambda m}(\boldsymbol{\nu})$ определено согласно (16.5) (т. е. с $\gamma = = 0$), а замена $\boldsymbol{\nu} \to -\boldsymbol{\nu}$ подразумевается как результат инверсии, то

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\boldsymbol{\nu}) = D^{(j)}_{\lambda m}(\varphi + \pi, \pi - \theta, \pi). \tag{16.9}$$

С помощью формул (58.9), (58.16), (58.18) (см. III) находим поэтому

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\boldsymbol{\nu}) = e^{i\lambda\pi} d^{(j)}_{\lambda m}(\pi - \theta) e^{im(\varphi+\pi)} =$$
$$= (-1)^{j-\lambda} e^{im\varphi} d^{(j)}_{-\lambda m}(\theta) = (-1)^{j-\lambda} D^{(j)}_{-\lambda m}(\varphi, \theta, 0),$$

или

$$D^{(j)}_{\lambda m}(-\boldsymbol{\nu}) = (-1)^{-\lambda} D^{(j)}_{-\lambda m}(\boldsymbol{\nu}) \tag{16.10}$$

($j - \lambda$ — целое число).

Аналогичную формулу для спинора $w^{(\lambda)}$ можно получить, заметив, что его компоненты $w^{(\lambda)}_{\sigma}$ совпадают, с точностью до

множителя, с функциями

$$w_\sigma^{(\lambda)}(\boldsymbol{\nu}) \propto D_{\lambda\sigma}^{(s)}(\boldsymbol{\nu})^*. \qquad (16.11)$$

Действительно, применив формулу преобразования (58.7) (см. III) к собственным функциям спина и положив, что его ζ-проекция имеет определенное значение λ (т. е. заменив в правой стороне (58.7) (см. III) $\psi_{jm'}$ на $\delta_{m'\lambda}$), мы найдем, что $D_{\lambda\sigma}^{(s)}(\boldsymbol{\nu})$ — спиновые волновые функции, отвечающие определенным значениям его z- и ζ-проекций (σ и λ). Совокупность этих функций ($\sigma = -s, \ldots, +s$) составляет (по формулам соответствия (57.6) (см. III)) ковариантный спинор ранга $2s$. Компоненты же контравариантного спинора (которым по формулам (57.2) (см. III) отвечают компоненты $w_\sigma^{(\lambda)}$) преобразуются как комплексно-сопряженные от компонент ковариантного спинора того же ранга. Из (16.10),(16.11) имеем

$$w^{(\lambda)}(-\boldsymbol{\nu}) = (-1)^{s-\lambda} w^{(-\lambda)}(\boldsymbol{\nu}) \qquad (16.12)$$

($s - \lambda$ — целое число). Операция инверсии в применении к $w^{(\lambda)}$ состоит однако не только в замене $\boldsymbol{\nu} \to -\boldsymbol{\nu}$, но и в умножении на общий фазовый множитель («внутренняя четность» частицы), который мы обозначим η:

$$\widehat{P} w^{(\lambda)}(\boldsymbol{\nu}) = \eta w^{(\lambda)}(-\boldsymbol{\nu}) = \eta(-1)^{s-\lambda} w^{(-\lambda)}(\boldsymbol{\nu}). \qquad (16.13)$$

Для релятивистской же амплитуды $u^{(\lambda)}(\mathbf{k})$ это преобразование запишется в виде

$$\widehat{P} u^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = \eta\beta u^{(\lambda)}(-\mathbf{k}) = \eta(-1)^{s-\lambda} u^{(-\lambda)}(\mathbf{k}), \qquad (16.14)$$

где β — некоторая матрица, единичная по отношению к компонентам $u^{(\lambda)}$, остающимся в пределе $|\mathbf{p}| \to 0$. Важно, что эта матрица не зависит от квантовых чисел состояния, и в этом смысле разница между (16.13) и (16.14) несущественна [1]).

Применив (16.14) к (16.2), получим закон преобразования волновых функций состояний $|\mathbf{n}\lambda\rangle$:

$$\widehat{P}\psi_{\mathbf{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = \eta(-1)^{s-\lambda}\psi_{-\mathbf{n}-\lambda}(\boldsymbol{\nu}). \qquad (16.15)$$

Для сферических спиральных состояний, воспользовавшись (16.10) и (16.12), получим закон преобразования:

$$\widehat{P}\psi_{jm\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = \eta(-1)^{j-s}\psi_{jm-\lambda}(\boldsymbol{\nu}). \qquad (16.16)$$

[1]) Так, для $s = 1$ амплитуды $u^{(\lambda)}$ — 4-векторы (16.22); при этом β — полностью единичная матрица по 4-векторным индексам: $\beta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Для $s = 1/2$ (как мы увидим в следующей главе) $u^{(\lambda)}$ — биспинор; при этом фазовый множитель $\eta = i$, а β — матрица Дирака γ^0 (см. (21.10)).

Состояния ψ_{jm0} преобразуются, согласно (16.16), сами через себя, т. е. обладают определенной четностью. Если же $\lambda \neq 0$, то определенной четностью обладают лишь суперпозиции состояний с противоположными спиральностями:

$$\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{jm\lambda} \pm \psi_{jm-\lambda}\right). \tag{16.17}$$

При инверсии они преобразуются сами через себя согласно

$$\widehat{P}\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|}(\boldsymbol{\nu}) = \pm\eta(-1)^{j-s}\psi^{(\pm)}_{jm|\lambda|}(\boldsymbol{\nu}). \tag{16.18}$$

Обратим внимание на то, что мы произвели в этом параграфе классификацию состояний свободной частицы с заданным моментом, оперируя только с сохраняющимися величинами и не прибегая к понятию орбитального момента (использованного, например, в § 6, 7 для классификации состояний фотона).

В качестве примера рассмотрим случай спина 1. В системе покоя амплитуды $u^{(\lambda)}$ (4-векторы) сводятся к трехмерным векторам $\mathbf{e}^{(\lambda)}$, которые и играют здесь роль амплитуд $w^{(\lambda)}$. Действие оператора спина 1 на векторную функцию $\mathbf{e}$ дается формулой

$$(\widehat{s}_i\mathbf{e})_k = -ie_{ikl}e_l \tag{16.19}$$

(см. III, § 57, задача 2). Поэтому уравнение (16.1) принимает вид

$$i[\mathbf{n}\mathbf{e}^{(\lambda)}] = \lambda\mathbf{e}^{(\lambda)}. \tag{16.20}$$

Его решения (в системе координат $\xi\eta\zeta$ с осью ζ вдоль $\mathbf{n}$) совпадают с циркулярными ортами (7.14) [1]:

$$\mathbf{e}^{(0)} = i(0,0,1), \qquad \mathbf{e}^{(\pm 1)} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}(1, \pm i, 0). \tag{16.21}$$

В системе отсчета, где частица имеет импульс $\mathbf{p}$, амплитуды спиральных состояний — 4-векторы

$$u^{(0)\mu} = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}, \frac{\varepsilon}{m}\mathbf{e}^{(0)}\right), \quad u^{(\pm 1)\mu} = (0, \mathbf{e}^{(\pm 1)}). \tag{16.22}$$

Если $\mathbf{e}$ — полярный вектор, то $\eta = -1$. Тогда функции (16.17) (при $s = 1$ — трехмерные векторы) имеют следующие четности:

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}_{jm|\lambda|}&: \quad P = (-1)^j, \\ \psi^{(-)}_{jm|\lambda|}&: \quad P = (-1)^{j+1}, \\ \psi_{jm0}&: \quad P = (-1)^j. \end{aligned}$$

---

[1]) Выбор фазовых множителей фиксируется требованием, чтобы вычисленные с помощью собственных функций (16.21) матричные элементы операторов спина отвечали общим определениям в т. III, § 27, 107.

Сравнивая с определением шаровых векторов (7.4), мы видим, что эти функции тождественны (с точностью до фазовых множителей) соответственно с $\mathbf{Y}_{jm}^{(э)}$, $\mathbf{Y}_{jm}^{(м)}$, $\mathbf{Y}_{jm}^{(п)}$. Определив фазовые множители (скажем, путем сравнения значений при $\theta = 0$), получим следующие равенства:

$$\mathbf{Y}_{jm}^{(э)} = i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\left(\mathbf{e}^{(1)}D_{1m}^{(j)} + \mathbf{e}^{(-1)}D_{-1m}^{(j)}\right),$$
$$\mathbf{Y}_{jm}^{(м)} = i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}\left(\mathbf{e}^{(1)'}D_{1m}^{(j)} + \mathbf{e}^{(-1)'}D_{-1m}^{(j)}\right), \qquad (16.23)$$
$$\mathbf{Y}_{jm}^{(п)} = i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\mathbf{e}^{(0)}D_{0m}^{(j)}$$

(j — целое число!); $\mathbf{e}^{(\lambda)'} = [\mathbf{n}\mathbf{e}^{(\lambda)}]$ — циркулярные орты в осях $\xi'\eta'\zeta$ повернутых относительно $\xi\eta\zeta$ на $90°$ вокруг оси ζ.

Последняя из формул (16.23) эквивалентна выражению (58.23) (см. III) для $d_{0m}^{(j)}(\theta)$. Из первой же (или второй) формулы можно получить простое выражение для функций $d_{\pm 1m}^{(j)}$. Имеем

$$i^{j-1}\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}}D_{\pm 1m}^{(j)} = \mathbf{Y}_{jm}^{(э)}\mathbf{e}^{(\pm 1)*} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\mathbf{e}^{(\pm 1)*}\boldsymbol{\nabla}Y_{jm}.$$

Скалярное произведение в правой стороне равенства раскрываем в системе $\xi\eta\zeta$, причем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial\eta}\right) \to \left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

Вспомнив определение (7.2) функции Y_{jm} и определение (16.5), получим в результате

$$d_{\pm 1m}^{(j)}(\theta) = (-1)^{m+1}\sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!j(j+1)}}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{m}{\sin\theta}\right)P_j^m(\cos\theta),$$
$$m \geqslant 0. \qquad (16.24)$$

ГЛАВА III

ФЕРМИОНЫ

§ 17. Четырехмерные спиноры

В нерелятивистской теории частица с произвольным спином s описывается $(2s+1)$-компонентной величиной — симметричным спинором ранга $2s$. С математической точки зрения это — величины, реализующие неприводимые представления группы пространственных вращений.

В релятивистской теории эта группа выступает лишь как подгруппа более широкой группы четырехмерных вращений — группы Лоренца. В связи с этим возникает необходимость в построении теории четырехмерных спиноров (4-спиноров) — величин, осуществляющих неприводимые представления группы Лоренца; ее изложению посвящены § 17–19. При этом в § 17, 18 рассматривается лишь собственная группа Лоренца, не содержащая пространственной инверсии; последняя будет рассмотрена в § 19.

Теория 4-спиноров строится аналогично теории трехмерных спиноров (*B. L. van der Waerden*, 1929; *G. E. Uhlenbeck*, *O. Laporte*, 1931).

Спинор ξ^α есть двухкомпонентная величина ($\alpha = 1, 2$); как компоненты волновой функции частицы со спином $1/2$ ξ^1 и ξ^2 отвечают собственным значениям z-проекции спина, равным соответственно $+1/2$ и $-1/2$. При всяком преобразовании (собственной) группы Лоренца две величины ξ^1, ξ^2 преобразуются друг через друга:

$$\xi^{1'} = \alpha\xi^1 + \beta\xi^2, \quad \xi^{2'} = \gamma\xi^1 + \delta\xi^2. \tag{17.1}$$

Коэффициенты α, β, γ, δ — определенные функции углов поворота 4-системы координат, подчиненные условию

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{17.2}$$

т. е. определитель бинарного преобразования (17.1) равен 1, как и определители преобразований координат в группе Лоренца.

В силу условий (17.2) билинейная форма $\xi^1\Xi^2 - \xi^2\Xi^1$ (где ξ^α и Ξ^α — два спинора) инвариантна относительно преобразования (17.1) (она отвечает частице со спином 0, «составленной» из двух частиц со спином $1/2$). Для естественной записи таких инвариантных выражений наряду с «контравариантными» компонентами

спинора ξ^α вводятся также и «ковариантные» компоненты ξ_α. Переход от одних к другим совершается с помощью «метрического спинора» $g_{\alpha\beta}$ [1]):

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta}\xi^\beta, \tag{17.3}$$

где

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17.4}$$

так что

$$\xi_1 = \xi^2, \qquad \xi_2 = -\xi^1. \tag{17.5}$$

Тогда инвариант $\xi^1\Xi^2 - \xi^2\Xi^1$ записывается в виде скалярного произведения $\xi^\alpha\Xi_\alpha$. При этом $\xi^\alpha\Xi_\alpha = -\xi_\alpha\Xi^\alpha$.

До сих пор перечисленные свойства формально совпадали со свойствами трехмерных спиноров. Разница, однако, возникает при рассмотрении комплексно-сопряженных спиноров.

В нерелятивистской теории сумма

$$\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*}, \tag{17.6}$$

определяющая плотность вероятности локализации частиц в пространстве, должна была быть скаляром, а для этого компоненты $\psi^{\alpha*}$ должны были преобразовываться как ковариантные компоненты спинора; другими словами, преобразование (17.1) должно было быть унитарным ($\alpha = \delta^*$, $\beta = -\gamma^*$). В релятивистской же теории плотность частиц не является скаляром; она представляет собой временную компоненту 4-вектора. В связи с этим указанное требование отпадает и на коэффициенты преобразования не накладывается теперь никаких дополнительных (помимо (17.2)) условий. Четыре комплексные величины α, β, γ, δ при одном лишь условии (17.2) эквивалентны $8 - 2 = 6$ вещественным параметрам — в соответствии с числом углов, определяющих вращение 4-системы координат (повороты в шести координатных плоскостях).

Таким образом, комплексно-сопряженные бинарные преобразования оказываются существенно различными, так что в релятивистской теории существует два типа спиноров. Чтобы различить эти типы, приняты специальные обозначения: индексы спиноров, преобразующихся по формулам, комплексно-сопряженным формулам (17.1), записываются в виде цифр с точками над ними (*пунктирные индексы*). Таким образом, по определению,

$$\eta^{\dot\alpha} \sim \xi^{\alpha^*}, \tag{17.7}$$

[1]) Спинорные индексы будем обозначать первыми буквами греческого алфавита: α, β, γ, ...

где знак $\sim$ означает «преобразуется как». Другими словами, формулы преобразования «пунктирного» спинора:

$$\eta^{\dot{1}'} = \alpha^*\eta^{\dot{1}} + \beta^*\eta^{\dot{2}}, \quad \eta^{\dot{2}'} = \gamma^*\eta^{\dot{1}} + \delta^*\eta^{\dot{2}}. \tag{17.8}$$

Операции опускания и поднимания пунктирных индексов производятся так же, как и для непунктирных индексов:

$$\eta_{\dot{1}} = \eta^{\dot{2}}, \quad \eta_{\dot{2}} = -\eta^{\dot{1}}. \tag{17.9}$$

По отношению к пространственным вращениям поведение 4-спиноров совпадает с поведением 3-спиноров. У последних, как мы знаем, $\psi^*_\alpha \sim \psi^\alpha$. В силу определения (17.7) 4-спинор $\eta_{\dot{\alpha}}$ ведет себя, следовательно, при вращениях как контравариантный 3-спинор ψ^α. Собственным значениям проекции спина $1/2$ и $-1/2$ соответствуют поэтому ковариантные компоненты $\eta_{\dot{1}}$ и $\eta_{\dot{2}}$.

Спиноры высших рангов определяются как совокупности величин, преобразующихся как произведения компонент нескольких спиноров первого ранга. При этом среди индексов спинора высшего ранга могут быть как пунктирные, так и непунктирные. Например, существует три типа спиноров второго ранга:

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha \Xi^\beta, \quad \zeta^{\alpha\dot{\beta}} \sim \xi^\alpha \eta^{\dot{\beta}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sim \eta^{\dot{\alpha}} H^{\dot{\beta}}.$$

Тем самым указание одного лишь полного ранга спинора недостаточно для однозначного определения этого понятия; мы будем поэтому при необходимости указывать ранг в виде пары чисел (k, l) — числа непунктирных и числа пунктирных индексов.

Поскольку преобразования (17.1) и (17.8) алгебраически независимы, нет необходимости фиксировать последовательность пунктирных и непунктирных индексов (в этом смысле, например, спиноры $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ и $\zeta^{\dot{\beta}\alpha}$ — одно и то же).

Для того чтобы иметь инвариантный характер, всякое спинорное равенство должно содержать с обеих сторон одинаковое число непунктирных и пунктирных индексов; в противном случае оно заведомо нарушится при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом надо помнить, что комплексное сопряжение подразумевает замену пунктирных индексов непунктирными и наоборот. Поэтому имеет инвариантный характер соотношение $\eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \left(\xi^{\alpha\beta}\right)^*$ между двумя спинорами.

Свертывание спиноров или их произведений может производиться лишь по парам индексов одинакового рода — двум пунктирным или двум непунктирным. Суммирование же по паре индексов различного рода — не инвариантная операция. Поэтому из спинора

$$\zeta^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\ldots\dot{\beta}_l}, \tag{17.10}$$

симметричного по всем k непунктирным и по всем l пунктирным индексам, нельзя образовать спинор более низкого ранга (напомним, что упрощение по паре индексов, относительно которых спинор симметричен, дает в результате нуль). Это значит, что из величин (17.10) нельзя составить меньшего числа каких-либо их линейных комбинаций, которые бы преобразовывались друг через друга при всех преобразованиях группы. Другими словами, симметричные 4-спиноры реализуют неприводимые представления собственной группы Лоренца. Каждое неприводимое представление задается парой чисел $(k,\, l)$.

Поскольку каждый спинорный индекс пробегает два значения, имеется $k+1$ существенно различных наборов чисел $\alpha_1\alpha_2\,\ldots\,\alpha_k$ в (17.10) (содержащих 0, 1, 2, ... , k единиц и k, $k-1$, ... , 0 двоек) и $l+1$ наборов чисел $\dot\beta_1\dot\beta_2\,\ldots\,\dot\beta_l$. Всего, следовательно, симметричный спинор ранга $(k,\, l)$ имеет $(k+1)(l+1)$ независимых компонент; это и есть размерность осуществляемого им неприводимого представления.

§ 18. Связь спиноров с 4-векторами

Спинор $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ с одним пунктирным и одним непунктирным индексами имеет $2\cdot 2 = 4$ независимые компоненты — как раз столько, сколько компонент имеет 4-вектор. Ясно поэтому, что тот и другой реализуют одно и то же неприводимое представление собственной группы Лоренца, и между их компонентами должно иметься определенное соответствие.

Для установления этого соответствия обратимся прежде всего к аналогичному соответствию в трехмерном случае, учитывая, что по отношению к чисто пространственным вращениям поведение 3- и 4-спиноров должно быть одинаковым.

Для трехмерного спинора $\psi^{\alpha\beta}$ имеют место формулы соответствия (см. III, § 57), которые мы запишем здесь в виде

$$a_x = \frac{1}{2}(\psi^{22} - \psi^{11}) = \frac{1}{2}(\psi^2{}_1 + \psi^1{}_2),$$
$$a_y = -\frac{i}{2}(\psi^{22} + \psi^{11}) = \frac{i}{2}(\psi^1{}_2 - \psi^2{}_1),$$
$$a_z = \frac{1}{2}(\psi^{12} + \psi^{21}) = \frac{1}{2}(\psi^1{}_1 - \psi^2{}_2),$$

где a_x, a_y, a_z — компоненты некоторого трехмерного вектора $\mathbf{a}$. Переходя к четырехмерному случаю, надо заменить компоненты $\psi^\alpha{}_\beta$ на $\zeta^{\alpha\dot\beta}$, а под a_x, a_y, a_z понимать контравариантные компоненты a^1, a^2, a^3 4-вектора. Что же касается выражения для четвертой компоненты вектора, a^0, то его вид заранее ясен из

отмеченного в § 17 обстоятельства: величина (17.6) должна преобразовываться как a^0. Поэтому $a^0 \sim \zeta^{1\dot{1}} + \zeta^{2\dot{2}}$; коэффициент пропорциональности определяется так, чтобы скаляр $\zeta_{\alpha\dot{\beta}}\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ совпадал со скаляром $2a_\mu a^\mu \equiv 2a^2$.

Таким образом, мы приходим к следующим формулам соответствия:

$$a^1 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot{2}} + \zeta^{2\dot{1}}), \quad a^2 = \frac{i}{2}(\zeta^{1\dot{2}} - \zeta^{2\dot{1}}),$$
$$a^3 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot{1}} - \zeta^{2\dot{2}}), \quad a^0 = \frac{1}{2}(\zeta^{1\dot{1}} + \zeta^{2\dot{2}}). \tag{18.1}$$

Обратные формулы:

$$\zeta^{1\dot{1}} = \zeta_{2\dot{2}} = a^3 + a^0, \qquad \zeta^{2\dot{2}} = \zeta_{1\dot{1}} = a^0 - a^3,$$
$$\zeta^{1\dot{2}} = -\zeta_{2\dot{1}} = a^1 - ia^2, \quad \zeta^{2\dot{1}} = -\zeta_{1\dot{2}} = a^1 + ia^2. \tag{18.2}$$

При этом

$$\zeta_{\alpha\dot{\beta}}\zeta^{\alpha\dot{\beta}} = 2a^2. \tag{18.3}$$

Отметим также, что

$$\zeta_{\alpha\dot{\beta}}\zeta^{\gamma\dot{\beta}} = \delta_\alpha^\gamma a^2. \tag{18.4}$$

Последнее равенство следует из того, что спинор второго ранга $\zeta_{\alpha\dot{\beta}}\zeta_\gamma^{\dot{\beta}}$ антисимметричен по индексам $\alpha\gamma$ и потому пропорционален метрическому спинору.

Соответствие между спинором $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ и 4-вектором является частным случаем общего правила: всякий симметричный спинор ранга $(k,\, k)$ эквивалентен симметричному неприводимому (т. е. обращающемуся в нуль при упрощении по любой паре индексов) 4-тензору ранга k.

Связь между спинором и 4-вектором можно записать в компактном виде с помощью двухрядных матриц Паули [1]:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{18.5}$$

Если обозначить символически посредством ζ матрицу величин $\zeta^{\alpha\dot{\beta}}$ с верхними индексами (причем первый — непунктирный), то формулы (18.2) записываются в виде

$$\zeta = \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} + a^0 \tag{18.6}$$

[1]) Для упрощения обозначений операторы (матрицы), действующие на спиновые переменные, будем обозначать буквами без шляпок.

(во втором члене подразумевается, конечно, произведение a^0 на единичную матрицу). Обратные формулы:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\zeta\boldsymbol{\sigma}), \qquad a^0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\zeta. \tag{18.7}$$

С помощью формул (18.6), (18.7) можно установить связь между законами преобразования 4-вектора и спинора и тем самым выразить закон преобразования спинора через параметры поворотов 4-системы координат.

Запишем преобразование спинора ξ^α в виде

$$\xi^{\alpha'} = (B\xi)^\alpha, \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{18.8}$$

где B — двухрядная матрица, составленная из коэффициентов бинарного преобразования. Тогда преобразование пунктирного спинора:

$$\eta^{\dot\beta'} = (B^*\eta)^{\dot\beta} = \left(\eta B^+\right)^{\dot\beta}, \tag{18.9}$$

а преобразование спинора второго ранга $\zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha\eta^{\dot\beta}$ запишем символически как $\zeta' = B\zeta B^+$ [1]. При бесконечно малом преобразовании $B = 1 + \lambda$, где λ — малая матрица, и с точностью до малых величин первого порядка

$$\zeta' = \zeta + \left(\lambda\zeta + \zeta\lambda^+\right). \tag{18.10}$$

Рассмотрим сначала преобразование Лоренца к системе отсчета, движущейся с бесконечно малой скоростью $\delta\mathbf{V}$ (без изменения направления пространственных осей). При этом 4-вектор $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$ преобразуется согласно

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - a^0\delta\mathbf{V}, \qquad a^{0'} = a^0 - \mathbf{a}\delta\mathbf{V}. \tag{18.11}$$

Воспользуемся теперь формулами (18.7). Преобразование a^0 можно представить, с одной стороны, как

$$a^{0'} = a^0 - \mathbf{a}\delta\mathbf{V} = a^0 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(\zeta\boldsymbol{\sigma}\,\delta\mathbf{V}),$$

а с другой стороны, как

$$a^{0'} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\zeta' = a^0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\left(\lambda\zeta + \zeta\lambda^+\right) = a^0 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\zeta\left(\lambda + \lambda^+\right).$$

---

[1]) Для ковариантных компонент:

$$\xi'_\alpha = \left(\widetilde{B}^{-1}\xi\right)_\alpha = \left(\xi B^{-1}\right)_\alpha, \quad \eta'_{\dot\alpha} = \left(\eta B^{*-1}\right)_{\dot\alpha} \tag{18.8a}$$

(так, чтобы произведение двух спиноров $\xi_\alpha\Xi^\alpha$ оставалось инвариантным).

Эти выражения должны совпадать тождественно (т. е. при произвольном ζ). Отсюда находим следующее равенство:

$$\lambda + \lambda^{+} = -\boldsymbol{\sigma}\,\delta\mathbf{V}.$$

Таким же способом, рассмотрев преобразование **a**, получим

$$\boldsymbol{\sigma}\lambda + \lambda^{+}\boldsymbol{\sigma} = -\delta\mathbf{V}.$$

Эти равенства как уравнения для λ имеют следующее решение:

$$\lambda = \lambda^{+} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\,\delta\mathbf{V}.$$

Таким образом, бесконечно малое преобразование Лоренца спинора ξ^{α} осуществляется матрицей

$$B = 1 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\,\delta V, \tag{18.12}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении скорости $\delta\mathbf{V}$. Отсюда легко найти преобразование и для конечной скорости $\mathbf{V}$. Для этого вспомним, что преобразование Лоренца означает (геометрически) поворот 4-системы координат в плоскости $t\,\mathbf{n}$ на угол φ, связанный со скоростью $\mathbf{V}$ равенством $\operatorname{th}\varphi = V$ [1]). Бесконечно малому преобразованию соответствует угол $\delta\varphi = \delta V$, а поворот на конечный угол φ осуществляется $\varphi/\delta\varphi$-кратным повторением поворота на $\delta\varphi$. Возводя оператор (18.12) в степень $\varphi/\delta\varphi$ и переходя к пределу $\delta\varphi \to 0$, получаем

$$B = e^{-\frac{\varphi}{2}\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}}. \tag{18.13}$$

Математический смысл действия этого оператора выясняется, если заметить, что по свойствам матриц Паули все четные степени от $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ равны 1, а все нечетные степени равны $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$. Учитывая, что ch разлагается по четным, а sh — по нечетным степеням аргумента, получаем окончательно

$$B = \operatorname{ch}\frac{\varphi}{2} - \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}, \quad \operatorname{th}\varphi = V. \tag{18.14}$$

Отметим, что матрицы B преобразований Лоренца оказываются эрмитовыми: $B = B^{+}$.

Рассмотрим теперь бесконечно малый поворот пространственной системы координат. При этом трехмерный вектор **a** преобразуется согласно

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - [\delta\theta\,\mathbf{a}], \tag{18.15}$$

[1]) Напомним, что в плоскостях, содержащих ось времени, метрика псевдоевклидова.

где $\delta\theta$ — вектор бесконечно малого угла поворота. Соответствующее преобразование спинора можно было бы найти аналогичным образом. В этом, однако, нет необходимости, так как по отношению к пространственным поворотам поведение 4-спиноров совпадает с поведением 3-спиноров, а для последних преобразование известно заранее из общей связи оператора спина с оператором бесконечно малого поворота:

$$B = 1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\,\delta\theta. \tag{18.16}$$

Переход к повороту на конечный угол θ производится аналогично переходу от (18.12) к (18.14):

$$B = \exp\left(\frac{i\theta}{2}\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\frac{\theta}{2} + i\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{18.17}$$

где $\mathbf{n}$ — орт оси вращения. Эта матрица унитарна ($B^{+} = B^{-1}$), как и должно быть для пространственного поворота.

§ 19. Инверсия спиноров

При изложении (в т. III) трехмерной теории спиноров мы не рассматривали их поведения по отношению к операции пространственной инверсии, поскольку в нерелятивистской теории это не привело бы к каким-либо новым физическим результатам. Остановимся, однако, теперь на этом вопросе для лучшего уяснения последующего рассмотрения инверсионных свойств 4-спиноров.

Операция инверсии не меняет знака аксиального вектора, каковым является вектор спина. Поэтому не меняется и значение его проекции s_z. Отсюда, следует, что при инверсии каждая из компонент спинора ψ^{α} может преобразовываться только через саму себя, т. е. должно быть

$$\psi^{\alpha} \to P\psi^{\alpha}, \tag{19.1}$$

где P — постоянный коэффициент. Произведя инверсию дважды, мы вернемся к исходной системе координат. В случае спиноров, однако, возвращение к начальному положению можно понимать в двух различных смыслах: как поворот системы на 0° или на 360°. Для спиноров эти два определения не эквивалентны, так как ψ^{α} меняют знак при повороте на 360°. Таким образом, возможны две альтернативные концепции инверсии: в одном случае

$$P^2 = 1, \qquad P = \pm 1, \tag{19.2}$$

а в другом

$$P^2 = -1, \qquad P = \pm i. \tag{19.3}$$

Существенно при этом, что понятие инверсии должно быть определено одинаково для всех спиноров. Недопустимо, чтобы различные спиноры вели себя при инверсии различным образом (согласно (19.2) или (19.3)), так как тогда не из всяких двух спиноров можно было бы построить скаляр (или псевдоскаляр): если бы спинор ψ^α преобразовывался согласно (19.2), а φ^α — согласно (19.3), то величина $\psi^\alpha\varphi_\alpha$ умножилась бы при инверсии на $\pm i$ вместо того, чтобы оставаться неизменной (или менять только знак).

Следует также подчеркнуть, что (при любом определении инверсии) приписывание спинору той или иной четности P не имеет абсолютного смысла, поскольку спиноры меняют знак при повороте на 2π, который всегда можно произвести одновременно с инверсией. Абсолютный характер, однако, имеет «относительная четность» двух спиноров, определяемая как четность составленного из них скаляра $\psi^\alpha\varphi_\alpha$; поскольку при повороте на 2π меняют знак одновременно все спиноры, связанная с этим неопределенность не отражается на четности указанного скаляра.

Обратимся теперь к четырехмерным спинорам.

Отметим прежде всего, что поскольку инверсия меняет знак лишь трех (x, y, z) из четырех (t, x, y, z) координат, она коммутативна с пространственными вращениями, но не коммутативна с преобразованиями, поворачивающими ось t. Если $\widehat{L}$ есть преобразование Лоренца к системе отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{V}$, то $\widehat{P}\widehat{L} = \widehat{L}'\widehat{P}$, где $\widehat{L}'$ — преобразование к системе, движущейся со скоростью $-\mathbf{V}$.

Отсюда следует, что при инверсии компоненты 4-спинора ξ^α не могут преобразовываться через самих себя. Если бы инверсия спинора ξ^α заключалась по-прежнему в преобразовании (19.1) (т. е. изображалась бы матрицей, пропорциональной единичной матрице), то она коммутировала бы со всеми вообще преобразованиями Лоренца, чего заведомо не должно быть (так как операции $\widehat{L}$ и $\widehat{L}'$ в применении к ξ^α заведомо не совпадают).

Таким образом, инверсия должна преобразовывать компоненты спинора ξ^α через другие величины. Таковыми могут быть лишь компоненты некоторого другого спинора $\eta^{\dot\alpha}$, не совпадающего по своим трансформационным свойствам с ξ^α. Поскольку инверсия не меняет (как уже отмечалось выше) z-проекции спина, компоненты ξ^1 и ξ^2 могут перейти при инверсии лишь в компоненты $\eta_{\dot 1}$ и $\eta_{\dot 2}$, отвечающие тем же значениям $s_z = 1/2$ и $s_z = -1/2$. Понимая под инверсией операцию, дающую 1 при двукратном повторении, можно определить ее действие формулами

$$\xi^\alpha \to \eta_{\dot\alpha}, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to \xi^\alpha. \tag{19.4}$$

Для ковариантных компонент ξ_α и контравариантных $\eta^{\dot\alpha}$ эти преобразования имеют обратный знак:

$$\xi_\alpha \to -\eta^{\dot\alpha}, \qquad \eta^{\dot\alpha} \to -\xi_\alpha, \tag{19.4a}$$

так как опускание и поднимание одного и того же индекса происходит с различными знаками, см. (17.5) и (17.9) [1]). Если же инверсия понимается в таком смысле, что $P^2 = -1$, то ее действие определяется формулами

$$\xi^\alpha \to i\eta_{\dot\alpha}, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to i\xi^\alpha \tag{19.5}$$

или, что то же,

$$\xi_\alpha \to -i\eta^{\dot\alpha}, \qquad \eta^{\dot\alpha} \to -i\xi_\alpha. \tag{19.5a}$$

Некоторое различие в характере двух определений инверсии состоит в том, что при втором определении комплексно-сопряженные спиноры преобразуются одинаково: если $\Xi_\alpha = \eta^*_{\dot\alpha}$, $H^{\dot\alpha} = \xi^{\alpha *}$, то из (19.5) будем иметь $\Xi_\alpha \to -iH^{\dot\alpha}$, $H^{\dot\alpha} \to -i\Xi_\alpha$, т. е. такое же правило, как и для ξ_α, $\eta^{\dot\alpha}$. При определении же (19.4) мы получили бы преобразование $\Xi_\alpha \to H^{\dot\alpha}$, $H^{\dot\alpha} \to \Xi_\alpha$, обратное по знаку преобразованию спиноров ξ_α, $\eta^{\dot\alpha}$. К возможным физическим аспектам этого различия мы вернемся в § 27.

Ниже будем для определенности везде подразумевать определение (19.5).

По отношению к подгруппе вращении спиноры ξ^α и $\eta_{\dot\alpha}$ преобразуются, как мы знаем, одинаково. Образовав из их компонент комбинации

$$\xi^\alpha \pm \eta_{\dot\alpha}, \tag{19.6}$$

мы получили бы величины, преобразующиеся при инверсии согласно (19.1) с $P = \pm i$. Эти комбинации, однако, не ведут себя как спиноры по отношению ко всем преобразованиям группы Лоренца.

Таким образом, включение инверсии в группу симметрии требует одновременного рассмотрения пары спиноров (ξ^α, $\eta_{\dot\alpha}$); такую пару называют *биспинором* первого ранга). Четыре компоненты биспинора реализуют одно из неприводимых представлений расширенной группы Лоренца.

---

[1]) Определение (19.4), конечно, в известном смысле условно, что связано с независимостью величин ξ^α и $\eta_{\dot\alpha}$. Так, введя вместо $\eta_{\dot\alpha}$ новый спинор $\eta'_{\dot\alpha} = \varepsilon^{i\delta}\eta_{\dot\alpha}$, получим вместо (19.4) эквивалентное определение:

$$\xi^\alpha \to e^{-i\delta}\eta'_{\dot\alpha}, \quad \eta'_{\dot\alpha} \to e^{i\delta}\xi^\alpha.$$

Скалярное произведение двух биспиноров $(\xi^\alpha, \eta_{\dot\alpha})$ и $(\Xi^\alpha, H_{\dot\alpha})$ может быть образовано двумя способами. Величина

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha + \eta_{\dot\alpha} H^{\dot\alpha} \tag{19.7}$$

при инверсии вообще не меняется, т. е. является истинным скаляром. Величина

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha - \eta_{\dot\alpha} H^{\dot\alpha} \tag{19.8}$$

тоже инвариантна по отношению к поворотам 4-системы координат, но меняет знак при инверсии; другими словами, она является псевдоскаляром.

Двумя способами может быть определен также и спинор второго ранга $\zeta^{\alpha\dot\beta}$. Определив его законом преобразования

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha H^{\dot\beta} + \Xi^\alpha \eta^{\dot\beta}, \tag{19.9}$$

мы получим величины, преобразующиеся при инверсии согласно

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \to \zeta_{\dot\alpha\beta}. \tag{19.10}$$

При этом 4-вектор a^μ, которому эквивалентен такой спинор, преобразуется (в соответствии с формулами (18.1)) согласно $(a^0, \mathbf{a}) \to (a^0, -\mathbf{a})$, т. е. является истинным 4-вектором (а трехмерный вектор $\mathbf{a}$ — полярным вектором).

Можно, однако, определить $\zeta^{\alpha\dot\beta}$ также и согласно

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha H^{\dot\beta} - \Xi^\alpha \eta^{\dot{beta}}. \tag{19.11}$$

Тогда [1]

$$\zeta^{\alpha\dot\beta} \to -\zeta_{\dot\alpha\beta}. \tag{19.12}$$

Такому спинору соответствует 4-вектор, для которого инверсия означает преобразование $(a^0, \mathbf{a}) \to (-a^0, \mathbf{a})$, т. е. 4-псевдовектор (трехмерный же вектор а аксиален).

Симметричные спиноры второго ранга с индексами одинакового типа определяются законами преобразования:

$$\xi^{\alpha\beta} \sim \xi^\alpha \Xi^\beta + \xi^\beta \Xi^\alpha, \quad \eta_{\dot\alpha\dot\beta} \sim \eta_{\dot\alpha} H_{\dot\beta} + \eta_{\dot\beta} H_{\dot\alpha}. \tag{19.13}$$

При инверсии они переходят один в другой:

$$\xi^{\alpha\beta} \to -\eta_{\dot\alpha\dot\beta}. \tag{19.14}$$

---

[1] Подчеркнем, что законы преобразований (19.10) и (19.12), различающиеся знаком в правой стороне, отнюдь не эквивалентны, поскольку в обеих их сторонах стоят компоненты одного и того же спинора (ср. примеч. на с. 92).

Пара $\left(\xi^{\alpha\beta}, \eta_{\dot\alpha\dot\beta}\right)$ образует биспинор второго ранга. Число его независимых компонент равно 3+3 = 6. Столько же независимых компонент имеет антисимметричный 4-тензор второго ранга $a^{\mu\nu}$. Поэтому между тем и другим должно существовать определенное соответствие (оба реализуют эквивалентные неприводимые представления расширенной группы Лоренца).

Поскольку по отношению к собственной группе Лоренца спиноры $\xi^{\alpha\beta}$ и $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$ преобразуются независимо, то и из компонент 4-тензора $a^{\mu\nu}$ могут быть составлены две группы величин, преобразующихся только друг через друга при всех поворотах 4-системы координат. Это разбиение осуществляется следующим образом.

Введем трехмерный полярный вектор $\mathbf{p}$ и трехмерный аксиальный вектор $\mathbf{a}$, связанные с компонентами 4-тензора $a^{\mu\nu}$ согласно

$$a^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{p},\, \mathbf{a}) \tag{19.15}$$

($(\mathbf{p}, \mathbf{a})$ — краткое обозначение, которое мы будем применять для перечисления компонент такого тензора). При этом $a_{\mu\nu}=(-\mathbf{p}, \mathbf{a})$, а из двух величин

$$\mathbf{a}^2 - \mathbf{p}^2 = \frac{1}{2} a_{\mu\nu} a^{\mu\nu}, \quad \mathbf{ap} = \frac{1}{8} e_{\mu\nu\rho\sigma} a^{\mu\nu} a^{\rho\sigma}$$

первая является скаляром, а вторая псевдоскаляром; по отношению к собственной группе Лоренца тот и другой одинаково инвариантны. Вместе с ними инвариантны также и квадраты трехмерных векторов $\mathbf{f}^{\pm} = \mathbf{p} \pm i\mathbf{a}$. Это значит, что всякий поворот в 4-пространстве для векторов $\mathbf{f}^{\pm}$ эквивалентен «повороту» в трехмерном пространстве, вообще говоря, на комплексные углы (шести углам поворота в 4-пространстве соответствуют три комплексных «угла поворота» трехмерной системы). Операция же пространственной инверсии, меняя знак $\mathbf{p}$ (но не $\mathbf{a}$), переводит векторы $\mathbf{f}^{+}$ и $-\mathbf{f}^{-}$ друг в друга. Компоненты этих векторов и составляют искомые две группы величин, образованных из компонент тензора $a^{\mu\nu}$.

Тем самым становится очевидным также и соответствие между компонентами 4-тензора $a^{\mu\nu}$ и спиноров $\xi^{\alpha\beta}$, $\eta_{\dot\alpha\dot\beta}$. Поскольку в группу Лоренца входят в качестве подгруппы пространственные вращения, соотношения между компонентами спинора и компонентами трехмерного вектора должны быть такими же, как для

трехмерных спиноров:

$$\begin{aligned} &{f^+}_x = \frac{1}{2}\left(\xi^{22} - \xi^{11}\right), \quad {f^+}_y = \frac{i}{2}\left(\xi^{22} + \xi^{11}\right), \quad {f^+}_z = \xi^{12}; \\ &{f^-}_x = \frac{1}{2}\left(\eta_{\dot 2\dot 2} - \eta_{\dot 1\dot 1}\right), \quad {f^-}_y = \frac{i}{2}\left(\eta_{\dot 2\dot 2} + \eta_{\dot 1\dot 1}\right), \quad {f^-}_z = \eta_{\dot 1\dot 2}. \end{aligned} \tag{19.16}$$

Задача

Установить общее соответствие между спинорами четного ранга и 4-тензорами.

Решение. Все спиноры с четными $k+l$ реализуют однозначные неприводимые представления расширенной группы Лоренца и поэтому эквивалентны 4-тензорам, реализующим такие же представления [1]).

Спинор ранга (k,k) преобразуется при инверсии согласно

$$\zeta^{\alpha\beta\,\ldots\,\dot\gamma\dot\delta\,\ldots} \to \pm\zeta_{\dot\alpha\dot\beta\,\ldots\,\gamma\delta\,\ldots}. \tag{1}$$

Такой спинор эквивалентен симметричному неприводимому 4-тензору ранга k — истинному или псевдотензору в зависимости от знака в (1).

Спиноры рангов (k,l) и (l,k), составляющие биспинор, преобразуются при инверсии согласно

$$\zeta^{\overbrace{\alpha\beta\,\ldots}^{k}\,\overbrace{\dot\gamma\dot\delta\,\ldots}^{l}} \to (-1)^{\frac{k-l}{2}}\chi_{\underbrace{\dot\alpha\dot\beta\,\ldots}_{k}\,\underbrace{\gamma\delta\,\ldots}_{l}}. \tag{2}$$

При $l = k+2$ биспинор эквивалентен неприводимому 4-тензору $a_{[\mu\nu]\rho\sigma\,\ldots}$ ранга $k+2$, антисимметричному по индексам $[\mu\nu]$ и симметричному по всем остальным индексам. Неприводимость этого тензора означает, что он дает нуль при упрощении по любой паре индексов и дает нуль при образовании дуального по любым трем индексам (т. е. $e^{\lambda\mu\nu\sigma}a_{[\mu\nu]\rho\sigma\,\ldots} = 0$); последнее условие означает, что тензор дает нуль при взятии циклической суммы по трем индексам — $\mu\nu$ и одному (любому) из остальных.

При $l = k+4$ биспинор эквивалентен неприводимому 4-тензору $a_{[\lambda\mu][\nu\rho]\sigma\tau\,\ldots}$ ранга $k+4$ со следующими свойствами: он антисимметричен по парам индексов $[\lambda\mu]$ и $[\nu\rho]$, симметричен по всем остальным, симметричен по отношению к перестановке пары $[\lambda\mu]$ с парой $[\nu\rho]$, дает нуль при упрощении по любой паре индексов и дает нуль при образовании дуального по любой тройке индексов.

Вообще, при $l = k+2n$ биспинор эквивалентен неприводимому 4-тензору ранга $k+2n$, антисимметричному по n парам индексов и симметричному по остальным k индексам. 4-тензоры, антисимметричные по большему числу (тройкам, четверкам и т. д.) индексов, в этой классификации не появляются по очевидной причине: антисимметричный тензор третьего ранга эквивалентен (дуален) псевдовектору, а антисимметричный тензор четвертого ранга сводится к скаляру (пропорционален единичному псевдотензору $e^{\lambda\mu\nu\rho}$); антисимметрия же по еще большему числу индексов в 4-пространстве вообще невозможна.

[1]) Спиноры же нечетного ранга осуществляют двузначные представления группы: пространственный поворот на 360° меняет знак спиноров, так что каждому элементу группы отвечают две матрицы противоположного знака.

§ 20. Уравнение Дирака в спинорном представлении

Частица со спином $1/2$ описывается в своей системе покоя двухкомпонентной волновой функцией — 3-спинором. По своему «четырехмерному происхождению» это может быть как непунктирный, так и пунктирный 4-спинор. В описании частицы в произвольной системе отсчета участвуют оба таких 4-спинора; обозначим их посредством ξ^α и $\eta_{\dot\alpha}$ [1]).

Для свободной частицы единственным оператором, входящим в волновое уравнение, может быть (как уже указывалось в § 10) лишь оператор 4-импульса $\widehat{p}_\mu = i\partial_\mu$. В спинорных обозначениях этому 4-вектору соответствует операторный спинор $\widehat{p}_{\alpha\dot\beta}$, причем

$$\begin{aligned} &\widehat{p}^{1\dot1} = \widehat{p}_{2\dot2} = \widehat{p}_0 + \widehat{p}_z, \qquad &&\widehat{p}^{2\dot2} = \widehat{p}_{1\dot1} = \widehat{p}_0 - \widehat{p}_z, \\ &\widehat{p}^{1\dot2} = -\widehat{p}_{2\dot1} = \widehat{p}_x - i\widehat{p}_y, \qquad &&\widehat{p}^{2\dot1} = -\widehat{p}_{1\dot2} = \widehat{p}_x + i\widehat{p}_y. \end{aligned} \tag{20.1}$$

Волновое уравнение представляет собой линейную дифференциальную связь между компонентами спиноров, осуществляемую с помощью оператора $\widehat{p}_{\alpha\dot\beta}$. Требование релятивистской инвариантности фиксирует следующую систему уравнений:

$$\widehat{p}^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta} = m\xi^\alpha, \qquad \widehat{p}_{\dot\beta\alpha}\xi^\alpha = m\eta_{\dot\beta}, \tag{20.2}$$

где m — размерная постоянная. Вводить в эти два уравнения различные постоянные m_1 и m_2 (или же изменить знак перед m) было бы бессмысленно, так как надлежащим переопределением ξ^α или $\eta_{\dot\alpha}$ уравнения все равно могли бы быть приведены к прежнему виду.

Исключим из уравнений (20.2) один из двух спиноров, подставив $\eta_{\dot\beta}$ из второго уравнения в первое:

$$\widehat{p}^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta} = \frac{1}{m}\widehat{p}^{\alpha\dot\beta}\widehat{p}_{\gamma\dot\beta}\xi^\gamma = m\xi^\alpha.$$

Но согласно (18.4) $\widehat{p}^{\alpha\dot\beta}\widehat{p}_{\gamma\dot\beta} = \widehat{p}^2\delta^\alpha_\gamma$, так что получаем

$$\left(\widehat{p}^2 - m^2\right)\xi^\gamma = 0, \tag{20.3}$$

откуда видно, что m — масса частицы.

Обратим внимание на то, что необходимость введения массы в волновое уравнение требует одновременного рассмотрения

[1]) Трехмерный спинор первого ранга может «происходить» также от 4-спиноров более высоких нечетных рангов, которые в системе покоя становятся антисимметричными по одной или нескольким парам индексов. Такие варианты, однако, привели бы к уравнениям более высоких порядков (ср. примеч. на с. 52).

двух спиноров (ξ^α и $\eta_{\dot\alpha}$): с помощью лишь одного из них нельзя составить релятивистски инвариантное уравнение, которое содержало бы какой-либо размерный параметр. Тем самым волновое уравнение автоматически оказывается инвариантным относительно пространственной инверсии, если определить преобразование волновой функции как

$$P: \xi^\alpha \to i\eta_{\dot\alpha}, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to i\xi^\alpha. \tag{20.4}$$

Легко видеть, что при такой замене (и одновременной замене $\widehat{p}^{\dot\alpha\beta} \to \widehat{p}_{\alpha\dot\beta}$, очевидной из формул (20.1)) два уравнения (20.2) переходят друг в друга. Два спинора, переходящих друг в друга при инверсии, составляют четырехкомпонентную величину — биспинор.

Релятивистское волновое уравнение, изображаемое системой (20.2), называется *уравнением Дирака* (оно было установлено *Дираком* в 1928 г.). Для дальнейшего исследования и применения этого уравнения рассмотрим различные формы, в которых оно может быть представлено.

С помощью формулы (18.6) переписываем уравнения (20.2) в виде

$$(\widehat{p}_0 + \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma})\eta = m\xi, \quad (\widehat{p}_0 - \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma})\xi = m\eta. \tag{20.5}$$

Здесь символы ξ и η обозначают двухкомпонентные величины — спиноры

$$\xi = \begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix}\eta_{\dot1}\\ \eta_{\dot2}\end{pmatrix} \tag{20.6}$$

(первый — с верхними, а второй — с нижними индексами), а при умножении матриц σ на любую двухкомпонентную величину f здесь и ниже всегда подразумевается умножение по обычному матричному правилу

$$(\sigma f)_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} f_\beta. \tag{20.7}$$

Запись f в виде вертикального столбца $\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}$ отвечает тому, что каждая строка в σ перемножается со столбцом f.

Для удобства дальнейших ссылок выпишем здесь еще раз матрицы Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{20.8}$$

и напомним их основные свойства:

$$\sigma_i\sigma_k + \sigma_k\sigma_i = 2\delta_{ik}, \quad \sigma_i\sigma_k = ie_{ikl}\sigma_l + \delta_{ik} \tag{20.9}$$

(см. III, § 55).

Напишем также волновое уравнение, которому удовлетворяет комплексно-сопряженная волновая функция, составленная из спиноров

$$\xi^* = \left(\xi^{1^*}, \xi^{2^*}\right), \qquad \eta^* = \left(\eta^*_{\dot 1}, \eta^*_{\dot 2}\right). \tag{20.10}$$

Поскольку все операторы $\widehat{p}_\mu$ содержат множитель i, то $\widehat{p}^*_\mu = -\widehat{p}_\mu$. При взятии комплексно-сопряженного от обеих сторон уравнений (20.5) надо также учесть, что в силу эрмитовости матриц $\sigma(\sigma^* = \widetilde{\sigma})$

$$(\sigma f)^*_\alpha = \sigma^*_{\alpha\beta} f^*_\beta = f^*_\beta \sigma_{\beta\alpha} = (f^*\sigma)_\alpha,$$

и мы получаем уравнения в виде

$$\eta^*(\widehat{p}_0 + \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma}) = -m\xi^*, \quad \xi^*(\widehat{p}_0 - \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma}) = -m\eta^*. \tag{20.11}$$

В этой форме записи условно подразумевается, что оператор $\widehat{p}_\mu$ действуют на функцию, стоящую слева от них. Запись ξ^* и η^* в виде горизонтальных строк соответствует матричному умножению в этих уравнениях: строка f перемножается со столбцами в матрицах σ:

$$(f^*\sigma)_\alpha = f^*_\beta \sigma\beta\alpha. \tag{20.12}$$

Преобразование инверсии для ξ^*, η^* определяется как комплексно-сопряженное от преобразования (20.4):

$$P: \xi^{\alpha^*} \to -i\eta^*_{\dot\alpha}, \qquad \eta^*_{\dot\alpha} \to -i\xi^{\alpha^*}. \tag{20.13}$$

§ 21. Симметричная форма уравнения Дирака

Спинорная форма записи уравнения Дирака является наиболее естественной в том смысле, что она непосредственно выявляет его релятивистскую инвариантность. Однако в применениях могут оказаться более удобными другие представления волнового уравнения, получающиеся путем другого выбора четырех независимых компонент волновой функции.

Будем обозначать четырехкомпонентную волновую функцию символом ψ (с компонентами ψ_i, $i = 1, 2, 3, 4$). В спинорном представлении это есть биспинор:

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{21.1}$$

Но с равным правом можно выбрать в качестве независимых компонент ψ любые линейно независимые комбинации компонент спиноров ξ и η [1]. Условимся при этом ограничивать до-

[1]) Для краткости будем говорить о четырехкомпонентной величине ψ как о биспиноре также и в неспинорных ее представлениях.

пустимые линейные преобразования лишь требованием унитарности; такие преобразования не меняют составленные из ψ и ψ^* билинейные формы (см. § 28).

В общем случае произвольного выбора компонент ψ уравнение Дирака можно представить в виде

$$\widehat{p}_\mu \gamma^\mu_{ik} \psi_k = m\psi_i,$$

где γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ — некоторые четырехрядные матрицы (*матрицы Дирака*). Будем обычно записывать это уравнение в символической форме, опуская матричные индексы:

$$(\gamma\widehat{p} - m)\psi = 0, \tag{21.2}$$

где

$$\gamma\widehat{p} \equiv \gamma^\mu \widehat{p}_\mu = \widehat{p}_0\gamma^0 - \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\gamma} = i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \left(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\right).$$

спинорной форме уравнения с компонентами ψ из (21.1) соответствуют матрицы [1])

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{21.3}$$

как это легко видеть, записав уравнения (20.5) в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \widehat{p}_0 + \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma} \\ \widehat{p}_0 - \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

и сравнив с (21.2).

В общем случае матрицы γ должны удовлетворять лишь условиям, обеспечивающим равенство $\widehat{p}^2 = m^2$. Для выяснения этих условий умножим уравнение (21.2) слева на $\gamma\widehat{p}$. Имеем

$$\left(\gamma^\mu \widehat{p}_\mu\right)\left(\gamma^\nu \widehat{p}_\nu\right)\psi = m\left(\widehat{p}_\mu\gamma^\mu\right)\psi = m^2\psi.$$

Поскольку $\widehat{p}_\mu\widehat{p}_\nu$ — симметричный тензор (все операторы $\widehat{p}_\mu$ коммутативны), можно переписать это равенство как

$$\frac{1}{2}\widehat{p}_\mu\widehat{p}_\nu\left(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\right) = m^2\psi,$$

откуда видно, что должно быть

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \tag{21.4}$$

Таким образом, все пары различных матриц γ^μ антикоммутативны, а квадраты каждой из них:

$$\left(\gamma^1\right)^2 = \left(\gamma^2\right)^2 = \left(\gamma^3\right)^2 = -1, \quad \left(\gamma^0\right)^2 = 1. \tag{21.5}$$

[1]) Здесь и в дальнейшем используется краткая запись четырехрядных матриц через двухрядные: каждый символ в выражениях (21.3) представляет собой двухрядную матрицу.

При произвольном унитарном преобразовании компонент $\psi(\psi' = U\psi$, где U — унитарная четырехрядная матрица) матрицы γ преобразуются согласно

$$\gamma' = U\gamma U^{-1} = U\gamma U^{+} \tag{21.6}$$

(так что уравнение $(\gamma\widehat{p} - m)\psi = 0$ переходит в $(\gamma'\widehat{p} - m)\psi' = 0$). Перестановочные соотношения (21.4) при этом, разумеется, остаются неизменными.

Матрица γ^0 из (21.3) эрмитова, а матрицы γ антиэрмитовы. Эти свойства сохраняются и при всяком унитарном преобразовании (21.6), так что мы будем всегда иметь [1]:

$$\boldsymbol{\gamma}^{+} = -\boldsymbol{\gamma}, \qquad \gamma^{0+} = \gamma^0. \tag{21.7}$$

Напишем также уравнение для комплексно-сопряженной функции ψ^*. Взяв комплексно-сопряженное от уравнения (21.2), с учетом свойств (21.7) получим

$$(\widehat{p}_0\widetilde{\gamma}^0 - \widehat{\mathbf{p}}\widetilde{\boldsymbol{\gamma}} - m)\psi^* = 0.$$

Переставляем ψ^* согласно $\widetilde{\gamma}^\mu\psi^* = \psi^*\gamma^\mu$ и умножаем затем уравнение справа на γ^0; замечая, что $\boldsymbol{\gamma}\gamma^0 = -\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, и вводя новый биспинор

$$\overline{\psi} = \psi^*\gamma^0, \qquad \psi^* = \overline{\psi}\gamma^0, \tag{21.8}$$

получаем

$$\overline{\psi}(\gamma\widehat{p} + m) = 0. \tag{21.9}$$

Как и в (20.11), оператор $\widehat{p}$ предполагается здесь действующим на функцию, стоящую слева от него. Функцию $\overline{\psi}$ называют *дираковски-сопряженной* (или релятивистски-сопряженной) функции ψ. Смысл множителя γ^0 в ее определении заключается в том, что (в спинорном представлении) он переставляет спиноры ξ^* и η^* так, что в $\overline{\psi} = (\eta^*, \xi^*)$ первым оказывается (как и в ψ) непунктирный, а вторым — пунктирный спинор; именно по этой причине $\overline{\psi}$ является более естественным (чем ψ^*) «партнером» ψ, когда, например, они фигурируют совместно в различных билинейных комбинациях (см. § 28).

Преобразование инверсии для волновой функции можно представить в виде

$$P: \quad \psi \to i\gamma^0\psi, \quad \overline{\psi} \to -i\overline{\psi}\gamma^0. \tag{21.10}$$

При спинорном представлении ψ матрица γ^0 переставляет, как и должно быть при инверсии, компоненты ξ и η. Инвариантность

---

[1]) Эти равенства можно записать вместе в виде

$$\gamma^{\lambda+} = \gamma^0\gamma^\lambda\gamma^0. \tag{21.7 а}$$

уравнения Дирака относительно преобразования (21.10) в общем случае очевидна и непосредственно: заменив в уравнения (21.2) $\widehat{\mathbf{p}} \to -\widehat{\mathbf{p}}$ и одновременно $\psi \to i\gamma^0\psi$, получим

$$(\widehat{p}_0\gamma^0 + \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\gamma} - m)\gamma^0\psi = 0.$$

Умножив это уравнение слева на γ^0 и учитывая антикоммутативность γ^0 и $\boldsymbol{\gamma}$, вернемся к исходному уравнению.

Умножив уравнение $(\gamma\widehat{p} - m)\psi = 0$ слева на $\overline{\psi}$, а уравнение $\overline{\psi}(\gamma\widehat{p} + m) = 0$ справа на ψ и сложив их, получим

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\left(\widehat{p}_\mu\psi\right) + \left(\widehat{p}_\mu\overline{\psi}\right)\gamma^\mu\psi = \widehat{p}_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right) = 0,$$

где скобки указывают, на какую функцию распространяется действие оператора $\widehat{p}$. Полученное равенство имеет вид уравнения непрерывности $\partial_\mu j^\mu = 0$, так что величина

$$j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi = \left(\psi^*\psi, \psi^*\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\psi\right) \tag{21.11}$$

представляет собой 4-вектор плотности тока частиц. Отметим, что его временная компонента $j^0 = \psi^*\psi$ положительно определена.

Уравнение Дирака можно представить в форме, разрешенной относительно производной по времени:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widehat{H}\psi, \tag{21.12}$$

где $\widehat{H}$ — гамильтониан частицы [1]. Для этого достаточно умножить уравнение (21.2) слева на γ^0. Для гамильтониана получается выражение

$$\widehat{H} = \boldsymbol{\alpha}\widehat{\mathbf{p}} + \beta m, \tag{21.13}$$

где введено общепринятое обозначение для фигурирующих здесь матриц:

$$\mathbf{a} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}, \qquad \beta = \gamma^0. \tag{21.14}$$

Отметим, что

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}, \quad \beta\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\beta = 0, \quad \beta^2 = 1, \tag{21.15}$$

т. е. все матрицы $\boldsymbol{\alpha}$, β антикоммутируют друг с другом, а их квадраты равны 1; все они эрмитовы. В спинорном представлении

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21.16}$$

[1]) Для частицы со спином 0 волновое уравнение не могло быть представлено в таком виде: уравнение (10.5) для скаляра ψ — второго порядка по времени, а система (10.4) уравнений первого порядка для пятикомпонентиой величины (ψ, ψ_μ) содержит производные по времени не от всех компонент.

В предельном случае малых скоростей частица должна описываться, как и в нерелятивистской теории, всего одним двухкомпонентным спинором. Действительно, перейдя в уравнениях (20.5) к пределу $\mathbf{p} \to 0$, $\varepsilon \to m$, получим $\xi = \eta$, т. е. оба спинора, составляющие биспинор, совпадают друг с другом. Здесь, однако, проявляется недостаток спинорной формы записи уравнения Дирака: при предельном переходе остаются отличными от нуля все четыре компоненты ψ, хотя в действительности лишь две из них независимы. Более удобно такое представление волновой функции ψ, при котором в пределе две из ее компонент обращаются в нуль.

Соответственно этому введем вместо ξ и η их линейные комбинации φ и χ:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta). \tag{21.17}$$

Тогда для покоящейся частицы $\chi = 0$. Это представление ψ будем называть *стандартным.* При инверсии φ и χ преобразуются сами через себя согласно

$$P: \quad \varphi \to i\varphi, \qquad \chi \to -i\chi. \tag{21.18}$$

Уравнения для φ и χ получим, складывая и вычитая уравнения (20.5):

$$\widehat{p}_0\varphi - \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma}\chi = m\varphi, \qquad -\widehat{p}_0\chi + \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma}\varphi = m\chi. \tag{21.19}$$

Отсюда видно, что стандартному представлению отвечают матрицы

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{21.20}$$

Поскольку в (21.17) складываются отдельно первые и вторые компоненты ξ и η, то в стандартном представлении, как и в спинорном, компоненты ψ_1 и ψ_3 отвечают собственным значениям проекции спина $+1/2$, а ψ_2 и ψ_4 — проекции $-1/2$. В обоих этих представлениях, следовательно, матрица $1/2\boldsymbol{\Sigma}$, где

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{21.21}$$

представляет собой трехмерный оператор спина: при действии $1/2\Sigma_z$ на биспинор, содержащий лишь компоненты ψ_1, ψ_3 или ψ_2, ψ_4, биспинор умножается на $+1/2$ или $-1/2$. В произвольном представлении эта матрица может быть записана в виде

$$\boldsymbol{\Sigma} = -\mathbf{a}\gamma^5 = -\frac{i}{2}[\mathbf{aa}] \tag{21.22}$$

(определение γ^5 см. ниже, (22.14)).

З а д а ч и

1. Найти формулы преобразования волновой функции при бесконечно малом преобразовании Лоренца и бесконечно малом пространственном повороте.

Р е ш е н и е. В спинорном представлении ψ при бесконечно малом преобразовании Лоренца

$$\xi' = \left(1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\delta\mathbf{V}\right)\xi, \qquad \eta' = \left(1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\delta\mathbf{V}\right)\eta$$

(см. (18.8), (18.8а), (18.12)). Обе формулы можно записать вместе в виде

$$\psi' = \left(1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\delta\mathbf{V}\right)\psi. \tag{1}$$

Аналогичным образом закон преобразования при бесконечно малом повороте:

$$\psi' = \left(1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\Sigma}\delta\boldsymbol{\theta}\right)\psi. \tag{2}$$

В таком виде формулы справедливы в любом представлении ψ, если понимать под $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ матрицы в том же представлении.

Легко проверить, что матрицы $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$ составляют компоненты антисимметричного «матричного 4-тензора»

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = (\boldsymbol{\alpha}, i\boldsymbol{\Sigma})$$

(перечисление компонент дано по правилу (19.15)). Введем также бесконечно малый антисимметричный тензор $\delta\varepsilon^{\mu\nu} = (\delta\mathbf{V}, \delta\boldsymbol{\theta})$. Тогда

$$\sigma^{\mu\nu}\delta\varepsilon_{\mu\nu} = 2i\boldsymbol{\Sigma}\delta\boldsymbol{\theta} - 2\boldsymbol{\gamma}\delta\mathbf{V}$$

и обе формулы (1), (2) можно записать в едином виде:

$$\psi' = \left(1 + \frac{1}{4}\sigma^{\mu\nu}\delta\varepsilon_{\mu\nu}\right)\psi. \tag{3}$$

2. Написать уравнение Дирака в таком представлении, чтобы оно не содержало мнимых коэффициентов (*E. Majorana*, 1937).

Р е ш е н и е. В стандартном представлении в уравнении

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + im\beta\right)\psi = 0$$

мнимыми являются лишь матрицы α_y, и $i\beta$. Эту мнимость можно устранить, произведя такое преобразование $\psi' = U\psi$, в результате которого мнимая матрица α_y переставится с вещественной матрицей β. Для этого надо положить

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_y + \beta) = U^{-1}.$$

Тогда

$$\alpha'_x = U\alpha_x U = -\alpha_x, \quad \alpha'_y = \beta, \quad \alpha'_z = -\alpha_z, \quad \beta' = \alpha_y,$$

и уравнение Дирака приобретает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_x\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + im\alpha_y\right)\psi' = 0,$$

в котором все коэффициенты вещественны.

§ 22. Алгебра матриц Дирака

При вычислениях, связанных с уравнением Дирака, приходится широко пользоваться матрицами γ, не прибегая к их конкретному виду в том или ином определенном представлении. Правила оперирования этими матрицами всецело определяются перестановочными соотношениями

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{22.1}$$

выражающими все их общие свойства.

В этом параграфе мы приведем ряд формул и правил алгебры матриц γ, полезных в различных вычислениях.

«Скалярное произведение» матриц γ самих на себя: $g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = 4$. Для краткой записи введем, по аналогии с ковариантными компонентами 4-векторов, обозначение $\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$. Тогда

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4. \tag{22.2}$$

Если же матрицы γ_μ и γ^μ разделены одним или несколькими множителями γ, то одной или несколькими перестановками множителей (с помощью правила (22.1)) можно привести γ_μ и γ^μ к соседним положениям, после чего суммирование (по μ) совершается согласно (22.2). Таким способом получаются следующие формулы:

$$\begin{gathered}
\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\gamma^\nu, \\
\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu = 4g^{\lambda\nu}, \\
\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu = -2\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda, \\
\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu = 2(\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma).
\end{gathered} \tag{22.3}$$

Обычно множители $\gamma^\mu, \ldots$ фигурируют в комбинации с различными 4-векторами в виде «скалярных произведений» [1])

$$\gamma a \equiv \gamma^\mu a_\mu. \tag{22.4}$$

Для таких произведений формулы (22.1) принимают вид

$$(a\gamma)(b\gamma) + (b\gamma)(a\gamma) = 2(ab), \quad (a\gamma)(a\gamma) = a^2 \tag{22.5}$$

а формулы (22.3):

$$\begin{gathered}
\gamma_\mu(a\gamma)\gamma^\mu = -2(a\gamma), \\
\gamma_\mu(a\gamma)(b\gamma)\gamma^\mu = 4(ab), \\
\gamma_\mu(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma)\gamma^\mu = -2(c\gamma)(b\gamma)(a\gamma), \\
\gamma_\mu(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma)(d\gamma)\gamma^\mu = 2[(d\gamma)(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma) + (c\gamma)(b\gamma)(a\gamma)(d\gamma)].
\end{gathered} \tag{22.6}$$

[1]) В этом издании книги мы не пользуемся каким-либо специальным обозначением для такого произведения. В литературе часто используются обозначения буквами со шляпкой или перечеркнутыми буквами.

Широко используемой операцией является взятие следа произведения некоторого числа матриц γ. Рассмотрим величины

$$T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \equiv {}^1\!/_4\,\mathrm{Sp}\,(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_n})\,. \qquad (22.7)$$

В силу известного свойства следа произведения матриц этот тензор симметричен по отношению к циклическим перестановкам индексов $\mu_1\mu_2\dots\mu_n$.

Так как матрицы γ имеют одинаковый вид в произвольной системе отсчета, величины T также не зависят от выбора системы. Поэтому они образуют тензор, выражающийся только через обладающий этим свойством метрический тензор $g_{\mu\nu}$.

Но из тензора второго ранга $g_{\mu\nu}$ можно составить лишь тензоры четного ранга. Уже отсюда сразу следует, что след произведения любого нечетного числа множителей γ равен нулю. В частности, равен нулю след каждой из γ [1]):

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^\mu = 0. \qquad (22.8)$$

След единичной четырехрядной матрицы (которая подразумевается стоящей в правой стороне перестановочного соотношения (22.1)) равен 4. Поэтому из (22.1), взяв след от обеих сторон равенства, найдем

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \qquad (22.9)$$

След произведения четырех матриц

$$T^{\lambda\mu\nu\rho} = g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho} + g^{\lambda\rho}g^{\mu\nu}. \qquad (22.10)$$

Эту формулу можно получить, например, «протаскивая» в $\mathrm{Sp}(\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho)$ множитель γ^λ направо с помощью перестановочного соотношения (22.1); после каждой перестановки возникает один из фигурирующих в (22.10) членов:

$$T^{\lambda\mu\nu\rho} = 2g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho} - T^{\mu\lambda\nu\rho} = 2g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho} - T^{\mu\lambda\nu\rho}$$

и т. д. После всех перестановок справа остается $-T^{\mu\nu\rho\lambda} = -T^{\lambda\mu\nu\rho}$, которое переносим налево. Этим же способом вычисление следа произведения шести γ сводится к следам произведений четырех множителей и т. д. Так,

$$T^{\lambda\mu\nu\rho\sigma\tau} = g^{\lambda\mu}T^{\nu\rho\sigma\tau} - g^{\lambda\nu}T^{\mu\rho\sigma\tau} + g^{\lambda\rho}T^{\mu\nu\sigma\tau} - g^{\lambda\sigma}T^{\mu\nu\rho\tau} + g^{\lambda\tau}T^{\mu\nu\rho\sigma}. \qquad (22.11)$$

Отметим, что все следы $T^{\lambda\mu\dots}$ вещественны и что они отличны от нуля, лишь если каждая из матриц γ^0, γ^1, ... встречается

[1]) След матрицы инвариантен относительно преобразований $\gamma = U\gamma U^{-1}$. Поэтому (22.8) очевидно и из конкретных выражений матриц (21.3).

в произведении четное число раз; то и другое очевидно из полученных формул. Отсюда, в свою очередь, легко сделать вывод, что след не меняется при изменении порядка всех множителей на обратный:

$$T^{\lambda\mu\ldots\rho\sigma} = T^{\sigma\rho\ldots\mu\lambda}. \tag{22.12}$$

Как уже упоминалось, множители γ фигурируют обычно в виде скалярных произведений с различными 4-векторами. В таких случаях, например, формулы (22.9) и (22.10) означают, что

$$\begin{gathered} {}^1\!/\!{}_4\,\mathrm{Sp}(a\gamma)(b\gamma) = ab, \\ {}^1\!/\!{}_4\,\mathrm{Sp}(a\gamma)(b\gamma)(c\gamma)(d\gamma) = (ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc). \end{gathered} \tag{22.13}$$

Особую роль играет произведение $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Для него принято специальное обозначение:

$$\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{22.14}$$

Легко видеть, что

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0, \qquad (\gamma^5)^2 = 1, \tag{22.15}$$

т. е. матрица γ^5 антикоммутативна со всеми γ^μ. По отношению же к матрицам $\boldsymbol{\alpha}$ и β имеют место правила

$$\boldsymbol{\alpha}\gamma^5 - \gamma^5\boldsymbol{\alpha} = 0, \qquad \beta\gamma^5 + \gamma^5\beta = 0 \tag{22.16}$$

(коммутативность с $\boldsymbol{\alpha}$ следует из того, что $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$ есть произведение двух матриц γ^μ).

Матрица γ^5 эрмитова; действительно,

$$\gamma^{5+} = i\gamma^{3+}\gamma^{2+}\gamma^{1+}\gamma^{0+} = -i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0,$$

и поскольку последовательность 3210 сводится к последовательности 0123 четным числом перестановок, то

$$\gamma^{5+} = \gamma^5. \tag{22.17}$$

Укажем также вид этой матрицы в двух конкретных представлениях:

$$\begin{gathered} \text{спинорное} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{стандартное} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{22.18}$$

След матрицы γ^5 равен нулю:

$$\mathrm{Sp}\,\gamma^5 = 0 \tag{22.19}$$

(это видно и прямо из (22.18)). Равны нулю также и следы произведений $\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu$. Для произведений же γ^5 на четыре множителя γ^μ имеем

$${}^1\!/\!{}_4\,\mathrm{Sp}\,\gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = ie^{\lambda\mu\nu\rho}. \tag{22.20}$$

Отметим еще формулу:

$$\gamma N = i\gamma^5(\gamma a)(\gamma b)(\gamma c), \quad N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho}a_\mu b_\nu c_\rho, \tag{22.21}$$

справедливую для взаимно перпендикулярных 4-векторов a, b, c: $ab = ac = bc = 0$.

В некоторых случаях (в задачах, в которых фигурируют нерелятивистские частицы) может возникнуть необходимость в вычислении следов произведений, в которые входят раздельно γ^0 и трехмерный «вектор» $\boldsymbol{\gamma}$. Отличны от нуля лишь следы произведений с четным числом множителей γ^0 и $\boldsymbol{\gamma}$. При этом все множители γ^0 сводятся к 1, а следы произведений с двумя и четырьмя множителями $\boldsymbol{\gamma}$ даются формулами

$$\begin{gathered} {}^1\!/\!_4\, \mathrm{Sp}(\mathbf{a}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\gamma}) = -\mathbf{ab}, \\ {}^1\!/\!_4\, \mathrm{Sp}(\mathbf{a}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{b}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{c}\boldsymbol{\gamma})(\mathbf{d}\boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{ab})(\mathbf{cd}) - (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) + (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}). \end{gathered} \tag{22.22}$$

§ 23. Плоские волны

Состояние свободной частицы с определенными значениями импульса и энергии описывается плоской волной, которую представим в виде

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_p e^{-ipx}. \tag{23.1}$$

Индекс p указывает значение 4-импульса; амплитуда волны u_p — определенным образом нормированный биспинор.

При дальнейшем проведении вторичного квантования нам понадобятся, наряду с волновыми функциями (23.1), также и функции с «отрицательной частотой», возникающие в релятивистской теории, как было объяснено в § 11, в связи с двузначностью корня $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Как и в § 11, мы будем везде понимать под ε положительную величину $\varepsilon = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, так что «отрицательная частота» есть $-\varepsilon$; изменив также знак $\mathbf{p}$, мы получим функцию, которую естественно обозначить как ψ_{-p}:

$$\psi_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx}. \tag{23.2}$$

Смысл этих функций выяснится в § 26. Ниже мы будем параллельно выписывать формулы для ψ_p и ψ_{-p}.

Компоненты биспинорных амплитуд u_p и u_{-p} удовлетворяют системам алгебраических уравнений

$$(\gamma p - m)u_p = 0, \qquad (\gamma p + m)u_{-p} = 0, \tag{23.3}$$

получающимся подстановкой (23.1), (23.2) в уравнение Дирака

(что сводится к замене в последнем оператора $\widehat{p}$ на $\pm p$) [1]. Соотношение $p^2 = m^2$ является при этом условием совместности каждой из этих систем. Мы будем всегда нормировать биспинорные амплитуды инвариантными условиями

$$\overline{u}_p u_p = 2m, \qquad \overline{u}_{-p} u_{-p} = -2m \tag{23.4}$$

(черта над буквой обозначает, как везде, дираковское сопряжение: $\overline{u} = u^*\gamma^0$). Умножив уравнения (23.3) слева на $\overline{u}_{\pm p}$, получим $(\overline{u}_{\pm p}\gamma u_{\pm p})p = 2m^2 = 2p^2$, откуда видно, что

$$\overline{u}_p \gamma u_p = \overline{u}_{-p}\gamma u_{-p} = 2p \tag{23.5}$$

Отметим, что переход от формул для u_p к формулам для u_{-p} производится путем изменения знака m.

4-вектор плотности тока:

$$j = \overline{\psi}_{\pm p}\gamma\psi_{\pm p} = \frac{1}{2\varepsilon}\overline{u}_{\pm p}\gamma u_{\pm p} = \frac{p}{\varepsilon}, \tag{23.6}$$

т. е. $j^\mu = (1, \mathbf{v})$, где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\varepsilon$ — скорость частицы. Отсюда видно, что функции ψ_p нормированы «на одну частицу в объеме $V = 1$».

В силу уравнений (23.3) компоненты амплитуды волны связаны друг с другом некоторыми соотношениями, конкретный вид которых зависит, конечно, от выбора представления ψ. Найдем их для стандартного представления.

Из уравнений (21.19) имеем для плоской волны

$$(\varepsilon - m)\varphi - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\chi = 0, \quad (\varepsilon + m)\chi - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\varphi = 0. \tag{23.7}$$

Из этих равенств находим соотношение между φ и χ в двух эквивалентных видах:

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon - m}\chi, \quad \chi = \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon + m}\varphi \tag{23.8}$$

(эквивалентность этих формул очевидна: умножая первую из них слева на $\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}/(\varepsilon + m)$ и учитывая, что $(\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{p}^2$ и $\varepsilon^2 - m^2 = \mathbf{p}^2$, получаем вторую). Общий же множитель в φ и χ выбираем таким образом, чтобы удовлетворить условию нормировки (23.4). В результате получим для u_p (и аналогично для u_{-p}) следующие выражения:

$$u_p = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}\, w \\ \sqrt{\varepsilon - m}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})w \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})w' \\ \sqrt{\varepsilon + m}\, w' \end{pmatrix} \tag{23.9}$$

---

[1]) Отметим также аналогичные системы, получающиеся из уравнения Дирака (21.9) для комплексно-сопряженной функции:

$$\overline{u}_p(\gamma p - m) = 0, \qquad \overline{u}_{-p}(\gamma p + m) = 0. \tag{23.3a}$$

(вторая формула получается из первой изменением знака перед m и переобозначением $w \to (\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})w'$). Здесь $\mathbf{n}$ — орт вектора $\mathbf{p}$, а w — произвольная двухкомпонентная величина, удовлетворяющая лишь условию нормировки

$$w^* w = 1. \tag{23.10}$$

Для $\overline{u} = u^* \gamma^0$ (γ^0 из (21.20)) имеем

$$\begin{aligned} \overline{u}_p &= (\sqrt{\varepsilon + m}\, w^*, -\sqrt{\varepsilon - m}\, w^*(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})), \\ \overline{u}_{-p} &= (\sqrt{\varepsilon - m}\, w'^*(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}), -\sqrt{\varepsilon + m}\, w'^*) \end{aligned} \tag{23.11}$$

и перемножением убеждаемся, что действительно $\overline{u}_{\pm p} u_{\pm p} = \pm 2m$.

В системе покоя, т. е. при $\varepsilon = m$, имеем

$$u_p = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{-p} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ w' \end{pmatrix}, \tag{23.12}$$

т. е. w представляет собой тот 3-спинор, к которому сводятся в нерелятивистском пределе амплитуды каждой из волн. Отметим, что в биспиноре u_{-p} обращаются в нуль в системе покоя первые, а не вторые две компоненты. Это свойство решений уравнения Дирака с «отрицательными частотами» очевидно: положив в (23.7) $\mathbf{p} = 0$ и заменив ε на $-m$, получим $\varphi = 0$ [1]).

Амплитуда плоской волны содержит одну произвольную двухкомпонентную величину. Другими словами, при заданном импульсе существует два различных независимых состояния в соответствии с двумя возможными значениями проекции спина. При этом, однако, проекция спина на произвольную ось z не может иметь определенного значения. Это видно из того, что гамильтониан частицы с определенным $\mathbf{p}$ (т. е. матрица $H = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m$) не коммутативен с матрицей $\Sigma_z = -i\alpha_x\alpha_y$. В соответствии со сделанными в § 16 общими утверждениями сохраняется, однако, спиральность λ — проекция спина на направление $\mathbf{p}$: гамильтониан коммутативен с матрицей $\mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma}$.

Спиральным состояниям отвечают плоские волны, в которых трехмерный спинор $w = w^{(\lambda)}(\mathbf{n})$ — собственная функция оператора $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})w^{(\lambda)} = \lambda w^{(\lambda)}. \tag{23.13}$$

Явный вид этих спиноров:

$$w^{(\lambda=1/2)} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \; w^{(\lambda=-1/2)} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{23.14}$$

[1]) В спинорном же представлении имеем $\xi = -\eta$ вместо соотношения $\xi = \eta$, справедливого в системе покоя для решений с «положительными частотами».

где θ и φ — полярный угол и азимут направления $\mathbf{n}$ относительно фиксированных осей xyz [1]).

Другой возможный выбор двух независимых состояний свободной частицы с заданным $\mathbf{p}$ (более простой, хотя и менее наглядный) отвечает двум значениям z-проекции спина в системе покоя; обозначим ее σ. Соответствующие спиноры:

$$w^{(\sigma=1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w^{(\sigma=-1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{23.15}$$

В качестве же двух линейно независимых решений с «отрицательной частотой» мы выберем плоские волны, в которых трехмерные спиноры

$$w^{(\sigma)\prime} = -\sigma_y w^{(-\sigma)} = 2\sigma i w^{(\sigma)} \tag{23.16}$$

(смысл такого выбора выяснится в § 26).

Можно найти такое представление плоской волны, в котором в любой системе отсчета (а не только в системе покоя) она имеет всего две компоненты, отвечающие определенным значениям той же физической характеристики — проекции спина в системе покоя (*L. Foldy*, *S. A. Wouthuysen*, 1950).

Отправляясь от амплитуды u_p в стандартном представлении (23.9), ищем унитарное преобразование к такому представлению в виде

$$u'_p = U u_p, \qquad U = e^{W\boldsymbol{\gamma}\mathbf{n}},$$

где W — вещественная величина; поскольку $\boldsymbol{\gamma}^+ = -\boldsymbol{\gamma}$, при этом автоматически $U^+ = U^{-1}$. Разлагая в ряд и учитывая, что $(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{n})^2 = -1$, представим U в виде

$$U = \cos W + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{n}\sin W$$

(ср. переход от (18.13) к (18.14)). Из условия, чтобы в преобразованной амплитуде u'_p вторые две компоненты обратились в нуль, найдем

$$\operatorname{tg} W = \frac{|\mathbf{p}|}{m+\varepsilon},$$

так что

$$U = \frac{m + \varepsilon + (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{n})|\mathbf{p}|}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon+m)}}.$$

В новом представлении

$$u'_p = \sqrt{2\varepsilon}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{23.17}$$

---

[1]) Решение уравнений (23.13) допускает умножение на произвольный фазовый множитель, что связано с возможностью произвольного поворота вокруг направления $\mathbf{n}$.

Гамильтониан частицы в этом представлении принимает вид

$$\widehat{H}' = U(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m)U^{-1} = \beta\varepsilon \tag{23.18}$$

(все матрицы β, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$ стандартного представления). Этот гамильтониан коммутативен с матрицей

$$\boldsymbol{\Sigma} = -\boldsymbol{\alpha}\gamma^5 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

которая в новом представлении является оператором сохраняющейся величины — спина в системе покоя.

§ 24. Сферические волны

Волновые функции состояний свободной частицы (со спином $1/2$) с определенными значениями j момента представляют собой спинорные сферические волны. Определим их вид, для чего напомним предварительно аналогичные формулы нерелятивистской теории.

Нерелятивистская волновая функция есть 3-спинор $\psi = \binom{\psi^1}{\psi^2}$. Для состояния с определенными значениями энергии ε (а с нею и величины импульса p [1])), орбитального момента l, полного момента j и его проекции m волновая функция имеет вид

$$\psi = R_{pl}(r)\Omega_{jlm}(\theta, \varphi). \tag{24.1}$$

Ее угловая часть Ω_{jlm} — трехмерные спиноры, компоненты которых (для двух значений $j = l \pm 1/2$, возможных при данном l) даются формулами

$$\begin{aligned} \Omega_{l+1/2,\,l,\,m} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}}\,Y_{l,m-1/2} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}}\,Y_{l,\,m+1/2} \end{pmatrix}, \\ \Omega_{l-1/2,\,l,\,m} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}\,Y_{l,m-1/2} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}\,Y_{l,\,m+1/2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{24.2}$$

(см. III, § 106, задача). Будем называть Ω_{jlm} *шаровыми спинорами*. Они нормированы условием

$$\int \Omega^*_{jlm}\Omega_{j'l'm'}\,do = \delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{24.3}$$

Радиальные же функции R_{pl} представляют собой общий множитель в обеих компонентах спинора ψ и даются формулой

[1]) В этом параграфе p обозначает $|\mathbf{p}|$.

(33.10) (см. III):

$$R_{pl} = \sqrt{\frac{2\pi p}{r}} J_{l+1/2}(pr). \qquad (24.4)$$

Они нормированы условием

$$\int_0^\infty r^2 R_{p'l} R_{pl}\, dr = 2\pi\delta(p' - p). \qquad (24.5)$$

Возвращаясь к релятивистскому случаю, напомним прежде всего, что для движущейся частицы не существует раздельных законов сохранения спина и орбитального момента: операторы $\hat{\mathbf{s}}$ и $\hat{\mathbf{l}}$ каждый в отдельности не коммутируют с гамильтонианом. По-прежнему, однако, сохраняется (для свободной частицы) четность состояния. Поэтому квантовое число l теряет смысл указания на определенное значение орбитального момента, но им определяется (см. ниже) четность состояния.

Условимся рассматривать искомую волновую функцию (биспинор) в стандартном представлении: $\psi = \binom{\varphi}{\chi}$. По отношению к вращениям φ и χ ведут себя как 3-спиноры. Поэтому их угловая зависимость дается теми же шаровыми спинорами Ω_{jlm}. Пусть $\varphi \propto \Omega jlm$, где l — одно (определенное) из двух значений: $j + 1/2$ или $j - 1/2$. При инверсии $\varphi(\mathbf{r}) \to i\varphi(-\mathbf{r})$ (см. (21.18)), и поскольку $\Omega jlm(-\mathbf{n}) = (-1)^l \Omega_{jlm}(\mathbf{n})$, то

$$\varphi(\mathbf{r}) \to i(-1)^l \varphi(\mathbf{r}).$$

Составляющие же χ ведут себя при инверсии согласно $\chi(\mathbf{r}) \to \to -i\chi(-\mathbf{r})$. Для того чтобы состояние обладало определенной четностью (т. е. чтобы при инверсии все компоненты умножались на один и тот же множитель), необходимо, следовательно, чтобы угловая зависимость χ давалась шаровым спинором $\Omega_{jl'm}$ с другим (из двух возможных) значением l: поскольку эти значения различаются на 1, то $(-1)^{l'} = -(-1)^l$.

Далее, радиальная зависимость φ и χ будет определяться теми же функциями R_{pl} и $R_{pl'}$ (со значениями l и l', отвечающими порядку входящих в Ω_{jlm} шаровых функций). Это ясно из того, что каждая из компонент ψ удовлетворяет уравнению второго порядка $(\hat{p}^2 - m^2)\psi = 0$, которое при заданном значении $|\mathbf{p}|$ имеет вид

$$(\Delta + \mathbf{p}^2)\psi = 0,$$

формально совпадающий с нерелятивистским уравнением Шредингера для свободной частицы.

Таким образом,

$$\varphi = AR_{pl}\Omega_{jlm}, \qquad \chi = BR_{pl'}\Omega_{jl'm}, \tag{24.6}$$

и остается определить постоянные коэффициенты A и B. Для этого исследуем удаленную область, в которой сферическую волну можно рассматривать как плоскую. Согласно асимптотической формуле (33.12) (см. III)

$$R_{pl} \approx \frac{1}{ir}\left\{e^{i\left(pr-\frac{\pi l}{2}\right)} - e^{-i\left(pr-\frac{\pi l}{2}\right)}\right\}, \tag{24.7}$$

так что φ представляет собой разность двух плоских волн, распространяющихся в направлениях $\pm\mathbf{n}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$). Для каждой из них имеем согласно (23.8)

$$\chi = \frac{p}{\varepsilon + m}(\pm\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\varphi.$$

Из сказанного выше (формулы (24.6)) ясно, что $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\Omega_{jlm} = a\Omega_{jl'm}$, где a — постоянная. Эту постоянную легко определить, сравнив значения обеих сторон равенства при $m = 1/2$ и направлении $\mathbf{n}$ вдоль оси z. Использовав (7.2а), найдем

$$(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\Omega_{jlm} = i^{l'-l}\Omega_{jl'm}. \tag{24.8}$$

Собрав написанные формулы и сравнив с (24.6), получим

$$B = -\frac{p}{\varepsilon + m}A.$$

Наконец, коэффициент A определяется общей нормировкой ψ. Нормируя ψ условием

$$\int \psi^*_{pjlm}\psi_{p'j'l'm'}\, d^3x = 2\pi\delta_{jj'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta(p - p'), \tag{24.9}$$

находим окончательно

$$\psi_{pjlm} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}\, R_{pl}\, \Omega_{jlm} \\ -\sqrt{\varepsilon - m}\, R_{pl'}\, \Omega_{jl'm} \end{pmatrix}, \quad l' = 2j - l. \tag{24.10}$$

Таким образом, при заданных значениях j и m (и энергии ε) существует два состояния, различающихся своей четностью. Последняя однозначно определяется числом l, принимающим значения $j \pm 1/2$: при инверсии биспинор (24.10) умножается на $i(-1)^l$. Компоненты этого биспинора, однако, содержат шаровые функции обоих порядков l и l', в чем выражается отсутствие определенного значения орбитального момента.

При $r \to \infty$ в каждом небольшом участке пространства сферические волны (24.7) можно рассматривать как плоские с импульсом $\mathbf{p} = \pm p\,\mathbf{n}$. Поэтому ясно, что волновые функции в импульсном представлении отличаются от (24.10) в основном лишь

отсутствием радиальных множителей и приданием $\mathbf{n}$ смысла направления импульса.

Для прямого перехода к импульсному представлению надо произвести разложение Фурье:

$$\psi(\mathbf{p}') = \int \psi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}}\, d^3x, \tag{24.11}$$

Интеграл вычисляется с помощью формулы разложения плоской волны по сферическим (см. III, (34.3)):

$$e^{i\mathbf{pr}} = \frac{2\pi}{p} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} i^l R_{pl}(r) Y^*_{lm}\left(\frac{\mathbf{p}}{p}\right) Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right). \tag{24.12}$$

Представляя множитель $e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}}$ в (24.11) в виде такого разложения и учитывая (24.5), для компонент Фурье функции

$$\psi(\mathbf{r}) = R_{pl}(r) \Omega_{jlm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

получаем,

$$\psi(\mathbf{p}') = \frac{(2\pi)^2}{p} \delta(p' - p) i^{-l} Y_{lm'}\left(\frac{\mathbf{p}'}{p'}\right) \int \Omega_{jlm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) Y^*_{lm'}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) do.$$

Стоящий здесь интеграл равен коэффициентам при шаровых функциях в определении шаровых спиноров (24.2), а вместе с множителем $Y_{lm'}(\mathbf{p}'/p')$ снова образует тот же шаровой спинор, но уже от аргумента $\mathbf{p}'/p'$:

$$\psi(\mathbf{p}') = \frac{(2\pi)^2}{p} \delta(p' - p) i^{-l} \Omega_{jlm}\left(\frac{\mathbf{p}'}{p'}\right).$$

Применив этот результат к биспинорной волновой функции (24.10), получим ее импульсное представление

$$\psi_{pjlm}(\mathbf{p}') = \delta(p' - p) \frac{(2\pi)^2}{p\sqrt{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}\, i^{-l}\, \Omega_{jlm}(\mathbf{p}'/p') \\ \sqrt{\varepsilon - m}\, i^{-l'}\, \Omega_{jl'm}(\mathbf{p}'/p') \end{pmatrix}. \tag{24.13}$$

Состояния $|pjlm\rangle$ совпадают с рассмотренными в § 16 состояниями $|pjm|\lambda|\rangle$ (где $|\lambda| = 1/2$): те и другие обладают определенными значениями pjm и четности. Поэтому шаровые спиноры Ω_{jlm} выражаются через функции $D^{(j)}_{\lambda m}$ (те и другие — от аргумента $\mathbf{p}/p$). При $p \to 0$ волновые функции (24.13) сводятся к 3-спинорам Ω_{jlm}, четность которых $P = \eta(-1)^l$ (где $\eta = i$ — «внутренняя четность» спинора). Сравнение с результатами § 16 приводит к следующей формуле:

$$\Omega_{jlm} = i^l \sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}} (w^{(-1/2)} D^{(j)}_{-1/2\,m} \pm w^{(1/2)} D^{(j)}_{1/2\,m}) \tag{24.14}$$

(при $l = j \mp 1/2$), где $w^{(\lambda)}$ — 3-спиноры (23.14).

§ 25. Связь спина со статистикой

Вторичное квантование поля частиц со спином $1/2$ (спинорного поля) производится таким же образом, как это было сделано в § 11 для скалярного поля.

Не повторяя заново всех рассуждений, напишем сразу выражения для операторов поля, вполне аналогичные формулам (11.2):

$$\begin{aligned} \widehat{\psi} &= \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\widehat{a}_{\mathbf{p}\sigma} u_{p\sigma} e^{-ipx} + \widehat{b}^{+}_{\mathbf{p}\sigma} u_{-p-\sigma} e^{ipx} \right), \\ \widehat{\overline{\psi}} &\equiv \widehat{\psi}^{+}\gamma^0 = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(\widehat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma} \overline{u}_{p\sigma} e^{ipx} + \widehat{b}_{\mathbf{p}\sigma} \overline{u}_{-p-\sigma} e^{-ipx} \right); \end{aligned} \tag{25.1}$$

суммирование производится по всем значениям импульса $\mathbf{p}$ и по $\sigma = \pm 1/2$. Операторы уничтожения античастиц $\widehat{b}_{\mathbf{p}\sigma}$ (как и операторы уничтожения частиц $\widehat{a}_{\mathbf{p}\sigma}$) стоят в виде коэффициентов при функциях, которые по своей координатной зависимости ($e^{i\mathbf{pr}}$) соответствуют состоянию с импульсом $\mathbf{p}$ [1]).

Для вычисления гамильтониана спинорного поля нет необходимости в определении его тензора энергии-импульса (как мы это делали для скалярного поля), поскольку в этом случае существует гамильтониан частицы, с помощью которого может быть записано волновое уравнение (уравнение Дирака) (21.12). Средняя энергия частицы в состоянии с волновой функцией ψ есть интеграл

$$\int \psi^* \widehat{H} \psi \, d^3x = i \int \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \, d^3x = i \int \overline{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} \, d^3x. \tag{25.2}$$

Обратим внимание на то, что «плотность энергии» (подынтегральное выражение) не является здесь положительно определенной величиной.

Заменяя в (25.2) функции ψ и $\overline{\psi}$ на ψ-операторы, учитывая взаимную ортогональность волновых функций с различными $\mathbf{p}$ или σ, а также соотношение $\overline{u}_{\pm p\sigma}\gamma^0 u_{\pm p\sigma} = 2\varepsilon$ для волновых амплитуд, получаем гамильтониан поля в виде

$$\widehat{H} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon \left(\widehat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma} \widehat{a}_{\mathbf{p}\sigma} - \widehat{b}_{\mathbf{p}\sigma} \widehat{b}^{+}_{\mathbf{p}\sigma} \right). \tag{25.3}$$

Отсюда видно, что в данном случае квантование должно производиться по Ферми:

$$\left\{ \widehat{a}_{\mathbf{p}\sigma}, \widehat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma} \right\}_{+} = 1, \qquad \left\{ \widehat{b}_{\mathbf{p}\sigma}, \widehat{b}^{+}_{\mathbf{p}\sigma} \right\}_{+} = 1, \tag{25.4}$$

---

[1]) Те и другие функции отвечают также одинаковым значениям σ проекции спина в системе покоя; для функций $\overline{\psi}_{-p-\sigma}$ это будет показано в § 26 — см. (26.10).

а все другие пары операторов $\widehat{a}$, $\widehat{a}^+$, $\widehat{b}$, $\widehat{b}^+$ антикоммутативны (см. III, § 65). Действительно, гамильтониан (25.3) переписывается тогда в виде

$$\widehat{H} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon(\widehat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{p}\sigma} + \widehat{b}^+_{\mathbf{p}\sigma}\widehat{b}_{\mathbf{p}\sigma} - 1),$$

и собственные значения энергии (как всегда, за вычетом бесконечной аддитивной постоянной):

$$E = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon(N_{\mathbf{p}\sigma} + \overline{N}_{\mathbf{p}\sigma}), \tag{25.5}$$

т. е. оказываются, как и следовало, положительно определенными. При квантовании же по Бозе мы получили бы из (25.3) бессмысленные не положительно определенные собственные значения

$$\sum \varepsilon(N_{\mathbf{p}\sigma} - \overline{N}_{\mathbf{p}\sigma})$$

Аналогичное (25.5) выражение

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \mathbf{p}(N_{\mathbf{p}\sigma} + \overline{N}_{\mathbf{p}\sigma}) \tag{25.6}$$

получается и для импульса системы — собственных значений оператора $\int \widehat{\psi}^+\widehat{\mathbf{p}}\widehat{\psi}\, d^3x$.

Оператор 4-тока

$$\widehat{j}^\mu = \widehat{\overline{\psi}}\gamma^\mu\widehat{\psi}, \tag{25.7}$$

и для оператора «заряда» поля получаем

$$\widehat{Q} = \int \widehat{\overline{\psi}}\gamma^0\widehat{\psi}\, d^3x = \sum_{\mathbf{p}\sigma}(\widehat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{p}\sigma} + \widehat{b}_{\mathbf{p}\sigma}\widehat{b}^+_{\mathbf{p}\sigma}) = \sum_{\mathbf{p}\sigma}(\widehat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma}\widehat{a}_{\mathbf{p}\sigma} - \widehat{b}^+_{\mathbf{p}\sigma}\widehat{b}_{\mathbf{p}\sigma} + 1), \tag{25.8}$$

его собственные значения

$$Q = \sum_{\mathbf{p}\sigma}(N_{\mathbf{p}\sigma} - \overline{N}_{\mathbf{p}\sigma}) \tag{25.9}$$

Таким образом, мы снова приходим к представлению о частицах и античастицах, к которым относится все сказанное по их поводу в § 11.

Но в то время как частицы со спином 0 являются бозонами, частицы со спином $^1/_2$ оказываются фермионами. Если проследить за формальным происхождением этого различия, то мы увидим, что оно возникает в связи с разницей в характере выражений «плотности энергии» для скалярного и спинорного полей. В первом случае это выражение оказывается положительно определенным, в результате чего в гамильтониан (11.3) оба члена

($\hat{a}^+\hat{a}$ и $\widehat{b}\widehat{b}^+$) входят со знаком плюс. Для обеспечения положительности собственных значений энергии замена $\widehat{b}\widehat{b}^+$ на $\hat{b}^+\hat{b}$ должна происходить при этом без изменения знака, т. е. по правилу коммутации Бозе. В случае же спинорного поля «плотность энергии» не является положительно определенной величиной, в результате чего в гамильтониане (25.3) член $\widehat{b}\widehat{b}^+$ оказывается со знаком минус, и для получения положительных собственных значений замена $\widehat{b}\widehat{b}^+$ на $\hat{b}^+\hat{b}$ должна сопровождаться изменением знака, т. е. происходить по правилу коммутации Ферми.

С другой стороны, вид плотности энергии непосредственно связан с трансформационными свойствами волновой функции и с требованиями релятивистской инвариантности. В этом смысле можно сказать, что и связь спина со статистикой, которой подчиняются частицы, тоже является прямым следствием этих требований.

Из того факта, что частицы со спином $1/2$ являются фермионами, следует также общее утверждение: все частицы с полуцелым спином являются фермионами, а частицы с целым спином — бозонами (в том числе доказанное в § 11 утверждение для частицы со спином 0) [1].

Это становится очевидным, если заметить, что частицу со спином s можно представить себе «составленной» из $2s$ частиц со спином $1/2$. При полуцелом s число $2s$ нечетно, а при целом s — четно. Между тем « сложная» частица, содержащая четное число фермионов, является бозоном, а содержащая нечетное число фермионов — фермионом [2].

Если система состоит из частиц разного рода, то для каждого рода частиц должны быть введены свои операторы рождения и уничтожения. При этом операторы, относящиеся к различным бозонам или же к бозонам и фермионам, коммутируют друг с другом. Что же касается операторов, относящихся к различным фермионам, то в пределах нерелятивистской теории их можно было считать либо коммутирующими, либо антикоммутирующими (III, § 65). В релятивистской же теории, допускающей взаимные превращения частиц, следует считать операторы рождения и уничтожения различных фермионов антикоммутирующими, так

[1]) Происхождение связи между спином частицы и статистикой, которой она подчиняется, было выяснено *Паули* (*W. Pauli*, 1940).

[2]) В этих рассуждениях подразумевается, что все частицы с одинаковым спином должны подчиняться одной статистике (вне зависимости от способа их «составления»). Что это действительно так, видно из аналогичных рассуждений. Так, если бы существовали фермионы со спином 0, то из фермиона со спином 0 и фермиона со спином $1/2$ можно было бы составить частицу со спином $1/2$, которая была бы бозоном — в противоречии с общим доказанным для спина $1/2$ результатом.

же как и операторы, относящиеся к различным состояниям одних и тех же фермионов.

З а д а ч а

Найти лагранжиан спинорного поля.

Р е ш е н и е. Функция Лагранжа, отвечающая уравнению Дирака, дается вещественным скалярным выражением

$$L = \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \overline{\psi}\cdot\gamma^\mu\psi\right) - m\overline{\psi}\psi. \tag{1}$$

Понимая под «обобщенными координатами» q компоненты ψ и $\overline{\psi}$, легко убедиться в том, что соответствующие уравнения Лагранжа (10.10) совпадают с уравнениями Дирака для $\overline{\psi}$ и ψ. Общий знак лагранжиана (как и общий коэффициент в нем) в данном случае условен. Поскольку L содержит производные от ψ и $\overline{\psi}$ линейно, действие $S = \int L\, d^4x$ все равно не может иметь ни минимума, ни максимума. Условие $\delta S = 0$ определяет в этом случае лишь стационарную точку, но не экстремум интеграла.

Лагранжиан спинорного поля получается заменой в (1) ψ оператором $\widehat{\psi}$. Применив к этому лагранжиану формулу (12.12), получим оператор тока (25.7).

§ 26. Зарядовое сопряжение и обращение спиноров по времени

Множители $\psi_{p\sigma} = u_{p\sigma}e^{-ipx}$, стоящие в (25.1) при операторах $\widehat{a}_{\mathbf{p}\sigma}$, представляют собой волновые функции свободных частиц (будем говорить «электронов») с импульсами $\mathbf{p}$ и поляризациями σ:

$$\psi^{(\text{э})}_{p\sigma} = \psi_{p\sigma}.$$

Множители же $\overline{\psi}_{-p-\sigma}$ при операторах $\widehat{b}_{\mathbf{p}\sigma}$ надо рассматривать как волновые функции позитронов с теми же $\mathbf{p}$, σ. При этом, однако, окажется, что электронные и позитронные функции выражены в различных биспинорных представлениях. Это ясно из того, что ψ и $\overline{\psi}$ различны по своим трансформационным свойствам и их компоненты удовлетворяют различным системам уравнений. Для устранения этого недостатка надо произвести определенное унитарное преобразование компонент $\overline{\psi}_{-p-\sigma}$ — такое, чтобы новая четырехкомпонентная функция удовлетворяла тому же уравнению, что и $\psi_{p\sigma}$ [1]). Именно такую функцию мы и будем называть волновой функцией позитрона (с импульсом $\mathbf{p}$ и поляризацией σ). Обозначив матрицу требуемого унитарного

[1]) Для частиц со спином 0 этот вопрос вообще не возникал, так как скалярные функции ψ и ψ^* удовлетворяют одному и тому же уравнению, и ψ^*_{-p} просто совпадает с ψ_p.

преобразования U_C, напишем

$$\psi^{(\text{п})}_{p\sigma} = U_C \overline{\psi}_{-p-\sigma}. \tag{26.1}$$

Операция C, с помощью которой эта функция образуется из $\psi_{-p-\sigma}$, называется *зарядовым сопряжением* волновой функции (*H. A. Kramers*, 1937). Это понятие не ограничено, конечно, его применением к плоским волнам. Для всякой вообще функции ψ существует «зарядово-сопряженная» функция

$$\widehat{C}\psi(t, \mathbf{r}) = U_C \overline{\psi}(t, \mathbf{r}), \tag{26.2}$$

преобразующаяся, как ψ, и удовлетворяющая тому же уравнению.

Свойства матрицы U_C следуют из этого определения. Если ψ — решение уравнения Дирака $(\gamma\widehat{p} - m)\psi = 0$, то $\overline{\psi}$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{\psi}(\gamma\widehat{p} + m) = 0, \quad \text{или} \quad (\widetilde{\gamma}\widehat{p} + m)\overline{\psi} = 0.$$

Умножив это уравнение слева на U_C:

$$U_C\widetilde{\gamma}\,\widehat{p}\,\overline{\psi} + mU_C\overline{\psi} = 0,$$

потребуем, чтобы функция $U_C\overline{\psi}$ удовлетворяла тому же уравнению, что и ψ:

$$(\gamma\widehat{p} - m)U_C\overline{\psi} = 0.$$

Сравнив оба уравнения, найдем следующее «соотношение коммутации» между U_C и матрицами γ^μ [1]):

$$U_C\widetilde{\gamma}^\mu = -\gamma^\mu U_C. \tag{26.3}$$

Будем предполагать далее, что волновые функции заданы в спинорном или стандартном представлении (к общему случаю произвольного представления мы вернемся лишь в конце этого параграфа). В этих представлениях

$$\begin{gathered} \gamma^{0,2} = \widetilde{\gamma}^{0,2}, \quad \gamma^{1,3} = -\widetilde{\gamma}^{1,3}, \\ \left(\gamma^{0,1,3}\right)^* = \gamma^{0,1,3}, \quad \gamma^{2*} = -\gamma^2. \end{gathered} \tag{26.4}$$

Тогда условиям (26.3) удовлетворяет матрица $U_C = \eta_C\gamma^2\gamma^0$ с произвольной постоянной η_C. Из требования $\widehat{C}^2 = 1$ следует, что $|\eta_C|^2 = 1$, так что матрица U_C определена с точностью до

[1]) Отметим также следующее отсюда равенство:

$$U_C\widetilde{\gamma}^5 = \gamma^5 U_C. \tag{26.3a}$$

фазового множителя. В дальнейшем мы выберем $\eta_C = 1$, так что

$$U_C = \gamma^2\gamma^0 = -\alpha_y. \tag{26.5}$$

Заметив также, что $\overline{\psi} = \psi^*\gamma^0 = \widetilde{\gamma}^0\psi^* = \gamma^0\psi^*$, можно записать действие оператора $\widehat{C}$ в следующем виде:

$$\widehat{C}\psi = \gamma^2\gamma^0\overline{\psi} = \gamma^2\psi^*. \tag{26.6}$$

В явном виде преобразование (26.6) для спинорного представления

$$C: \quad \xi^\alpha \to -i\eta^{\dot{\alpha}*}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} \to -i\xi^*_\alpha, \tag{26.7а}$$

или, что то же,

$$C: \quad \xi_\alpha \to -i\eta^*_{\dot{\alpha}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} \to -i\xi^{\alpha*}. \tag{26.7б}$$

Преобразование зарядового сопряжения для плоских волн $\psi_{\pm p\sigma}$ легко произвести, воспользовавшись их явными выражениями (23.9) и матрицей U_C в стандартном представлении:

$$U_C = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}. \tag{26.8}$$

Заметив, что

$$\sigma_y\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\sigma_y,$$

при определении $w^{(\sigma)\prime}$ согласно (23.16) получим

$$U_C\overline{u}_{-p-\sigma} = u_{p\sigma}, \qquad U_C u_{-p-\sigma} = \overline{u}_{p\sigma}. \tag{26.9}$$

Таким образом,

$$\widehat{C}\psi_{-p-\sigma} = \psi_{p\sigma}, \tag{26.10}$$

так что функции $\psi_{-p-\sigma}$ фигурирующие в ψ-операторах (25.1) вместе с операторами $\widehat{b}_{\mathbf{p}\sigma}$, действительно отвечают состояниям частицы с импульсом $\mathbf{p}$ и поляризацией σ. Мы видим также что электронные и позитронные состояния описываются одними и теми же функциями:

$$\psi^{(\text{э})}_{p\sigma} = \psi^{(\text{п})}_{p\sigma} = \psi_{p\sigma}.$$

Это вполне естественно, так как функции $\psi_{p\sigma}$ несут в себе сведения лишь об импульсе и поляризации частицы.

Аналогичным образом можно рассмотреть операцию обращения времени. Изменение знака времени должно сопровождаться комплексным сопряжением волновой функции. Для того чтобы получить в результате «обращенную по времени» волновую функцию $(\widehat{T}\psi)$ в том же представлении, что и исходная ψ, надо

еще произвести над компонентами ψ^* (или $\overline{\psi}$) некоторое унитарное преобразование. Таким образом, аналогично (26.2) представим действие оператора $\widehat{T}$ на ψ в виде

$$\widehat{T}\psi(t,\mathbf{r}) = U_T\overline{\psi}(-t,\mathbf{r}), \tag{26.11}$$

где U_T — унитарная матрица.

Снова пишем уравнение Дирака, которому удовлетворяет ψ:

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla} - m\right)\psi(t,\mathbf{r}) = 0,$$

и уравнение для $\overline{\psi}$:

$$\left(i\widetilde{\gamma}^0\frac{\partial}{\partial t} + i\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\nabla} + m\right)\overline{\psi}(t,\mathbf{r}) = 0.$$

Заменим в последнем уравнении $t \to -t$ и умножим его слева на $-U_T$:

$$\left(iU_T\widetilde{\gamma}^0\frac{\partial}{\partial t} - iU_T\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\nabla}\right)\overline{\psi}(-t,\mathbf{r}) - mU_T\overline{\psi}(-t,\mathbf{r}) = 0.$$

Мы хотим, чтобы функция $U_T\overline{\psi}(-t,\mathbf{r})$ удовлетворяла тому же уравнению, что и $\psi(t,\mathbf{r})$:

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla}\right)U_T\overline{\psi}(-t,\mathbf{r}) - mU_T\overline{\psi}(-t,\mathbf{r}) = 0.$$

Сравнив оба уравнения, найдем, что матрица U_T должна удовлетворять условиям

$$U_T\widetilde{\gamma}^0 = \gamma^0 U_T, \qquad U_T\widetilde{\boldsymbol{\gamma}} = -\boldsymbol{\gamma}U_T. \tag{26.12}$$

В спинорном и стандартном представлениях этим условиям удовлетворяет матрица [1])

$$U_T = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0. \tag{26.13}$$

Таким образом, действие оператора $\widehat{T}$ дается формулой

$$\widehat{T}\psi(t,\mathbf{r}) = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0\overline{\psi}(-t,\mathbf{r}) = i\gamma^3\gamma^1\psi^*(-t,\mathbf{r}). \tag{26.14}$$

В явном виде это преобразование для спинорного представления

$$T: \quad \xi^\alpha \to -i\xi^*_\alpha, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to i\eta^{\dot\alpha *} \tag{26.15а}$$

или

$$T: \quad \xi_\alpha \to i\xi^{\alpha *}, \qquad \eta^{\dot\alpha} \to -i\eta^*_{\dot\alpha}. \tag{26.15б}$$

В стандартном представлении

$$U_T = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & -\sigma_y \end{pmatrix}. \tag{26.16}$$

---

[1]) Выбор фазового множителя в (26.13) связан с выбором в (26.5) соображениями, указанными ниже, в примеч. на с. 124.

Найдем результат воздействия на ψ всех трех операций P, T и C. Для этого пишем последовательно:

$$\widehat{T}\psi(t,\mathbf{r}) = -i\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t,\mathbf{r}),$$
$$\widehat{P}\widehat{T}\psi(t,\mathbf{r}) = i\gamma^0(\widehat{T}\psi) = \gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*(-t,-\mathbf{r}),$$
$$\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}\psi(t,\mathbf{r}) = \gamma^2(\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi^*)^* = \gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(-t,-\mathbf{r}),$$

или

$$\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}\psi(t,\mathbf{r}) = i\gamma^5\psi(-t,-\mathbf{r}). \tag{26.17}$$

В спинорном представлении

$$CPT: \quad \xi^\alpha \to -i\xi^\alpha, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to i\eta_{\dot\alpha}, \tag{26.18}$$

в чем легко убедиться и прямо из правил преобразований (20.4), (26.7), (26.15) [1].

Написанные выше выражения для матриц U_C и U_T предполагали спинорное или стандартное представление ψ. Выясним, наконец, какие из свойств этих выражений сохраняются для произвольного представления ψ.

Если ψ подвергается унитарному преобразованию:

$$\psi' = U\psi, \quad \gamma' = U\gamma U^{-1}, \quad \overline{\psi}' = \psi'^*\gamma^{0\prime} = \overline{\psi}U^+ = \overline{\psi}\widetilde{U}^{-1}, \tag{26.19}$$

то в новом представлении

$$(\widehat{C}\psi)' = U(C\psi) = UU_C\overline{\psi} = UU_C(\overline{\psi}'U) = UU_C\widetilde{U}\overline{\psi}'.$$

Сравнивая с определением матрицы U_C' в новом представлении ($(\widehat{C}\psi)' = U_C'\overline{\psi}'$), находим

$$U_C' = UU_C\widetilde{U}. \tag{26.20}$$

Преобразование (26.20) совпадает с преобразованием матриц γ лишь для вещественных U. Поэтому и выражение (26.5) справедливо лишь в представлениях, получающихся из спинорного или стандартного вещественным преобразованием.

Матрица (26.5) унитарна, а транспонирование меняет ее знак:

$$U_CU_C^+ = 1, \qquad \widetilde{U}_C = -U_C. \tag{26.21}$$

Эти свойства инвариантны относительно преобразования (26.20), а следовательно, имеют место в любом представлении. Матрица (26.5) также и эрмитова ($U_C = U_C^+$), но это свойство в общем случае нарушается преобразованием (26.20).

---

[1]) Запись $\widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}$ предполагает действие операторов в порядке справа налево. Общий знак в (26.17), (26.18) зависит от этого порядка ввиду некоммутативности $\widehat{T}$ с $\widehat{C}$ и $\widehat{P}$ (в их действии на биспинор).

Все сказанное (в том числе (26.21)) относится и к свойствам матрицы U_T.

В аппарате вторичного квантования преобразования C, P, T для ψ-операторов должны быть сформулированы как правила преобразований операторов рождения и уничтожения частиц. Эти правила можно установить (подобно тому, как это было сделано в § 13 для частиц со спином 0), исходя из требования, чтобы преобразованные ψ-операторы могли быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}^C(t,\mathbf{r}) &= U_C\widehat{\overline{\psi}}(t,\mathbf{r}), \\ \widehat{\psi}^P(t,\mathbf{r}) &= i\gamma^0\widehat{\psi}(t,-\mathbf{r}), \\ \widehat{\psi}^T(t,\mathbf{r}) &= U_T\widehat{\overline{\psi}}(-t,\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{26.22}$$

Задача

Найти оператор зарядового сопряжение в представлении Майораны (см. задачу 2, § 21).

Решение. Матрица U'_C в представлении Майораны получается из матрицы $U_C = -\alpha_y$ в стандартном представлении преобразованием (26.20) с $U = (\alpha_y+\beta)/\sqrt{2}$ и равна $U'_C = \alpha_y$ (α_y и β обозначают матрицы стандартного представления). Обозначая штрихом величины в представлении Майораны, имеем $\widehat{C}\psi' = U'_C(\psi'^*\beta')$, и поскольку $\beta' = \alpha_y$, то

$$\widehat{C}\psi' = \alpha_y(\psi'^*\alpha_y) = \alpha_y\widetilde{\alpha}_y\psi'^* = \psi'^*,$$

т. е. зарядовое сопряжение эквивалентно комплексному сопряжению.

§ 27. Внутренняя симметрия частиц и античастиц

Волновая функция частицы со спином $1/2$ в ее системе покоя сводится к одному 3-спинору (обозначим его через Φ^α). С поведением этого спинора при инверсии связано понятие о внутренней четности частицы. Однако (как было уже указано в § 19), хотя два возможных закона преобразования 3-спиноров ($\Phi^\alpha \to \pm i\Phi^\alpha$) и не эквивалентны друг другу, но приписывание спинору определенной четности не имеет абсолютного смысла. Не имеет поэтому смысла говорить и о внутренней четности самой по себе частицы со спином $1/2$. Можно, однако, говорить об относительной внутренней четности двух таких частиц.

Из двух (трехмерных) спиноров $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ можно составить скаляр $\Phi^{(1)}_\alpha\Phi^{(2)\alpha}$. Если это — истинный скаляр, то говорят, что описываемые данными спинорами частицы имеют одинаковую четность; если же это — псевдоскаляр, то говорят о противоположной внутренней четности частиц.

Покажем, что внутренние четности частицы и античастицы (со спином $1/2$) противоположны (*В. Б. Берестецкий*, 1948).

Для этого заметим, что если к обеим сторонам P-преобразования (19.5) (в спинорном представлении)

$$P: \quad \xi^\alpha \to i\eta_{\dot\alpha}, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to i\xi^\alpha \tag{27.1}$$

применить операцию C (26.7), то получим

$$\eta^{c\dot\alpha *} \to i\xi^{c*}_\alpha, \qquad \xi^{c*}_\alpha \to i\eta^{c\dot\alpha *},$$

где индексом c отмечены компоненты биспинора $\psi^c = \binom{\xi^c}{\eta^c}$ зарядово-сопряженного биспинору $\psi = \binom{\xi}{\eta}$. Произведя комплексное сопряжение и переместив индексы, найдем

$$P: \quad \eta^c_{\dot\alpha} \to i\xi^{c\alpha}, \qquad \xi^{c\alpha} \to i\eta^c_{\dot\alpha}. \tag{27.2}$$

Мы видим, что зарядово-сопряженные биспиноры преобразуются при инверсии по одинаковому закону.

Пусть $\psi^{(\text{э})}$ — волновая функция частицы (электрона), а $\psi^{(\text{п})}$ — волновая функция античастицы (позитрона). Последняя есть биспинор, зарядово-сопряженный некоторому «отрицательно-частотному» решению уравнения Дирака. В системе покоя каждая из них сводится к некоторому 3-спинору:

$$\xi^{(\text{э})\alpha} = \eta^{(\text{э})}_{\dot\alpha} = \Phi^{(\text{э})\alpha}, \qquad \xi^{(\text{п})\alpha} = \eta^{(\text{п})}_{\dot\alpha} = \Phi^{(\text{п})\alpha}.$$

Согласно (27.1), (27.2) эти спиноры преобразуются при инверсии по закону

$$\Phi^\alpha \to i\Phi^\alpha, \tag{27.3}$$

одинаковому для $\Phi^{(\text{э})}$ и $\Phi^{(\text{п})}$. Произведение же $\Phi^{(\text{э})}\Phi^{(\text{п})}$ меняет знак, что и доказывает сделанное утверждение.

Истинно нейтральной называют частицу, совпадающую со своей античастицей (см. § 12). ψ-оператор поля таких частиц удовлетворяет условию

$$\widehat{\psi}(t, \mathbf{r}) = \widehat{\psi}^C(t, \mathbf{r}).$$

Для частиц со спином 1/2 это означает условия (в спинорном представлении) [1])

$$\widehat{\xi}^\alpha = -i\widehat{\eta}^{\dot\alpha +}, \qquad \widehat{\eta}_{\dot\alpha} = -i\widehat{\xi}^+_\alpha. \tag{27.4}$$

Как и всякие соотношения, выражающие собой какие-либо физические свойства, эти условия инвариантны относительно преобразования CPT [2]). Легко проверить, что фактически они инвариантны не только по отношению к CPT, но и по отношению к каждому из трех преобразований в отдельности.

---

[1]) В представлении же Майораны истинная нейтральность означает просто эрмитовость оператора $\widehat{\psi}'$ (см. задачу к § 26).

[2]) Точнее, преобразование CPT должно быть определено в данном случае так, чтобы оставлять инвариантными соотношения типа (27.4). Это достигнуто соответствующим выбором фазового множителя в определении матрицы U_T (см. примеч. на с. 121).

Мы условились в § 19 определять инверсию спиноров как преобразование, для которого $\widehat{P}^2 = -1$, и до сих пор следовали этому определению. Легко видеть, что полученный выше результат об относительной четности частиц и античастиц не зависит, как и должно быть, от способа определения инверсии.

Если инверсия определена условием $\widehat{P}^2 = 1$, то вместо (27.1) будет

$$P: \quad \xi^\alpha \to \eta_{\dot\alpha}, \qquad \eta_{\dot\alpha} \to \xi^\alpha. \tag{27.5}$$

Зарядово-сопряженная же функция преобразуется при этом по закону

$$\xi^{c\alpha} \to -\eta^c_{\dot\alpha}, \qquad \eta^c_{\dot\alpha} \to -\xi^{c\alpha},$$

отличающемуся от (27.5) знаком. Соответственно этому трехмерные спиноры Φ будут преобразовываться согласно

$$\Phi^{(\text{э})\alpha} \to \Phi^{(\text{э})\alpha}, \qquad \Phi^{(\text{п})\alpha} \to -\Phi^{(\text{п})\alpha},$$

так что произведение $\Phi^{(\text{э})}\Phi^{(\text{п})}$ будет по-прежнему псевдоскаляром.

Единственное возможное различие в физических следствиях обеих концепций инверсии состоит в том, что при определении (27.5) условие истинной нейтральности поля не было бы инвариантным относительно этого преобразования (или преобразования CP): оно меняло бы относительный знак обеих сторон равенств (27.4). Фактически истинно нейтральные частицы со спином $1/2$ неизвестны, и в настоящее время нельзя сказать, имеет ли указанное различие в двух определениях инверсии реальный физический смысл [1].

Задача

Найти зарядовую четность позитрония (водородоподобная система из электрона и позитрона).

Решение. Волновая функция двух фермионов должна быть антисимметрична относительно одновременной перестановки координат, спинов и зарядовых переменных частиц (ср. задачу к § 13). Перестановка первых умножает функцию на $(-1)^l$, вторых — на $(-1)^{1+S}$ (где $S = 0$ или 1 — полный спин системы), третьих — на искомое C. Из условия $(-1)^l(-1)^{1+S}C = -1$ находим

$$C = (-1)^{l+S}.$$

Поскольку внутренние четности электрона и позитрона противоположны, пространственная четность системы $P = (-1)^{l+1}$. Комбинированная четность: $CP = (-1)^{S+1}$.

---

[1]) Неполная эквивалентность двух определений инверсии была отмечена *Рака* (*G. Racah*, 1937).

§ 28. Билинейные формы

Рассмотрим трансформационные свойства различных билинейных форм, которые можно составить из компонент функций ψ и ψ^*. Такие формы вообще имеют большое значение в квантовой механике; к их числу относится и 4-вектор плотности тока (21.11).

Поскольку ψ и ψ^* имеют по четыре компоненты, из них можно составить $4\cdot 4 = 16$ независимых билинейных комбинаций. Классификация этих величин по их трансформационным свойствам очевидна из перечисленных в § 19 способов перемножения двух произвольных биспиноров (которыми в данном случае являются ψ и ψ^*). Именно, можно составить скаляр (обозначим его через S), псевдоскаляр (P), смешанный спинор второго ранга, эквивалентный истинному 4-вектору V^μ (четыре независимых величины), смешанный спинор второго ранга, эквивалентный 4-псевдовектору A^μ (4 величины), и биспинор 2-го ранга, эквивалентный антисимметричному 4-тензору $T^{\mu\nu}$ (шесть величин).

В симметричном виде (для любого представления ψ) эти комбинации записываются следующим образом:

$$S = \overline{\psi}\psi, \qquad P = i\overline{\psi}\gamma^5\psi,$$

$$V^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi, \qquad A^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \qquad T^{\mu\nu} = i\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \tag{28.1}$$

где

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) = (\boldsymbol{\alpha}, i\boldsymbol{\Sigma}) \tag{28.2}$$

(перечисление компонент в (28.2) по (19.15)) [1]. Все написанные выражения вещественны.

Скалярность и псевдоскалярность величин S и P очевидна из их спинорного представления:

$$S = \xi^*\eta + \eta^*\xi, \qquad P = i(\xi^*\eta - \eta^*\xi),$$

что как раз соответствует выражениям (19.7) и (19.8). Векторный характер величин V^μ очевиден после этого из уравнения Дирака: умножив равенство $\widehat{p}_\mu\gamma^\mu\psi = m\psi$ слева на $\overline{\psi}$, получим

$$\left(\overline{\psi}\widehat{p}_\mu\gamma^\mu\psi\right) = m\overline{\psi}\psi;$$

поскольку справа стоит скаляр, скаляром должно быть и выражение в левой части.

Правило составления величин (28.1) очевидно: они составляются так, как если бы матрицы γ^μ образовывали 4-вектор, γ^5

[1]) При унитарном преобразовании ψ (изменении представления) имеем

$$\psi \to U\psi, \qquad \gamma \to U\gamma U^{-1}, \qquad \overline{\psi} \to \overline{\psi}U^{-1},$$

и инвариантность билинейных форм при таких преобразованиях очевидна.

было псевдоскаляром, а стоящие с обеих сторон $\overline{\psi}$ и ψ образовывали вместе скаляр [1]). Отсутствие билинейных форм, которые имели бы характер симметричного 4-тензора, очевидное из спинорного представления, ясно и из этого правила: поскольку симметричная комбинация матриц $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, то такая форма свелась бы к скаляру.

Вторично-квантованные билинейные формы получаются заменой в (28.1) ψ-функций ψ-операторами. Для большей общности будем считать, что два ψ-оператора относятся к полям различных частиц; будем различать их индексами a и b. Выясним, как преобразуются такие операторные формы при зарядовом сопряжении. Замечая, что [2])

$$\widehat{\psi}^C = U_C\widehat{\overline{\psi}}, \qquad \widehat{\overline{\psi}}^C = U_C^+\widehat{\psi}, \tag{28.3}$$

имеем, используя (26.3) и (26.21):

$$\widehat{\overline{\psi}}{}_a^C\widehat{\psi}_b^C = \widehat{\psi}_a U_C^* U_C\widehat{\overline{\psi}}_b = -\widehat{\psi}_a U_C^+ U_C\widehat{\overline{\psi}}_b = -\widehat{\psi}_a\widehat{\overline{\psi}}_b,$$

$$\widehat{\overline{\psi}}{}_a^C\gamma^\mu\widehat{\psi}_b^C = \widehat{\psi}_a U_C^*\gamma^\mu U_C\widehat{\overline{\psi}}_b = -\widehat{\psi}_a U_C^+\gamma^\mu U_C\widehat{\overline{\psi}}_b = \widehat{\psi}_a\widetilde{\gamma}^\mu\widehat{\overline{\psi}}_b.$$

При перестановке операторов к исходному порядку ($\widehat{\overline{\psi}}$ слева от $\widehat{\psi}$) в силу правил коммутации Ферми (25.4) изменится знак произведения (и, кроме того, появятся члены, не зависящие от состояния поля, которые опускаем, как и при аналогичных выводах в § 13). Таким образом, получим

$$\widehat{\overline{\psi}}{}_a^C\widehat{\psi}_b^C = \widehat{\overline{\psi}}_b\widehat{\psi}_a, \qquad \widehat{\overline{\psi}}{}_a^C\gamma^\mu\widehat{\psi}_b^C = -\widehat{\overline{\psi}}_b\gamma^\mu\widehat{\psi}_a.$$

Преобразовав аналогичным образом также и остальные формы, найдем, что при зарядовом сопряжении [3])

$$C: \quad \begin{gathered} \widehat{S}_{ab} \to \widehat{S}_{ba}, \quad \widehat{P}_{ab} \to \widehat{P}_{ba}, \quad \widehat{V}^\mu_{ab} \to -\widehat{V}^\mu_{ba}, \\ \widehat{A}^\mu_{ab} \to \widehat{A}^\mu_{ba}, \quad \widehat{T}^{\mu\nu}_{ab} \to -\widehat{T}^{\mu\nu}_{ba}. \end{gathered} \tag{28.4}$$

---

[1]) «Псевдоскалярность» γ^5 сама соответствует этим правилам, поскольку

$$\gamma^5 = \frac{i}{24}e_{\lambda\mu\nu\rho}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho.$$

[2]) Для получения второго равенства из первого пишем

$$\widehat{\overline{\psi}}{}^C = \left[U_C^*(\widehat{\psi}\gamma^{0*})\right]\gamma^0 = \widetilde{\gamma}^0 U_C^*\gamma^0\widehat{\psi} = -\widetilde{\gamma}^0 U_C^+\gamma^0\widehat{\psi} = \widetilde{\gamma}^0\gamma^{0*}U_C^+\widehat{\psi} = U_C^+\widehat{\psi}$$

(использованы (26.3), (26.21) и эрмитовость γ^0).

[3]) Обратим внимание на то, что для билинейных форм, составленных из ψ-функций (а не ψ-операторов), преобразования (28.4) имели бы обратный знак, поскольку возвращение к исходному порядку множителей $\overline{\psi}$ и ψ не сопровождалось бы изменением знака.

Аналогичным образом выясняется поведение тех же форм при обращении времени. При этом надо помнить (см. 13), что эта операция связана с изменением порядка расположения операторов, и поэтому,например,

$$\left(\widehat{\overline{\psi}}_a\widehat{\psi}_b\right)^T = \widehat{\psi}_b^T\widehat{\overline{\psi}}_a^T.$$

Подставив сюда

$$\widehat{\psi}^T = U_T\widehat{\overline{\psi}}, \qquad \widehat{\overline{\psi}}^T = -U_T^+\widehat{\psi}, \tag{28.5}$$

получим

$$\left(\widehat{\overline{\psi}}_a\widehat{\psi}_b\right)^T = -\widehat{\overline{\psi}}_b\widetilde{U}_T U_T^+\widehat{\psi}_a = \widehat{\overline{\psi}}_b U_T U_T^+\widehat{\psi}_a = \widehat{\overline{\psi}}_b\widehat{\psi}_a.$$

Рассмотрев таким же образом остальные формы, найдем

$$T: \begin{array}{l} \widehat{S}_{ab} \to \widehat{S}_{ba}, \quad \widehat{P}_{ab} \to -\widehat{P}_{ba}, \quad (\widehat{V}^0, \widehat{\mathbf{V}})_{ab} \to (\widehat{V}^0, -\widehat{\mathbf{V}})_{ba}, \\ (\widehat{A}^0, \widehat{\mathbf{A}})_{ab} \to (\widehat{A}^0, -\widehat{\mathbf{A}})_{ba}, \quad \widehat{T}^{\mu\nu}_{ab} = (\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{a}})_{ab} \to (\widehat{\mathbf{p}}, -\widehat{\mathbf{a}})_{ba} \end{array} \tag{28.6}$$

($\widehat{\mathbf{p}}$, $\widehat{\mathbf{a}}$ — трехмерные векторы, эквивалентные компонентам $\widehat{T}^{\mu\nu}$ согласно (19.15)).

При пространственной же инверсии, в соответствии с тензорным характером величин [1]),

$$P: \begin{array}{l} \widehat{S}_{ab} \to \widehat{S}_{ab}, \quad \widehat{P}_{ab} \to -\widehat{P}_{ab}, \quad (\widehat{V}^0, \widehat{\mathbf{V}})_{ab} \to (\widehat{V}^0, -\widehat{\mathbf{V}})_{ab}, \\ (\widehat{A}^0, \widehat{\mathbf{A}})_{ab} \to (-\widehat{A}^0, \widehat{\mathbf{A}})_{ab}, \quad \widehat{T}^{\mu\nu}_{ab} = (\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{a}})_{ab} \to (-\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{a}})_{ab}. \end{array} \tag{28.7}$$

Наконец, совместное применение всех трех операций оставляет все $\widehat{S}_{ab}$, $\widehat{P}_{ab}$, $\widehat{T}^{\mu\nu}_{ab}$ неизменными и меняет знак всех $\widehat{V}^{\mu}_{ab}$, $\widehat{A}^{\mu}_{ab}$, что как раз соответствует смыслу этого преобразования как 4-инверсии: поскольку 4-инверсия эквивалентна повороту 4-системы координат, то по отношению к ней нет разницы между истинными и псевдотензорами любого ранга.

Рассмотрим попарные произведения билинейных форм, составленных из четырех различных функций ψ^a, ψ^b, ψ^c, ψ^d. Мы получим различные результаты в зависимости от того, какие пары этих функций перемножаются между собой. Оказывается, однако, возможным свести всякое такое произведение к произведениям билинейных форм с фиксированными парами множителей (*W. Pauli*, *M. Fierz*, 1936). Выведем соотношение, лежащее в основе такого приведения.

---

[1]) Во избежание недоразумений напомним, что преобразования T и P требуют также изменения аргументов функции; правые стороны (преобразованные формы в (28.6), (28.7)) — функции соответственно от

$$x^T = (-t, \mathbf{r}), \qquad x^P = (t, -\mathbf{r}),$$

если левые стороны — функции от $x = (t, \mathbf{r})$.

Рассмотрим совокупность четырехрядных матриц

$$1, \quad \gamma^5, \quad \gamma^\mu, \quad i\gamma^\mu\gamma^5, \quad i\sigma^{\mu\nu} \tag{28.8}$$

(1 — единичная матрица). Перенумеровав эти 16 (= 1 + 1 + 4 + + 4 + 6) матриц в какой-либо определенной последовательности, обозначим их посредством γ^A ($A = 1, \ldots, 16$), а те же матрицы с опущенными 4-тензорными индексами (μ,ν) посредством γ_A. Они обладают следующими свойствами:

$$\operatorname{Sp}\gamma^A = 0 \quad (\gamma^A \neq 1), \quad \gamma^A\gamma_A = 1, \quad \frac{1}{4}\operatorname{Sp}\gamma^A\gamma_B = \delta^A_B. \tag{28.9}$$

В силу последнего из этих свойств матрицы γ^A линейно независимы. Поскольку же их число равно числу ($4 \cdot 4$) элементов четырехрядной матрицы, матрицы γ^A составляют полную систему, по которой может быть разложена произвольная четырехрядная матрица Γ:

$$\Gamma = \sum_A c_A\gamma^A, \qquad c_A = \frac{1}{4}\operatorname{Sp}\gamma_A\Gamma, \tag{28.10}$$

или в раскрытом виде с матричными индексами ($i, k = 1, 2, 3, 4$):

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{4}\sum_A \Gamma_{lm}\gamma^A_{ml}\gamma_{Aik}.$$

Предположив, в частности, что матрица Γ содержит всего один отличный от нуля элемент (Γ_{lm}), получим искомое соотношение («условие полноты»)

$$\delta_{il}\delta_{km} = \frac{1}{4}\sum_A \gamma_{Aik}\gamma^A_{ml}. \tag{28.11}$$

Умножая это равенство с обеих сторон на $\overline{\psi}{}^a_i\psi^b_k\overline{\psi}{}^c_m\psi^d_l$, имеем

$$(\overline{\psi}{}^a\psi^d)(\overline{\psi}{}^c\psi^b) = \frac{1}{4}\sum_A (\overline{\psi}{}^a\gamma_A\psi^b)(\overline{\psi}{}^c\gamma^A\psi^d). \tag{28.12}$$

Это — одно из равенств указанного выше типа: оно сводит произведение двух скалярных билинейных форм к произведениям форм, составленных из других пар множителей [1]).

Другие равенства этого типа можно получить из (28.12), заменяя

$$\psi^d \to \gamma^B\psi^d, \quad \psi^b \to \gamma^C\psi^b$$

[1]) Напомним во избежание недоразумений, это здесь имеются в виду формы, составленные из ψ-функций. Для форм, составленных из антикоммутирующих ψ-операторов, знак преобразования был бы обратным.

и пользуясь разложением (см. задачу)

$$\gamma^A\gamma^B = \sum_R c_R\gamma^R, \qquad c_R = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\,\gamma^A\gamma^B\gamma_R.$$

Укажем здесь для дальнейших ссылок также и аналогичное (28.11) соотношение для двухрядных матриц. Полную систему линейно независимых двухрядных матриц σ^A $(A = 1, \ldots, 4)$ составляют

$$1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z. \tag{28.13}$$

Для них

$$\mathrm{Sp}\,\sigma^A = 0 \quad (\sigma^A \neq 1), \quad \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\sigma^A\sigma^B = \delta_{AB}. \tag{28.14}$$

Условие полноты:

$$\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} = (1/2)\sum_A \sigma^A_{\alpha\beta}\sigma^A_{\delta\gamma} = (1/2)\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma} + (1/2)\delta_{\alpha\beta}\delta_{\delta\gamma} \tag{28.15}$$

$(\alpha,\ \beta,\ \cdots = 1, 2)$ или иначе:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{\sigma}_{\delta\gamma} = -(1/2)\boldsymbol{\sigma}_{\alpha\gamma}\boldsymbol{\sigma}_{\delta\beta} + (3/)2\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\delta\beta}. \tag{28.16}$$

Задача

Вывести формулы, аналогичные (28.12), для скалярных произведений двух билинейных форм P, V, A, T.

Решение. Обозначим:

$$J_S = (\overline{\psi}^a\psi^b)(\overline{\psi}^c\psi^d), \qquad J_P = (\overline{\psi}^a\gamma^5\psi^b)(\overline{\psi}^c\gamma^5\psi^d),$$
$$J_V = (\overline{\psi}^a\gamma^\mu\psi^b)(\overline{\psi}^c\gamma_\mu\psi^d), \qquad J_A = (\overline{\psi}^a i\gamma^\mu\gamma^5\psi^b)(\overline{\psi}^c i\gamma_\mu\gamma^5\psi^d),$$
$$J_T = (\overline{\psi}^a i\sigma^{\mu\nu}\psi^b)(\overline{\psi}^c i\sigma_{\mu\nu}\psi^d),$$

а теми же буквами со штрихом — такие же произведения с переставленными ψ^b и ψ^d. Указанным в тексте способом получим

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
4J'_S &=& J_S &+& J_V &+& J_T &+& J_A &+& J_P,\\
4J'_V &=& 4J_S &-& 2J_V && &+& 2J_A &-& 4J_P,\\
4J'_T &=& 6J_S && &-& 2J_T && &+& 6J_P,\\
4J'_A &=& 4J_S &+& 2J_V && &-& 2J_A &-& 4J_P,\\
4J'_P &=& J_S &-& J_V &+& J_T &-& J_A &+& J_P
\end{array}$$

(первая строка — по формуле (28.12)).

§ 29. Поляризационная матрица плотности

Координатная зависимость волновой функции ψ, описывающей свободное движение с импульсом $\mathbf{p}$ (плоская волна), сводится к общему множителю $e^{i\mathbf{pr}}$, а амплитуда u_p играет роль спиновой волновой функции. В таком (чистом) состоянии частица полностью поляризована (см. III, § 59). В нерелятивистской теории

это означает, что спин частицы имеет определенное направление в пространстве (точнее, существует такое направление, вдоль которого проекция спина имеет определенное значение $+1/2$). В релятивистской теории такая характеристика состояния в произвольной системе отсчета невозможна ввиду (отмеченного уже в § 23) несохранения вектора спина. Чистота состояния означает лишь, что спин имеет определенное направление в системе покоя частицы.

В состоянии частичной поляризации не существует определенной амплитуды, а лишь *поляризационная матрица плотности* ρ_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$ — биспинорные индексы). Определим эту матрицу таким образом, чтобы в чистом состоянии она сводилась к произведениям

$$\rho_{ik} = u_{pi}\overline{u}_{pk}. \tag{29.1}$$

Соответственно этому матрица ρ нормируется условием

$$\operatorname{Sp} \rho = 2m \tag{29.2}$$

(ср. (23.4)).

В чистом состоянии среднее значение спина определяется величиной

$$\overline{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}\int \psi^* \mathbf{\Sigma} \psi \, d^3x = \frac{1}{4\varepsilon} u_p^* \mathbf{\Sigma} u_p = \frac{1}{4\varepsilon} \overline{u}_p \gamma^0 \mathbf{\Sigma} u_p. \tag{29.3}$$

Соответствующее выражение для состояния частичной поляризации:

$$\overline{\mathbf{s}} = \frac{1}{4\varepsilon} \operatorname{Sp}(\rho\gamma^0 \mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{4\varepsilon} \operatorname{Sp}(\rho\gamma^5 \boldsymbol{\gamma}). \tag{29.4}$$

Амплитуды u_p, $\overline{u}_p$ удовлетворяют системам алгебраических уравнений

$$(\gamma p - m) u_p = 0, \qquad \overline{u}_p(\gamma p - m) = 0.$$

Поэтому матрица (29.1) удовлетворяет уравнениям

$$(\gamma p - m)\rho = 0, \qquad \rho(\gamma p - m) = 0. \tag{29.5}$$

Таким же линейным уравнениям должна подчиняться матрица плотности и в общем случае смешанного (по спину) состояния (ср. аналогичный вывод в III, § 14).

Если рассматривать свободную частицу в ее системе покоя, то к ней применима нерелятивистская теория. Но в этой теории состояние частичной поляризации полностью определяется тремя параметрами — компонентами вектора среднего значения спина $\overline{\mathbf{s}}$ (см. III, § 59). Ясно поэтому, что те же параметры будут определять поляризационное состояние и после любого преобразования Лоренца, т. е. для движущейся частицы.

Обозначим удвоенное среднее значение вектора спина в системе покоя через $\boldsymbol{\zeta}$ (в чистом состоянии $|\boldsymbol{\zeta}| = 1$, в смешанном $|\boldsymbol{\zeta}| < 1$). Для четырехмерного описания поляризационного состояния удобно ввести 4-вектор a^μ, совпадающий в системе покоя с трехмерным вектором $\boldsymbol{\zeta}$; поскольку $\boldsymbol{\zeta}$ — аксиальный вектор, то a^μ — 4-псевдовектор. Этот 4-вектор ортогонален 4-импульсу в системе покоя (где $a^\mu = (0, \boldsymbol{\zeta})$, $p^\mu = (m, 0)$), а потому и в произвольной системе отсчета

$$a^\mu p_\mu = 0. \tag{29.6}$$

В произвольной системе отсчета будет также и

$$a_\mu a^\mu = -\boldsymbol{\zeta}^2. \tag{29.7}$$

Компоненты 4-вектора a^μ в системе отсчета, в которой частица движется со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\varepsilon$, находятся путем преобразования Лоренца из системы покоя и равны

$$a^0 = \frac{|\mathbf{p}|}{m}\zeta_{||}, \quad \mathbf{a}_\perp = \boldsymbol{\zeta}_\perp, \quad a_{||} = \frac{\varepsilon}{m}\zeta_{||}, \tag{29.8}$$

где индексы $||$ и $\perp$ означают компоненты векторов $\boldsymbol{\zeta}$ и $\mathbf{a}$, параллельные и перпендикулярные направлению $\mathbf{p}$ [1]). Эти формулы можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\zeta} + \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{p})}{m(\varepsilon + m)}, \quad a^0 = \frac{\mathbf{a}\mathbf{p}}{\varepsilon} = \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\zeta}}{m}, \quad \mathbf{a}^2 = \boldsymbol{\zeta}^2 + \frac{(\mathbf{p}\boldsymbol{\zeta})^2}{m^2}. \tag{29.9}$$

Рассмотрим сначала неполяризованное состояние ($\boldsymbol{\zeta} = 0$). Матрица плотности в этом случае может содержать в качестве параметров лишь 4-импульс p. Единственный вид такой матрицы, удовлетворяющей уравнениям (29.5), есть

$$\rho = \frac{1}{2}(\gamma p + m) \tag{29.10}$$

(*И. Е. Тамм*, 1930, *H. B. G. Casimir*, 1933). Постоянный коэффициент выбран в соответствии с нормировочным условием (29.2).

---

[1]) По своим трансформационным свойствам компоненты среднего вектора спина $\bar{\mathbf{s}}$ (как и всякого момента) являются в релятивистской механике пространственными компонентами антисимметричного тензора $S^{\lambda\mu}$. 4-вектор a^λ связан с этим тензором посредством соотношений

$$S^{\lambda\mu} = \frac{1}{2m} e^{\lambda\mu\nu\rho} a_\nu p_\rho, \qquad a^\lambda = -\frac{2}{m} e^{\lambda\mu\nu\rho} S_{\mu\nu} p_\rho.$$

Подчеркнем, что в произвольной системе отсчета пространственная часть $\mathbf{a}$ 4-вектора a^λ отнюдь не совпадает с вектором $2\,\bar{\mathbf{s}}$. Легко видеть, что

$$2\bar{s}_{||} = \frac{1}{m}(a_{||}\varepsilon - a^0|\mathbf{p}|) = \zeta_{||}, \qquad 2\bar{s}_\perp = \frac{\varepsilon}{m}\mathbf{a}_\perp = \frac{\varepsilon}{m}\boldsymbol{\zeta}_\perp.$$

В общем случае частичной поляризации ($\boldsymbol{\zeta} \neq 0$) ищем матрицу плотности в виде

$$\rho = \frac{1}{4m}(\gamma p + m)\rho'(\gamma p + m), \tag{29.11}$$

автоматически удовлетворяющем уравнениям (29.5). При $\boldsymbol{\zeta} \neq 0$ вспомогательная матрица ρ' должна обращаться в единичную; поскольку

$$(\gamma p + m)^2 = 2m(\gamma p + m),$$

то (29.11) совпадет с выражением (29.10). Далее, она должна содержать 4-вектор a линейным образом в качестве параметра, т. е. иметь вид

$$\rho' = 1 - A\gamma^5(\gamma a); \tag{29.12}$$

во втором члене фигурирует скалярное произведение псевдовектора a и «матричного 4-псевдовектора» $\gamma^5\gamma$. Для определения коэффициента A напишем матрицу плотности в системе покоя:

$$\rho = \frac{m}{4}(1 + \gamma^0)(1 + A\gamma^5\boldsymbol{\gamma\zeta})(1 + \gamma^0) = \frac{m}{2}(1 + \gamma^0)(1 + A\gamma^5\boldsymbol{\gamma\zeta}),$$

и вычислим, согласно (29.4), среднее значение спина. Воспользовавшись перечисленными в § 22 правилами, легко найдем, что единственный отличный от нуля член в искомом следе

$$2\overline{\mathbf{s}} = \frac{1}{2m}\,\mathrm{Sp}\,(\rho\gamma^5\boldsymbol{\gamma}) = -\frac{A}{4}\,\mathrm{Sp}\,((\boldsymbol{\gamma\zeta})\boldsymbol{\gamma}) = A\boldsymbol{\zeta}.$$

Приравняв это выражение $\boldsymbol{\zeta}$, получим $A = 1$. Окончательное выражение для ρ найдем, подставив (29.12) в (29.11) и переставив множители ρ' и $(\gamma p + m)$; в силу ортогональности a и p произведение γp антикоммутативно с γa:

$$(\gamma a)(\gamma p) = 2ap - (\gamma p)(\gamma a) = -(\gamma p)(\gamma a),$$

а потому коммутативно с $\gamma^5(\gamma a)$.

Таким образом, матрица плотности частично поляризованного электрона дается выражением

$$\rho = \frac{1}{2}(\gamma p + m)[1 - \gamma^5(\gamma a)] \tag{29.13}$$

(*L. Michel*, *A. S. Wighiman*, 1955). Если матрица ρ известна, то характеризующий состояние 4-вектор a (а с ним и вектор $\boldsymbol{\zeta}$) можно найти по формуле

$$a^\mu = \frac{1}{2m}\,\mathrm{Sp}\,(\rho\gamma^5\gamma^\mu). \tag{29.14}$$

Формулы для матрицы плотности позитрона аналогичны формулам для электрона. Если бы мы описывали позитрон (с

4-импульсом p) позитронной амплитудой $u_p^{(\text{поз})}$ и определенной в соответствии с такой амплитудой матрицей плотности $\rho^{(\text{поз})}$, то никакого отличия от случая электрона вообще не было бы и матрица $\rho^{(\text{поз})}$ давалась бы той же формулой (29.13). Однако при фактических вычислениях сечений процессов рассеяния с участием позитронов приходится иметь дело (как мы увидим в дальнейшем) не с $u_p^{(\text{поз})}$, а с амплитудами «отрицательной частоты» u_{-p}. Соответственно этому и поляризационную матрицу плотности (обозначим ее $\rho^{(-)}$) следует определить так, чтобы для чистого состояния она сводилась к $u_{-pi}\overline{u}_{-pk}$.

Согласно (26.1) позитронная амплитуда $u_p^{(\text{поз})} = U_C\overline{u}_{-p}$. Обратно:

$$u_{-p} = U_C\overline{u}_p^{(\text{поз})}, \quad \overline{u}_{-p} = U_C^+ u_p^{(\text{поз})} = u_p^{(\text{поз})}U_C^*$$

(ср. (28.3)). Если

$$\rho_{ik}^{(-)} = u_{-pi}\overline{u}_{-pk}, \quad \rho_{ik}^{(\text{поз})} = u_{pi}^{(\text{поз})}\overline{u}_{pk}^{(\text{поз})},$$

то с помощью этих формул получим

$$\rho^{(-)} = U_C\widetilde{\rho}^{(\text{поз})}U_C^*. \tag{29.15}$$

Подставляя сюда для $\rho^{(\text{поз})}$ выражение (29.13) и производя (с помощью (26.3), (26.21)) простые преобразования, получаем

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2}(\gamma p - m)[1 - \gamma^5(\gamma a)]. \tag{29.16}$$

В частности, для неполяризованного состояния

$$\rho^{(-)} = \frac{1}{2}(\gamma p - m). \tag{29.17}$$

В дальнейшем, говоря о позитронных матрицах плотности, мы будем иметь в виду матрицы $\rho^{(-)}$ и индекс $(-)$ у них будем опускать (матрицами же $\rho^{(\text{поз})}$ фактически не приходится пользоваться).

В различных вычислениях нам часто придется усреднять по спиновым состояниям выражения вида $\overline{u}Fu(\equiv \overline{u}_iF_{ik}u_k)$, где F — некоторая (четырехрядная) матрица, а u — биспинорная амплитуда состояния с определенным 4-импульсом p. Такое усреднение эквивалентно замене произведений $u_k\overline{u}_i$ матрицей плотности ρ_{ik} частично поляризованного состояния.

В частности, полное усреднение по двум независимым спиновым состояниям эквивалентно переходу к неполяризованному состоянию; при этом согласно (29.10) имеем

$$\frac{1}{2} = \sum_{\text{поляр}} \overline{u}_pFu_p = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma p + m)F. \tag{29.18}$$

Аналогично для волновых функций отрицательной частоты

$$\frac{1}{2} = \sum_{\text{поляр}} \overline{u}_{-p} F u_{-p} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma p - m)F. \tag{29.19}$$

Если речь идет не об усреднении, а о суммировании по спиновым состояниям — результат в два раза больше.

Проследим, каким образом матрица плотности (29.13) переходит в пределе в свое нерелятивистское выражение. Для этого перейдем к системе покоя электрона. В стандартном представлении волновых функций амплитуды u_p в этой системе становятся двухкомпонентными; вместе с ними должна стать двухрядной матрица плотности. Действительно, в системе покоя имеем

$$\rho = \frac{m}{2}(\gamma^0 + 1)(1 + \gamma^5 \boldsymbol{\gamma\zeta}),$$

и с помощью выражений матриц γ (21.20) и (22.18) находим

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{\text{нр}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{\text{нр}} = m(1 + \boldsymbol{\sigma\zeta}) \tag{29.20}$$

(нули обозначают двухрядные нулевые матрицы). Если принять обычную в нерелятивистской теории нормировку матрицы плотности на 1 ($\mathrm{Sp}\,\rho_{\text{нр}} = 1$) вместо нормировки на $2m$, то это выражение надо будет разделить на $2m$, так что в согласии с формулой (59.6) (см. III) получится

$$\frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma\zeta}).$$

Аналогичным образом нерелятивистский предел позитронной матрицы плотности:

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_{\text{нр}} \end{pmatrix}, \qquad \rho_{\text{нр}} = -m(1 + \boldsymbol{\sigma\zeta}).$$

Наконец, напишем упрощенное выражение матрицы плотности в ультрарелятивистском случае. Положив в (29.8) $|\mathbf{p}| \approx \varepsilon$ (тем самым мы пренебрегаем величинами относительной малости $(m/\varepsilon)^2$), подставив эти выражения в (29.13) или (29.16) и выбрав направление $\mathbf{p}$ в качестве оси x, запишем

$$\rho = \frac{1}{2}[\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1) \pm m]\left[1 - \gamma^5\left(\frac{\varepsilon}{m}(\gamma^0 - \gamma^1)\zeta_{||} - \boldsymbol{\zeta}_\perp \boldsymbol{\gamma}_\perp\right)\right],$$

где верхний знак относится к случаю электрона, а нижний — к случаю позитрона. При раскрытии произведения главные члены в нем выпадают, а члены следующего порядка дают

$$\rho = \frac{1}{2}\varepsilon(\gamma^0 - \gamma^1)[1 + \gamma^5(\pm\zeta_{||} + \boldsymbol{\zeta}_\perp \boldsymbol{\gamma}_\perp)]$$

или, при записи $\varepsilon(\gamma^0-\gamma^1)$ в виде γp:

$$\rho=\frac{1}{2}(\gamma p)[1+\gamma^5(\pm\zeta_{||}+\boldsymbol{\zeta}_\perp\boldsymbol{\gamma}_\perp)]. \qquad (29.21)$$

Это и есть искомое выражение матрицы плотности в ультрарелятивистском случае. Обратим внимание на то, что все компоненты вектора поляризации $\boldsymbol{\zeta}$ входят в него равноправно как члены одного порядка величины. Напомним, что $\zeta_{||}$ есть компонента этого вектора, параллельная (при $\zeta_{||}>0$) или антипараллельная ($\zeta_{||}<0$) импульсу частицы. В частности, для спирального состояния частицы $\zeta_{||}=2\lambda=\pm1$; при этом матрица плотности принимает особенно простой вид:

$$\rho=\frac{1}{2}(\gamma p)(1\pm2\lambda\gamma^5), \qquad (29.22)$$

совпадающий, как и должно быть, с видом матрицы плотности нейтрино или антинейтрино — частицы с нулевой массой и определенной спиральностью (см. § 30).

§ 30. Двухкомпонентные фермионы

Мы видели в § 20, что необходимость описания частицы со спином $1/2$ двумя спинорами (ξ и η) связана с массой частицы. Эта причина отпадает, если масса равна нулю. Волновое уравнение, описывающее такую частицу, может быть составлено с помощью всего одного, скажем пунктирного, спинора η:

$$\hat{p}^{\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta}=0, \qquad (30.1)$$

или, что то же,

$$(\hat{p}_0+\hat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma})\eta=0. \qquad (30.2)$$

В § 20 было также отмечено, что волновое уравнение, содержащее массу m, автоматически оказывается симметричным по отношению к инверсии (преобразование (20.4)). При описании же частицы одним спинором эта симметрия теряется. В ней, однако, нет необходимости, поскольку симметрия по отношению к инверсии не является универсальным свойством природы.

Энергия и импульс частицы с $m=0$ связаны соотношением $\varepsilon=|\mathbf{p}|$. Поэтому для плоской волны ($\eta_p\propto e^{-ipx}$) уравнение (30.2) дает

$$(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\eta_p=-\eta_p, \qquad (30.3)$$

где $\mathbf{n}$ — орт вектора $\mathbf{p}$. Такое же уравнение

$$(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\eta_{-p}=-\eta_{-p} \qquad (30.4)$$

имеет место и для волны с «отрицательной частотой» ($\eta_{-p} \propto \propto e^{ipx}$). Вторично квантованный ψ-оператор:

$$\widehat{\eta} = \sum_{\mathbf{p}} (\eta_p \widehat{a}_{\mathbf{p}} + \eta_{-p} \widehat{b}^+_{\mathbf{p}}), \qquad \widehat{\eta}^+ = \sum_{\mathbf{p}} (\eta^*_p \widehat{a}^+_{\mathbf{p}} + \eta^*_{-p} \widehat{b}_{\mathbf{p}}). \tag{30.5}$$

Отсюда, как обычно, следует, что η^*_{-p} — волновые функции античастицы.

Из определения операторов $\widehat{p}^{\alpha\dot{\beta}}$ (20.1) видно, что $\widehat{p}^{\alpha\dot{\beta}*} = -\widehat{p}^{\dot{\alpha}\beta}$. Поэтому комплексно-сопряженный спинор η^* удовлетворяет уравнению $\widehat{p}^{\dot{\alpha}\beta}\eta^*_{\dot{\beta}} = 0$, или, что то же,

$$\widehat{p}_{\dot{\alpha}\beta}\eta^{\dot{\beta}*} = 0.$$

Обозначим $\eta^{\dot{\beta}*} = \xi^{\beta}$, выразив этим тот факт, что комплексное сопряжение превращает пунктирный спинор в непунктирный. Таким образом, волновые функции античастицы удовлетворяют уравнению

$$\widehat{p}_{\dot{\alpha}\beta}\xi^{\beta} = 0, \tag{30.6}$$

или

$$(\widehat{p}_0 - \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma})\xi = 0. \tag{30.7}$$

Для плоской волны имеем отсюда

$$(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\xi_p = \xi_p. \tag{30.8}$$

Но $1/2\,(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})$ есть оператор проекции спина на направление движения. Поэтому уравнения (30.3) и (30.8) означают, что состояния частицы с определенным импульсом автоматически оказываются спиральными — проекция спина вдоль направления движения имеет в них определенное значение. При этом, если спин частицы противоположен импульсу (спиральность $-1/2$), то спин античастицы направлен вдоль импульса (спиральность $+1/2$).

Частицами с такими свойствами являются, возможно, существующие в природе *нейтрино*. При этом частицу со спиральностью $-1/2$ условно принято называть нейтрино, а частицу со спиральностью $+1/2$ — антинейтрино [1]).

[1]) Существование нейтрино было предсказано теоретически *Паули* для объяснения свойств β-распада (1931). Уравнение (30.1) впервые рассматривалось *Вейлем* (*H. Weyl*, 1929). Основанную на этих уравнениях теорию нейтрино сформулировали *Л. Д. Ландау*; *Ли*, *Янг* и *Салам* (*T. D. Lee*, *C. N. Yang*, *A. Salam*) в 1957 г.

Экспериментально вопрос о равенстве нулю массы нейтрино до настоящего времени не выяснен окончательно. В дальнейшем мы будем употреблять термин «нейтрино» условно для обозначения частицы, описываемой уравнением (30.3).

В связи с невырожденностью состояний нейтрино по направлениям спина напомним сделанное в § 8 замечание о том, что частице с массой 0 свойственна лишь аксиальная симметрия относительно направления импульса. В случае истинно нейтральной частицы — фотона — в эту симметрию входят как вращения вокруг оси, так и отражения в проходящих через ось плоскостях. В случае же нейтрино симметрия относительно отражений отсутствует, и мы имеем дело лишь с группой вращений вокруг оси, сохраняющей проекцию момента на ось, но не меняющей ее знака. Симметрия относительно отражений существует лишь при условии одновременной замены частицы античастицей.

Надо также отметить, что обязательная продольная поляризация означает, что у нейтрино спин вообще не отделим от орбитального момента (как и у фотона с обязательной поперечностью полей, см. § 6).

С помощью одного спинора η (или ξ) можно образовать всего четыре билинейные комбинации, составляющие вместе 4-вектор

$$j^{\mu} = (\eta^*\eta, \eta^*\boldsymbol{\sigma}\eta). \tag{30.9}$$

Легко проверить, что в силу уравнений

$$(\widehat{p}_0 + \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma})\eta = 0, \qquad \eta^*(\widehat{p}_0 - \widehat{\mathbf{p}}\boldsymbol{\sigma}) = 0$$

имеет место уравнение непрерывности $\partial_\mu j^\mu = 0$, т. е. j^μ играет роль 4-вектора плотности тока частиц.

Плоские волны нейтрино удобно нормировать способом, аналогичным тому, как это было сделано в § 23 для частиц с массой:

$$\eta_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_p e^{-ipx}, \quad \eta_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx}, \tag{30.10}$$

причем спинорные амплитуды нормированы инвариантным условием

$$u^*_{\pm p}(1, \boldsymbol{\sigma})u_{\pm p} = 2(\varepsilon, \mathbf{p}). \tag{30.11}$$

При этом плотность частиц и плотность их тока: $j^0 = 1$, $\mathbf{j} = \mathbf{p}/\varepsilon = \mathbf{n}$.

Поскольку свободное нейтрино с заданным импульсом всегда полностью поляризовано, в этом случае не существует понятия о смешанном (по спину) состоянии. Тем не менее может оказаться удобным ввести двухрядную поляризационную «матрицу плотности», определенную просто как спинор второго ранга

$$\rho_{\dot{\alpha}\beta} = u_{\dot{\alpha}} u^*_{\dot{\beta}} \tag{30.12}$$

(при этом $\operatorname{Sp}\rho = 2\varepsilon$). Выражение для этой матрицы можно написать, заметив, что она должна удовлетворять уравнениям

$$(\varepsilon + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\rho = \rho(\varepsilon + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}) = 0.$$

Отсюда видно, что

$$\rho = \varepsilon - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}. \tag{30.13}$$

При рассмотрении различных процессов взаимодействия нейтрино могут фигурировать наряду с другими частицами (со спином $1/2$), обладающими массой и поэтому описывающимися четырехкомпонентными волновыми функциями. В таких случаях удобно соблюсти единообразие обозначений, введя формально и для нейтрино «биспинорную» волновую функцию, две из компонент которой, однако, равны нулю: $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$. Но такая форма ψ, вообще говоря, нарушится при переходе к другому (не спинорному) представлению. Это затруднение можно обойти, заметив, что в спинорном представлении имеем тождественно

$$\frac{1+\gamma^5}{2}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (\eta^*\,\eta^*)\frac{1-\gamma^5}{2} = (\eta^*\,0),$$

где ξ — произвольный «балластный» спинор, выпадающий из ответа (матрица γ^5 из (22.18)). Поэтому условие истинной «двухкомпонентности» нейтрино будет соблюдено при описании его четырехкомпонентным ψ в любом представлении, если понимать под ψ решение уравнения Дирака с $m = 0$:

$$(\gamma p)\psi = 0, \tag{30.14}$$

подчиненное дополнительному условию $1/2(1+\gamma^5)\psi = \psi$, или

$$\gamma^5\psi = \psi. \tag{30.15}$$

Это условие можно учесть, условившись производить во всех формулах, куда входят ψ и $\overline{\psi}$, следующую замену:

$$\psi \to \frac{1+\gamma^5}{2}\psi, \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi}\frac{1-\gamma^5}{2}. \tag{30.16}$$

Так, 4-вектор плотности тока запишется в виде (замена (30.16) в выражении $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$)

$$j^\mu = \frac{1}{4}\overline{\psi}(1-\gamma^5)\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi = \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\psi. \tag{30.17}$$

В соответствии с этим же правилом четырехрядная матрица плотности нейтрино должна быть записана как

$$\rho = \frac{1}{4}(1+\gamma^5)(\gamma p)(1-\gamma^5) = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)(\gamma p). \tag{30.18}$$

В спинорном представлении она сводится, как и должно быть, к двухрядной матрице (30.13)

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные формулы для антинейтрино отличаются от написанных изменением знака перед γ^5.

Нейтрино — электрически нейтральная частица. Нейтрино с описанными выше свойствами не является, однако, истинно нейтральной частицей. Отметим в этой связи, что «нейтринное поле», описываемое двухкомпонентным спинором, по числу возможных для него состояний частиц (но, разумеется, не по другим своим физическим свойствам) эквивалентно истинно нейтральному полю, описываемому четырехкомпонентным биспинором. Вместо состояний частиц и античастиц с определенными спиральностями здесь имелось бы столько же состояний одной частицы с двумя возможными значениями спиральности и автоматически соблюдалась бы симметрия по отношению к инверсии. Отметим, однако, что равенство нулю массы «четырехкомпонентного» нейтрино имело бы, так сказать, «случайный» характер, поскольку оно не было бы связано со свойствами симметрии описывающего его волнового уравнения (допускающего также и отличную от нуля массу). Поэтому учет различных взаимодействии такой частицы автоматически привел бы к появлению хотя и малой, но все же не равной строго нулю массы покоя.

§ 31. Волновое уравнение для частицы со спином $^3/_2$

Частица со спином $^3/_2$ описывается в своей системе покоя симметричным 3-спинором третьего ранга (с $2s+1=4$ независимыми компонентами). Соответственно в произвольной системе отсчета в ее описании могут участвовать 4-спиноры $\xi^{\alpha\dot\beta\dot\gamma}$, $\eta_{\dot\alpha\beta\gamma}$ и $\zeta^{\alpha\beta\gamma}$, $\chi_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}$, каждый из которых симметричен по всем одинаковым (пунктирным или непунктирным) индексам; при инверсии спиноры в первой и во второй паре переходят друг в друга.

Для того чтобы в системе покоя 4-спиноры $\xi^{\alpha\dot\beta\dot\gamma}$ и $\eta_{\dot\alpha\beta\gamma}$ переходили в 3-спиноры, симметричные по всем трем индексам, они должны удовлетворять условиям

$$\widehat{p}^{\dot\alpha\beta}\eta_{\dot\alpha\beta\gamma}=0,\quad \widehat{p}_{\alpha\dot\beta}\xi^{\alpha\dot\beta\dot\gamma}=0. \tag{31.1}$$

Действительно, в системе покоя

$$\widehat{p}^{\dot\alpha\beta}\to\widehat{p}_0\delta^\beta_\alpha=m\delta^\beta_\alpha$$

(как это видно из (20.1)). Поэтому условия (31.1) приводят к равенствам

$$\delta^\beta_\alpha\eta'^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=0,\qquad \delta^\beta_\alpha\xi'^{\alpha}{}_{\beta\gamma}=0,$$

где буквы со штрихом обозначают соответствующие 3-спиноры; другими словами, эти спиноры дают нуль при упрощении по ин-

дексам $\alpha\beta$, а это и означает, что они симметричны по этим индексам, а потому и по всем трем индексам.

Дифференциальная связь между спинорами ξ и η устанавливается соотношениями

$$\widehat{p}^{\delta\dot{\gamma}}\eta^{\dot{\beta}}_{\alpha\delta} = m\xi^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha}, \quad \widehat{p}_{\delta\dot{\gamma}}\xi^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha} = m\eta^{\dot{\beta}}_{\alpha\delta}. \tag{31.2}$$

Симметричность левых сторон этих уравнений (по индексам $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ или α, δ) обеспечивается условиями (31.1), в силу которых они обращаются в нуль при упрощении по всем индексам. В системе покоя 3-спиноры ξ' и η' в силу уравнений (31.2) совпадают. Исключив из уравнений (31.2) η или ξ, найдем, что каждая из компонент спиноров ξ и η удовлетворяет уравнению второго порядка

$$(\widehat{p}^2 - m^2)\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}} = 0. \tag{31.3}$$

Совокупность уравнений (31.1), (31.2) составляет полную систему волновых уравнений для частицы со спином $3/2$ [1]. Добавление спиноров ζ, χ не привело бы ни к чему новому. Они строятся согласно

$$m\zeta^{\alpha\beta\gamma} = \widehat{p}^{\alpha\dot{\delta}}\eta^{\beta\gamma}_{\dot{\delta}}, \quad m\chi_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \widehat{p}_{\dot{\alpha}\delta}\xi^{\delta}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}.$$

Уравнения частиц со спином $3/2$ могут быть сформулированы также и в ином виде, в котором используются векторные аспекты свойств спиноров (*W. Rarita, J. Schwinger*, 1941; *А. С. Давыдов, И. Е. Тамм*, 1942). Паре спинорных индексов $\alpha\dot{\beta}$ сопоставляется один четырехмерный векторный индекс μ. Поэтому компонентам спинора третьего ранга $\xi^{\alpha\dot{\beta}\dot{\gamma}}$ можно привести в соответствие компоненты «смешанных» величин $\psi^{\dot{\gamma}}_{\mu}$ с одним векторным и одним спинорным индексом. Аналогично, спинору $\eta^{\dot{\beta}\alpha\gamma}$ ставятся в соответствие величины ψ^{γ}_{μ}, а совокупности обоих спиноров — «векторный» биспинор ψ_{μ} (биспинорный индекс не выписываем). Волновое уравнение запишется тогда в виде «уравнения Дирака» для каждой из векторных компонент ψ_{μ}:

$$(\gamma\widehat{p} - m)\psi_{\mu} = 0 \tag{31.4}$$

с дополнительным условием

$$\gamma^{\mu}\psi_{\mu} = 0. \tag{31.5}$$

Используя выражения для матриц γ^{μ} в спинорном представлении и формулы связи между компонентами спинора и вектора

---

[1]) О лагранжевой формулировке этих уравнений см. указанную на с. 76 статью *Фирца* и *Паули*.

(18.6), (18.7), легко убедиться в том, что уравнения (31.2) содержатся в (31.4), а условие (31.5) эквивалентно условию симметричности спиноров $\xi^{\alpha\dot\beta\dot\gamma}$ и $\eta^{\dot\alpha\beta\gamma}$ по индексам $\dot\beta\dot\gamma$ или $\beta\gamma$. Умножив уравнение (31.4) на γ^μ, получим ввиду (31.5)

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\widehat{p}_\nu\psi_\mu = 0$$

или, воспользовавшись правилами коммутации матриц γ^μ,

$$2g^{\mu\nu}\widehat{p}_\nu\psi_\mu - \gamma^\nu\widehat{p}_\nu\gamma^\mu\psi_\mu = 0. \tag{31.6}$$

Второй член снова обращается в нуль в силу (31.5), а первый дает

$$\widehat{p}^\mu\psi_\mu = 0. \tag{31.7}$$

Легко видеть, что это условие, автоматически следующее из (31.4), (31.5), эквивалентно условиям (31.1).

Наконец, еще один способ формулировки волнового уравнения состоит во введении величин ψ_{ikl} (i, k, l = 1, 2, 3, 4) с тремя биспинорными индексами, по которым ψ_{ikl} симметричны (*V. Bargmann*, *E. P. Wigner*, 1948). Совокупность этих величин эквивалентна совокупности компонент всех четырех спиноров ξ, η, ζ, χ. Волновое уравнение записывается в виде системы «уравнений Дирака»

$$\widehat{p}_\mu\gamma^\mu_{im}\psi_{mkl} = m\psi_{ikl}. \tag{31.8}$$

Легко видеть, что эти уравнения уже приводят к нужному числу (четыре) независимых компонент ψ_{ikl}, и постановка дополнительных условий не требуется. Действительно, в системе покоя (31.8) сводятся к равенствам

$$\gamma^0_{im}\psi_{mkl} = \psi_{ikl},$$

в силу которых обращаются в нуль (в стандартном представлении) все компоненты с i, k, l = 3, 4, т. е. ψ_{ikl} сводятся к компонентам 3-спинора третьего ранга.

Изложенные результаты очевидным образом обобщаются для частиц с любым полуцелым спином s. При описании уравнениями вида (31.4), (31.5) волновая функция будет симметричным 4-тензором ранга $(2s-1)/2$ с одним биспинорным индексом. При описании же уравнениями вида (31.8) волновая функция будет иметь $2s$ биспинорных индексов, по которым она симметрична.

ГЛАВА IV

ЧАСТИЦА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

§ 32. Уравнение Дирака для электрона во внешнем поле

Волновые уравнения свободных частиц по существу выражают собой лишь те свойства, которые связаны с общими требованиями пространственно-временно́й симметрии. Происходящие же с частицами физические процессы зависят от свойств их взаимодействий.

Описание электромагнитных взаимодействий частиц в релятивистской квантовой теории оказывается возможным путем обобщения способа, применяемого для этой цели в классической и нерелятивистской квантовой теориях.

Этот метод, однако, применим для описания электромагнитных взаимодействий лишь частиц, не способных к сильным взаимодействиям. Сюда относятся электроны (и позитроны) и, таким образом, для существующей теории оказывается доступной вся огромная область квантовой электродинамики электронов. Не способны к сильным взаимодействиям также и нестабильные частицы — мюоны; они описываются той же квантовой электродинамикой в области явлений, происходящих за времена, малые по сравнению с продолжительностью их жизни (связанной со слабыми взаимодействиями).

В этой главе мы рассмотрим круг задач квантовой электродинамики, ограниченный рамками теории одной частицы. Это — задачи, в которых число частиц не меняется, а взаимодействие может быть введено при помощи понятия внешнего электромагнитного поля. Помимо условий, позволяющих рассматривать внешнее поле как заданное, пределы применимости такой теории ограничены также условиями, связанными с так называемыми радиационными поправками.

Волновое уравнение электрона в заданном внешнем поле можно получить так же, как это делается в нерелятивистской теории (см. III, § 111). Пусть $A^\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ — 4-потенциал внешнего электромагнитного поля ($\mathbf{A}$ — векторный, Φ — скалярный потенциалы). Мы получим искомое уравнение, заменив в уравнении Дирака оператор 4-импульса $\widehat{p}$ разностью $\widehat{p} - eA$, где e —

заряд частицы [1]):

$$[\gamma(\widehat{p} - eA) - m]\psi = 0. \qquad (32.1)$$

Соответствующий этому уравнению гамильтониан получается путем такой же замены из (21.13):

$$\widehat{H} = \boldsymbol{\alpha}(\widehat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}) + \beta m + e\Phi. \qquad (32.2)$$

Инвариантность уравнения Дирака при калибровочном преобразовании потенциалов электромагнитного поля выражается в том, что его вид остается неизменным, если одновременно с преобразованием $A \to A + i\widehat{p}\chi$ (где χ — произвольная функция) преобразовать волновую функцию согласно [2])

$$\psi \to \psi e^{ie\chi} \qquad (32.3)$$

(ср. аналогичное преобразование для уравнения Шредингера в т. III, § 111).

Плотность тока, выраженная через волновую функцию, дается той же формулой (21.11) $j = \overline{\psi}\gamma\psi$, что и в отсутствие внешнего поля. Легко видеть, что при повторении с уравнением (32.1) (и написанным ниже уравнением (32.4)) тех же выкладок, которые были произведены при выводе (21.11), внешнее поле выпадает, и уравнение непрерывности оказывается справедливым для прежнего выражения тока.

Произведем над уравнением (32.1) операцию зарядового сопряжения. Для этого пишем уравнение

$$\overline{\psi}[\gamma(\widehat{p} + eA) + m] = 0, \qquad (32.4)$$

которое получается комплексным сопряжением из (32.1) так же, как было получено в свое время уравнение (21.9) (при этом надо помнить, что 4-вектор A вещественен). Переписав это уравнение в виде

$$[\widetilde{\gamma}(\widehat{p} + eA) + m]\overline{\psi} = 0,$$

умножив его слева на матрицу U_C и воспользовавшись соотношениями (26.3), найдем

$$[\gamma(\widehat{p} + eA) - m](\widehat{C}\psi) = 0. \qquad (32.5)$$

Таким образом, зарядово-сопряженная волновая функция удовлетворяет уравнению, отличающемуся от исходного измене-

---

[1]) Подразумевается заряд вместе со своим знаком, так что для электрона $e = -|e|$.

[2]) Преобразование (32.3) с функцией $\chi(t, \mathbf{r})$ иногда называют «локальным калибровочным преобразованием» в отличие от «глобального калибровочного преобразования» (12.10) с постоянной фазой α.

нием знака заряда. С другой стороны, операция зарядового сопряжения означает переход от частиц к античастицам. Мы видим, что если частицы обладают электрическим зарядом, то знаки заряда электрона и позитрона автоматически оказываются противоположными.

Уравнение первого порядка (32.1) может быть преобразовано в уравнение второго порядка путем применения к (32.1) оператора $\gamma(\widehat{p}-eA)+m$:

$$[\gamma^\mu\gamma^\nu(\widehat{p}_\mu-eA_\mu)(\widehat{p}_\nu-eA_\nu)-m^2]\psi=0.$$

Произведение $\gamma^\mu\gamma^\nu$ заменяем на

$$\gamma^\mu\gamma^\nu=\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu)+\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)=g^{\mu\nu}+\sigma^{\mu\nu},$$

где $\sigma^{\mu\nu}$ — антисимметричный «матричный 4-тензор» (28.2). При умножении на $\sigma^{\mu\nu}$ можно произвести антисимметризацию, т. е. заменить

$$(\widehat{p}_\mu-eA_\mu)(\widehat{p}_\nu-eA_\nu)\to\frac{1}{2}\{(\widehat{p}_\mu-eA_\mu)(\widehat{p}_\nu-eA_\nu)\}_-=$$
$$=\frac{1}{2}e(-A_\mu\widehat{p}_\nu+\widehat{p}_\nu A_\mu-\widehat{p}_\mu A_\nu+A_\nu\widehat{p}_\mu)=$$
$$=\frac{1}{2}ie(\partial_\nu A_\mu-\partial_\mu A_\nu)=-\frac{ie}{2}F_{\mu\nu}$$

($F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ — тензор электромагнитного поля). В результате получим уравнение второго порядка в виде

$$\left[(\widehat{p}-eA)^2-m^2-\frac{i}{2}eF_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]\psi=0. \qquad (32.6)$$

Произведение $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ можно записать в трехмерном виде, выразив его через компоненты

$$\sigma^{\mu\nu}=(\boldsymbol{\alpha},i\boldsymbol{\Sigma}),\qquad F^{\mu\nu}=(-\mathbf{E},\mathbf{H}).$$

Тогда

$$[(\widehat{p}-eA)^2-m^2+e\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H}-ie\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}]\psi=0, \qquad (32.7)$$

или, в обычных единицах,

$$\Big[\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{e}{c}\Phi\right)^2-\left(i\hbar\nabla+\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-m^2c^2+$$
$$+\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{H}-i\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}\Big]\psi=0. \qquad (32.7a)$$

Появление в этих уравнениях членов, содержащих поля **E** и **H**, связано с наличием у частицы спина; мы вернемся к их обсуждению в следующем параграфе.

Среди решений уравнения второго порядка имеются, конечно, также и «лишние», не удовлетворяющие исходному уравнению первого порядка (32.1) (они представляют собой решения

уравнения (32.1) с измененным знаком перед m). Отбор нужных решений в конкретных случаях обычно очевиден и не представляет труда. Регулярный метод отбора состоит в том, что если φ есть произвольное решение уравнения второго порядка, то решение правильного уравнения первого порядка есть

$$\psi = [\gamma(\widehat{p} - eA) + m]\varphi. \tag{32.8}$$

Действительно, умножая это равенство на $\gamma(\widehat{p} - eA) - m$, мы видим, что правая часть обращается в нуль, если φ удовлетворяет уравнению (32.6).

Следует подчеркнуть, что способ введения внешнего поля в релятивистское волновое уравнение путем замены $\widehat{p}$ на $\widehat{p} - eA$ не самоочевиден. В его проведении мы по существу опирались на дополнительный принцип: указанная замена должна производиться в уравнениях первого порядка. Именно в результате этого в уравнении (32.6) появились дополнительные члены, которые не возникли бы, если бы замена была произведена непосредственно в уравнении второго порядка.

Среди стационарных решений уравнения Дирака во внешнем поле могут иметься состояния как непрерывного, так и дискретного спектра. Как и в нерелятивистской теории, состояния непрерывного спектра соответствуют инфинитному движению, при котором частица может находиться на бесконечности, где ее можно рассматривать как свободную. Поскольку собственные значения гамильтониана свободной частицы равны $\pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, ясно, что непрерывный спектр собственных значений энергии лежит при $\varepsilon \geqslant m$ и при $\varepsilon \leqslant -m$. Если же $-m < \varepsilon < m$, то частица не может находиться на бесконечности, так что движение финитно и состояние принадлежит дискретному спектру.

Как и для свободных частиц, волновые функции с «положительной частотой» ($\varepsilon > 0$) и с «отрицательной частотой» ($\varepsilon < 0$), определенным образом входят в схему вторичного квантования. Для частиц во внешнем поле эта схема естественно обобщается путем замены плоских волн в формулах (25.1) соответственно нормированными собственными функциями уравнения Дирака $\psi_n^{(+)}$ и $\psi_n^{(-)}$, относящимися к положительным ($\varepsilon_n^{(+)}$) и отрицательным ($-\varepsilon_n^{(-)}$) частотам:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi} &= \sum_n \{\widehat{a}_n \psi_n^{(+)} \exp(-i\varepsilon_n^{(+)} t) + \widehat{b}_n^+ \psi_n^{(-)} \exp(i\varepsilon_n^{(-)} t)\}, \\ \widehat{\overline{\psi}} &= \sum_n \{\widehat{a}_n^+ \overline{\psi}_n^{(+)} \exp(i\varepsilon_n^{(+)} t) + \widehat{b}_n \overline{\psi}_n^{(-)} \exp(-i\varepsilon_n^{(-)} t)\}. \end{aligned} \tag{32.9}$$

При этом надо иметь в виду, что по мере углубления потенциальной ямы уровни энергии могут перейти границу $\varepsilon = 0$, т. е. из

положительных сделаться отрицательными (или, для потенциала другого знака, из отрицательных — положительными). Тем не менее из соображений непрерывности надо продолжать считать эти уровни электронными (а не позитронными). Другими словами, к электронным следует относить все состояния, которые при бесконечно медленном выключении поля примыкают к положительной границе непрерывного спектра ($\varepsilon = m$).

Хотя уравнение Дирака для электрона во внешнем поле и дает возможность, как уже было сказано, решать широкий круг задач квантовой электродинамики, необходимо в то же время подчеркнуть, что применимость понятия внешнего поля в рамках одночастичной задачи в релятивистской теории все же ограничена. Эта ограниченность связана с самопроизвольным рождением электрон-позитронных пар, возникающим в достаточно сильных полях (см. ниже, § 35, 36).

Мы не будем рассматривать в этой книге вопрос о введении внешнего поля в волновые уравнения частиц с отличным от $1/2$ спином, поскольку он не имеет прямого физического смысла — реальные частицы с такими спинами являются адронами и их электромагнитные взаимодействия не могут быть описаны волновыми уравнениями. В этой связи следует отметить, что эти уравнения могут приводить и к физически противоречивым результатам. Так, волновое уравнение для частиц со спином 0 имеет комплексные (с мнимыми частями обоих знаков) уровни энергии в поле достаточно глубокой потенциальной ямы. Волновое уравнение для частиц со спином $3/2$ приводит к нарушению причинности, проявляющемуся в появлении решений, распространяющихся со сверхсветовой скоростью.

Задача

Определить уровни энергии электрона в постоянном магнитном поле.

Решение. Векторный потенциал: $A_x = A_z = 0$, $A_y = Hx$ (поле H направлено по оси z). Сохраняются (наряду с энергией) компоненты p_y, p_z обобщенного импульса.

Воспользуемся уравнением второго порядка для вспомогательной функции φ (см. (32.8)) и примем, что φ есть собственная функция оператора Σ_z (с собственным значением $\sigma = \pm 1$), а также операторов $\widehat{p}_y$, $\widehat{p}_z$. Уравнение для φ имеет вид

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + (eHx - p_y)^2 - eH\sigma\right\}\varphi = (\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2)\varphi.$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением Шредингера для линейного осциллятора. Собственные значения ε определяются формулой

$$\varepsilon^2 - m^2 - p_z^2 = |e|H(2n+1) - eH\sigma, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

(ср. III, § 112). Отметим, что волновая функция ψ, которую следует определить из φ по формуле (32.8), не является собственной функцией оператора Σ_z — в соответствии с тем, что для движущейся частицы спин не является сохраняющейся величиной.

§ 33. Разложение по степеням $1/c$ [1])

Мы видели (см. § 21), что в нерелятивистском пределе ($v \to 0$) две компоненты (χ) биспинора $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ обращаются в нуль. Поэтому при малых скоростях электрона $\chi \ll \varphi$. Это дает возможность получить приближенное уравнение, содержащее только двухкомпонентную величину φ, путем формального разложения волновой функции по степеням $1/c$.

Исходим из уравнения Дирака для электрона во внешнем поле в виде

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left\{c\boldsymbol{\alpha}\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + \beta mc^2 + e\Phi\right\}\psi. \tag{33.1}$$

В релятивистской энергии частицы содержится также и ее энергия покоя mc^2. Для перехода к нерелятивистскому приближению она должна быть исключена, для чего вместо ψ вводим функцию ψ' согласно

$$\psi = \psi' e^{-imc^2t/\hbar}.$$

Тогда

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + mc^2\right)\psi' = \left\{c\boldsymbol{\alpha}\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + \beta mc^2 + e\Phi\right\}\psi'.$$

Представив ψ' в виде $\psi' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{pmatrix}$, получим систему уравнений:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi\right)\varphi' = c\boldsymbol{\sigma}\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\chi', \tag{33.2}$$

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi + 2mc^2\right)\chi' = c\boldsymbol{\sigma}\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\varphi' \tag{33.3}$$

(ниже будем опускать штрихи у φ и χ, что не вызовет недоразумений, так как в этом параграфе мы пользуемся только преобразованной функцией ψ').

В первом приближении в левой стороне уравнения (33.3) оставляем лишь член $2mc^2\chi$ и получаем

$$\chi = \frac{1}{2mc}\sigma\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\varphi \tag{33.4}$$

(отметим, что $\chi \sim \varphi/c$). Подстановка этого выражения в (33.2) дает

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi\right)\varphi = \frac{1}{2m}\left(\sigma\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right)^2\varphi.$$

Для матриц Паули справедливо соотношение

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}) = \mathbf{ab} + i\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{ab}], \tag{33.5}$$

[1]) В этом параграфе пользуемся обычной системой единиц.

где **a**, **b** — произвольные векторы (см. (20.9)). В данном случае $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, но векторное произведение $[\mathbf{ab}]$ не обращается в нуль в силу некоммутативности $\widehat{\mathbf{p}}$ и **A**:

$$\left[\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right]\varphi = i\frac{e\hbar}{c}\{[\mathbf{A}\nabla] + [\nabla\mathbf{A}]\}\varphi = i\frac{e\hbar}{c}\operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\varphi.$$

Таким образом,

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right)^2 = \left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} \tag{33.6}$$

(где $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ — магнитное поле), и для φ получается уравнение

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \widehat{H}\varphi = \left[\frac{1}{2m}\left(\widehat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\Phi - \frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}\right]\varphi. \tag{33.7}$$

Это — так называемое *уравнение Паули*. Оно отличается от нерелятивистского уравнения Шредингера наличием в гамильтониане последнего члена, который имеет вид потенциальной энергии магнитного диполя во внешнем поле (ср. III, § 111). Таким образом, в первом (по $1/c$) приближении электрон ведет себя как частица, обладающая наряду с зарядом также и магнитным моментом:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{mc}\hbar\mathbf{s}. \tag{33.8}$$

При этом гиромагнитное отношение (e/mc) двое больше, чем это было бы для магнитного момента, связанного с орбитальным движением [1].

Плотность $\rho = \psi^*\psi = \varphi^*\varphi + \chi^*\chi$. В первом приближении второй член должен быть отброшен, так что $\rho = |\varphi|^2$, как и должно быть для шредингеровского уравнения.

Плотность же тока:

$$\mathbf{j} = c\psi^*\boldsymbol{\alpha}\psi = c(\varphi^*\boldsymbol{\sigma}\chi + \chi^*\boldsymbol{\sigma}\varphi).$$

Согласно (33.4) подставляем сюда

$$\chi = \frac{1}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\varphi, \quad \chi^* = \frac{1}{2mc}\left(i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\varphi^*\boldsymbol{\sigma},$$

а произведения, содержащие по два множителя $\boldsymbol{\sigma}$, преобразуются с помощью формулы (33.5), представленной в виде

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a})\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a} + i[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a}], \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a}) = \mathbf{a} + i[\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}]. \tag{33.9}$$

[1] Этот замечательный результат был получен *Дираком* в 1928 г. Двухкомпонентная волновая функция, удовлетворяющая уравнению (33.7), была введена *Паули* (1927) еще до открытия Дираком его уравнения.

В результате получается

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\varphi\nabla\varphi^* - \varphi^*\nabla\varphi) - \frac{e}{mc}\mathbf{A}\varphi^*\varphi + \frac{\hbar}{2m}\operatorname{rot}(\varphi^*\boldsymbol{\sigma}\varphi), \qquad (33.10)$$

в согласии с выражением (115.4) (см. III) из нерелятивистской теории.

Найдем теперь второе приближение, продолжив разложение до членов $\sim 1/c^2$ [1]). Будем предполагать при этом, что имеется только электрическое внешнее поле ($\mathbf{A} = 0$).

Прежде всего замечаем, что с учетом членов $\sim 1/c^2$ плотность

$$\rho = |\varphi|^2 + |\chi|^2 = |\varphi|^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}|\boldsymbol{\sigma}\nabla\varphi|^2.$$

Это выражение отличается от шредингеровского. Имея в виду найти (во втором приближении) волновое уравнение, аналогичное уравнению Шредингера, мы должны ввести вместо φ другую (двухкомпонентную) функцию $\varphi_{\text{шр}}$, для которой сохраняющийся во времени интеграл имел бы вид $\int |\varphi_{\text{шр}}|^2\, d^3x$, как это должно быть для уравнения Шредингера.

Для нахождения требуемого преобразования пишем условие

$$\int \varphi^*_{\text{шр}}\varphi_{\text{шр}} d^3x = \int \left\{\varphi^*\varphi + \frac{\hbar^2}{4m^2c^2}(\nabla\varphi^* \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}\nabla\varphi)\right\} d^3x$$

и производим интегрирование по частям:

$$\int (\nabla\varphi^* \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}\nabla\varphi)\, d^3x = -\int \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}\nabla)(\boldsymbol{\sigma}\nabla)\varphi\, d^3x = -\int \varphi^*\Delta\varphi\, d^3x$$

(или то же с переставленными φ и φ^*). Таким образом,

$$\int \varphi^*_{\text{шр}}\varphi_{\text{шр}} d^3x = \int \left\{\varphi^*\varphi - \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\varphi^*\Delta\varphi + \varphi\Delta\varphi^*)\right\} d^3x,$$

откуда видно, что

$$\varphi_{\text{шр}} = \left(1 + \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi, \quad \varphi = \left(1 - \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{8m^2c^2}\right)\varphi_{\text{шр}}. \qquad (33.11)$$

Для упрощения записи будем считать, что состояние стационарно, т. е. заменим оператор $i\hbar\partial/\partial t$ энергией ε (с вычтенной энергией покоя). В следующем (после (33.4)) приближении имеем из (33.3):

$$\chi = \frac{1}{2mc}\left(1 - \frac{\varepsilon - e\Phi}{2mc^2}\right)(\boldsymbol{\sigma}\widehat{\mathbf{p}})\varphi.$$

Это выражение надо подставить в (33.2), после чего заменить φ на $\varphi_{\text{шр}}$, согласно (33.11), опуская все время члены более высокого порядка, чем $1/c^2$. После простого вычисления получим

[1]) Ниже следуем методу *В. Б. Берестецкого* и *Л. Д. Ландау* (1949).

уравнение для $\varphi_{\text{шр}}$ в виде $\varepsilon\varphi_{\text{шр}} = \widehat{H}\varphi_{\text{шр}}$, где гамильтониан

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m} + e\Phi - \frac{\widehat{\mathbf{p}}^4}{8m^3c^2} + \frac{e}{4m^2c^2}\left\{(\boldsymbol{\sigma}\widehat{\mathbf{p}})\Phi(\boldsymbol{\sigma}\widehat{\mathbf{p}}) - \frac{1}{2}(\widehat{\mathbf{p}}^2\Phi + \Phi\widehat{\mathbf{p}}^2)\right\}.$$

Выражение в фигурных скобках преобразуется с помощью формул

$$(\boldsymbol{\sigma}\widehat{\mathbf{p}})\Phi(\boldsymbol{\sigma}\widehat{\mathbf{p}}) = \Phi\widehat{\mathbf{p}}^2 + (\boldsymbol{\sigma}\widehat{\mathbf{p}}\Phi)(\boldsymbol{\sigma}\widehat{\mathbf{p}}) = \Phi\widehat{\mathbf{p}}^2 + i\hbar(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{E})(\boldsymbol{\sigma}\widehat{\mathbf{p}}),$$
$$\widehat{\mathbf{p}}^2\Phi - \Phi\widehat{\mathbf{p}}^2 = -\hbar^2\Delta\Phi + 2i\hbar\mathbf{E}\widehat{\mathbf{p}},$$

где $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ — электрическое поле. Окончательное выражение для гамильтониана:

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m} + e\Phi - \frac{\widehat{\mathbf{p}}^4}{8m^3c^2} - \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{E}\widehat{\mathbf{p}}] - \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\operatorname{div}\mathbf{E}. \qquad (33.12)$$

Последние три члена — искомые поправки порядка $1/c^2$. Первый из них — следствие релятивистской зависимости кинетической энергии от импульса (разложение разности $c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2} - -mc^2$). Второй член, который может быть назван энергией *спин-орбитального взаимодействия*, — энергия взаимодействия движущегося магнитного момента с электрическим полем [1]. Последний же член отличен от нуля только в тех точках, где находятся заряды, создающие внешнее поле; так, для кулонова поля точечного заряда Ze: $\Delta\Phi = -4\pi Ze\delta(\mathbf{r})$ (*C. G. Darwin*, 1928).

Если электрическое поле центрально-симметрично, то

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{d\Phi}{dr},$$

и оператор спин-орбитального взаимодействия можно представить в виде

$$\frac{e\hbar}{4m^2c^2r}\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}}]\frac{d\Phi}{dr} = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2r}\frac{dU}{dr}\widehat{\mathbf{l}}\widehat{\mathbf{s}}. \qquad (33.13)$$

Здесь $\widehat{\mathbf{l}}$ — оператор орбитального момента, $\widehat{\mathbf{s}} = {}^1\!/_2\boldsymbol{\sigma}$ — оператор спина электрона, $U = e\Phi$ — потенциальная энергия электрона в поле.

[1]) Введя магнитный момент (33.8) и скорость $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$, получим эту энергию в виде $-\frac{1}{2c}\boldsymbol{\mu}[\mathbf{E}\mathbf{v}]$. На первый взгляд этот результат может показаться неестественным, так как при переходе в систему отсчета, движущуюся вместе с частицей, возникает магнитное поле $\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{E}\mathbf{v}]$, в котором магнитный момент должен был бы иметь энергию $-\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$. В действительности появление множителя ${}^1\!/_2$ («томасовская половинка», *L. Thomas*, 1926) связано с общими требованиями релятивистской инвариантности в сочетании со специфическими свойствами электрона как «спинорной» частицы с присущим ей значением гиромагнитного отношения (см. § 41).

§ 34. Тонкая структура уровней атома водорода

Определим релятивистские поправки к уровням энергии атома водорода — электрона в кулоновом поле неподвижного ядра [1]). Скорость электрона в атоме водорода $v/c \sim \alpha \ll 1$. Поэтому искомые поправки можно вычислить путем применения теории возмущений — как среднее по невозмущенному состоянию (т. е. по нерелятивистской волновой функции) от релятивистских членов в приближенном гамильтониане (33.12). Для несколько большей общности положим заряд ядра равным Ze, предполагая при этом, однако, что и $Z\alpha \ll 1$.

Напряженность поля ядра $\mathbf{E} = Ze\mathbf{r}/r^3$, а его потенциал удовлетворяет уравнению $\Delta\Phi = -4\pi Ze\delta(\mathbf{r})$. Подставив это в (33.12) (последние три члена), с учетом отрицательности заряда электрона получим оператор возмущения

$$\widehat{V} = -\frac{\widehat{\mathbf{p}}^4}{8m^3} + \frac{Z\alpha}{2r^3m^2}\widehat{\mathbf{l}}\widehat{\mathbf{s}} + \frac{Z\alpha\pi}{2m^2}\delta(\mathbf{r}). \tag{34.1}$$

Поскольку согласно нерелятивистскому уравнению Шредингера

$$\widehat{\mathbf{p}}^2\psi = 2m\left(\varepsilon_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi$$

($\varepsilon_0 = -mZ^2\alpha^2/2n^2$ — невозмущенный уровень, n — главное квантовое число), среднее значение

$$\overline{\mathbf{p}^4} = 4m^2\overline{\left(\varepsilon_0 + \frac{Z\alpha}{r}\right)^2}.$$

Эта величина, как и среднее значение второго члена в (34.1), вычисляется с помощью формул (см. III, § 36)

$$\overline{r^{-1}} = \frac{m\alpha Z}{n^2}, \quad \overline{r^{-2}} = \frac{(m\alpha Z)^2}{n^3(l+1/2)}, \quad \overline{r^{-3}} = \frac{(m\alpha Z)^3}{n^3 l(l+1/2)(l+1)} \tag{34.2}$$

(последняя относится к $l \neq 0$); собственное значение

$$\mathbf{ls} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - 3/4], & l \neq 0, \\ 0, & l = 0. \end{cases}$$

Наконец, усреднение третьего члена производится с помощью формул

$$\psi(0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{Z\alpha m}{n}\right)^{3/2}, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0. \end{cases} \tag{34.3}$$

[1]) Влияние движения ядра на значения этих поправок представляет собой эффект более высокого порядка малости, которым мы здесь не интересуемся.

Результат простого вычисления с использованием написанных формул может быть представлен во всех случаях (при всех j и l) в виде

$$\Delta\varepsilon = -\frac{m(Z\alpha)^4}{2n^3}\left(\frac{1}{j+{}^1\!/_2} - \frac{3}{4n}\right). \tag{34.4}$$

Формула (34.4) и дает искомую релятивистскую поправку к энергии водородных уровней — энергию тонкой структуры [1]). Напомним, что в нерелятивистской теории имеет место как вырождение по направлениям спина, так и кулоново вырождение по l. Тонкая структура (спин-орбитальное взаимодействие) снимает это вырождение, но не полностью, — остаются двукратно взаимно вырожденными уровни с одинаковыми n, j, но разными $l = j \pm {}^1\!/_2$ (невырожденными оказываются при этом лишь уровни с наибольшим возможным при заданном n значением $j = j_{\max} = l_{\max} + {}^1\!/_2 = n - {}^1\!/_2$). Таким образом, последовательность водородных уровней с учетом тонкой структуры такова:

$$\begin{array}{lll}
1s_{1/2}; & & \\
\underbrace{2s_{1/2},\ 2p_{1/2}}, & 2p_{3/2}; & \\
\underbrace{3s_{1/2},\ 3p_{1/2}}, & \underbrace{3p_{3/2},\ 3d_{3/2}}, & 3d_{5/2}. \\
\ldots & &
\end{array}$$

Уровень с главным квантовым числом n расщепляется на n компонент тонкой структуры.

Напомним, что в нерелятивистской механике «случайное» вырождение уровней энергии в кулоновом поле связано с существованием специфического для этого поля закона сохранения: сохраняется величина $\mathbf{A}$, оператор которой

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{2m\alpha}\{[\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{p}}] - [\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{l}}]\}$$

(см. III, (36.30)). Со специфическим законом сохранения связано и остающееся в релятивистском случае двукратное вырождение: гамильтониан уравнения Дирака $\hat{H} = \boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \beta m - e^2/r$ коммутативен с оператором

$$\hat{I} = \frac{\mathbf{r}}{r}\boldsymbol{\Sigma} + \frac{i}{m\alpha}\beta(\boldsymbol{\Sigma}\hat{\mathbf{l}} + 1)\gamma^5(\hat{H} - m\beta)$$

(*M. H. Johnson*, *B. A. Lippmann*, 1950). В нерелятивистском пределе этот оператор $\hat{I} \to \boldsymbol{\Sigma}\hat{\mathbf{A}}$.

---

[1]) Эта формула (как и более точная формула (36.10)) была получена *Зоммерфельдом* (*A. Sommerfeld*) из старой теории Бора еще до создания квантовой механики.

Мы увидим в дальнейшем (§ 123), что это оставшееся вырождение снимается так называемыми радиационными поправками (*лэмбовский сдвиг*), не учитываемыми уравнением Дирака одноэлектронной задачи.

Забегая вперед, укажем уже здесь, что по порядку величины эти поправки $\sim mZ^4\alpha^5\ln(1/\alpha)$. Поправка же второго порядка по спин-орбитальному взаимодействию была бы $\sim m(Z\alpha)^6$, так что ее отношение к радиационным поправкам $\sim Z^2\alpha/\ln(1/\alpha)$. Для водорода ($Z=1$) это отношение заведомо мало, и потому задача о точном решении уравнения Дирака в этом случае не имеет смысла. Эта задача, однако, может иметь смысл для уровней энергии электрона в поле ядра с большим Z (см. § 36).

§ 35. Движение в центрально-симметричном поле

Рассмотрим движение электрона в центрально-симметричном электрическом поле.

Поскольку при движении в центральном поле сохраняются момент и четность (относительно центра поля, выбранного в качестве начала координат), к угловой зависимости волновых функций такого движения относится все сказанное в § 24 по поводу сферических волн свободных частиц. Меняются лишь радиальные функции. Соответственно этому будем искать волновую функцию стационарных состояний (в стандартном представлении) в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r)\Omega_{jlm} \\ (-1)^{\frac{1+l-l'}{2}} g(r)\Omega_{jl'm} \end{pmatrix}, \tag{35.1}$$

где $l = j \pm 1/2$, $l' = 2j - l$, а степень -1 введена для упрощения последующих формул.

Уравнение Дирака в стандартном представлении дает следующую систему уравнений для φ и χ:

$$(\varepsilon - m - U)\varphi = \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}\chi, \quad (\varepsilon + m - U)\chi = \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}\varphi, \tag{35.2}$$

где $U(r) = e\Phi(r)$ — потенциальная энергия электрона в поле. Вычисление результата подстановки сюда выражений (35.1) сводится к вычислению правых сторон этих уравнений.

Выражая шаровой спинор $\Omega_{jl'm}$ через Ω_{jlm} согласно

$$\Omega_{jl'm} = i^{l-l'}\left(\boldsymbol{\sigma}\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\Omega_{jlm}$$

(см. (24.8)), пишем:

$$(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\chi = -i(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})\frac{g}{r}\Omega_{jlm}.$$

Преобразовав теперь произведение $(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})$ с помощью формулы (33.5), найдем после раскрытия векторных операций

$$(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\chi = -i\{\hat{\mathbf{p}}\mathbf{r} + i\boldsymbol{\sigma}[\hat{\mathbf{p}}\mathbf{r}]\}\frac{g}{r}\Omega_{jlm} =$$
$$= \{-\operatorname{div}\mathbf{r} - (\mathbf{r}\nabla) - \boldsymbol{\sigma}[\mathbf{r}\hat{\mathbf{r}}]\}\frac{g}{r}\Omega_{jlm} = -\left\{g' + \frac{2}{r}g + \frac{g}{r}\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{l}}\right\}\Omega_{jlm},$$

где $\hat{\mathbf{l}} = [\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}]$ — оператор орбитального момента; штрих означает дифференцирование по r. Собственные значения произведения $\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{l}} = 2\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}}$ равны

$$2\mathbf{ls} = \mathbf{j}^2 - \mathbf{l}^2 - \mathbf{s}^2 = j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} = \begin{cases} j - 1/2, & l = j - 1/2, \\ -j - 3/2, & l = j + 1/2. \end{cases}$$

Для единообразия записи формул в обоих случаях ($l = j \pm 1/2$) удобно ввести обозначение

$$\varkappa = \begin{cases} -(j + 1/2) = -(l+1), & j = l + 1/2, \\ +(j + 1/2) = l, & j = l - 1/2. \end{cases} \tag{35.3}$$

Число $\varkappa$ пробегает все целые значения, исключая значение 0 (причем положительные числа отвечают случаю $j = l - 1/2$, а отрицательные — случаю $j = l + 1/2$). Тогда $\mathbf{l}\boldsymbol{\sigma} = -(1 + \varkappa)$, так что

$$(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}})\chi = -\left(g' + \frac{1-\varkappa}{r}g\right)\Omega_{jlm}.$$

При подстановке этого выражения в первое из уравнений (35.2) шаровой спинор Ω_{jlm} в обеих сторонах уравнения сокращается. Поступив аналогичным образом и со вторым уравнением, получим в результате следующую систему для радиальных функций:

$$\begin{aligned} f' + \frac{1+\varkappa}{r}f - (\varepsilon + m - U)g = 0, \\ g' + \frac{1-\varkappa}{r}g + (\varepsilon - m - U)f = 0, \end{aligned} \tag{35.4}$$

или

$$\begin{aligned} (fr)' + \frac{\varkappa}{r}(fr) - (\varepsilon + m - U)gr = 0, \\ (gr)' - \frac{\varkappa}{r}(gr) + (\varepsilon - m - U)fr = 0. \end{aligned} \tag{35.5}$$

Исследуем поведение f и g на малых расстояниях, предположив, что поле $U(r)$ возрастает при $r \to 0$ быстрее, чем $1/r$. Тогда в области малых r уравнения (35.4) принимают вид

$$f' + Ug = 0, \qquad g' - Uf = 0.$$

Они имеют вещественные решения вида

$$f=\mathrm{const}\cdot\sin\left(\int U\,dr+\delta\right),\quad g=\mathrm{const}\cdot\cos\left(\int U\,dr+\delta\right),\qquad(35.6)$$

где δ — произвольная постоянная. Эти функции осциллируют при $r\to 0$, не стремясь ни к какому пределу. Легко видеть, что такая ситуация соответствует в нерелятивистской теории «падению» частицы на центр.

Прежде всего отметим, что область малых расстояний не накладывает в этом случае ограничений на выбор решения: условие при $r=0$ для осциллирующей функции отсутствует и выбор постоянной δ остается произвольным (правильного же поведения волновой функции в области больших r можно добиться при любом ε надлежащим выбором δ). Можно устранить эту неопределенность, рассматривая сингулярный (при $r=0$) потенциал как предел при $r_0\to 0$ потенциала, «обрезанного» на некотором r_0 (т. е. равного $U(r)$ при $r>r_0$ и $U(r_0)$ при $r<r_0$). При конечном r_0 получается, разумеется, определенная система уровней энергии. Однако энергия основного состояния стремится к $-\infty$ при $r_0\to 0$.

В нерелятивистской теории это как раз и означает «падение» на центр, поскольку частица на глубоком уровне локализована в малой области вокруг $r=0$. В релятивистской же теории такая ситуация вообще недопустима, так как означает неустойчивость системы относительно самопроизвольного рождения электрон-позитронных пар. Действительно, если в вакууме для рождения такой пары нужна энергия, превышающая $2m$, то в поле достаточна уже меньшая энергия. При наличии связанного состояния электрона с энергией $\varepsilon<m$ возможно рождение пары с затратой лишь энергии $\varepsilon+m<2m$, причем рождаются свободный позитрон и электрон в связанном состоянии. Если же энергия уровня связанного состояния $\varepsilon<-m$, то такое поле может рождать позитроны (с энергией $-\varepsilon>m$) самопроизвольно, без затраты энергии от внешнего источника. В рассматриваемом же поле при $r_0\to 0$ имеется бесконечное множество таких «аномальных» уровней с $\varepsilon<-m$. Поэтому поля с потенциалом $\Phi(r)$, возрастающим при $r\to 0$ быстрее, чем $1/r$, в теории Дирака вообще нельзя рассматривать. Подчеркнем, что это относится к потенциалам обоего знака. «Падение» происходит, конечно, лишь в случае притяжения, но поскольку знак $U=e\Phi$ зависит также и от знака заряда, то в одном случае аномально ведут себя электронные, а в другом — позитронные уровни; во втором случае поле рождает свободные электроны.

Рассмотрим далее поведение волновых функций на больших расстояниях. Если поле $U(r)$ достаточно быстро убывает при $r\to\infty$, то при определении асимптотического вида волновых

функций на больших расстояниях можно полностью пренебречь полем в уравнениях. При $\varepsilon > m$, т. е. в области непрерывного спектра, мы возвращаемся тогда к уравнению свободного движения, так что асимптотическая форма волновых функций (сферических волн) отличается от таковой для свободной частицы лишь появлением дополнительных «фазовых сдвигов», значения которых определяются видом поля на близких расстояниях [1]. Эти сдвиги зависят от значений j и l, или, что то же, от введенного выше числа $\varkappa$ (а также, разумеется, и от энергии ε). Обозначив их посредством $\delta_\varkappa$ и используя выражение свободной сферической волны (24.7), мы можем сразу написать искомую асимптотическую формулу

$$\psi \approx \frac{2}{r}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m}\,\Omega_{jlm}\sin\left(pr-\dfrac{\pi l}{2}+\delta_\varkappa\right) \\ -\sqrt{\varepsilon-m}\,\Omega_{jl'm}\sin\left(pr-\dfrac{\pi l'}{2}+\delta_\varkappa\right)\end{pmatrix}, \tag{35.7}$$

или, с учетом определения (35.1):

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{r}\sqrt{\frac{\varepsilon\pm m}{\varepsilon}}\,\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(pr-\frac{\pi l}{2}+\delta_\varkappa\right), \tag{35.8}$$

где $p = \sqrt{\varepsilon^2-m^2}$. Общий коэффициент здесь отвечает нормировке радиальных функций согласно (24.5).

Волновые же функции дискретного спектра ($\varepsilon < m$) при $r \to \infty$ экспоненциально затухают по закону

$$f = -\sqrt{\frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon}}\,g = \frac{A_0}{r}\exp(-r\sqrt{m^2-\varepsilon^2}), \tag{35.9}$$

где A_0 — постоянная.

Как и в нерелятивистской теории, фазовые сдвиги $\delta_\varkappa$ (точнее, величины $e^{2i\delta_\varkappa}-1$) определяют амплитуду рассеяния в данном поле (об этом будет подробнее идти речь в § 37). Мы не станем исследовать здесь аналитические свойства этих величин (ср. III, § 128). Отметим лишь, что $e^{2i\delta_\varkappa}$ как функция энергий по-прежнему имеет полюсы в точках, соответствующих уровням связанных состояний частицы. Вычет функции $e^{2i\delta_\varkappa}$ в таком полюсе определенным образом связан с коэффициентом в асимптотическом выражении соответствующей волновой функции дискретного спектра. Найдем эту связь, обобщающую нерелятивистскую формулу (128.17) (см. III). Необходимые вычисления вполне аналогичны произведенным в т. III, § 128.

[1]) Ср. III, § 33. Как и в нерелятивистской теории, $U(r)$ должно убывать быстрее, чем $1/r$. Случай $U \sim 1/r$ будет рассмотрен особо в § 36.

Продифференцируем уравнения (35.5) по энергии:

$$\left(\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon}\right)' + \frac{\varkappa}{r}\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon} - (\varepsilon + m - U)\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon} = rg,$$
$$\left(\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon}\right)' - \frac{\varkappa}{r}\frac{\partial rg}{\partial\varepsilon} + (\varepsilon - m - U)\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon} = -rf.$$

Умножим эти два уравнения соответственно на rg и на $-rf$, а два уравнения (35.5) — соответственно на $-rg$ и на rf, после чего все четыре уравнения сложим почленно. После всех сокращений получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(g\frac{\partial f}{\partial\varepsilon} - f\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right)\right] = r^2(f^2 + g^2).$$

Интегрируем это равенство по r:

$$r^2\left(g\frac{\partial f}{\partial\varepsilon} - f\frac{\partial g}{\partial\varepsilon}\right) = \int\limits_0^r (f^2 + g^2)r^2\,dr,$$

после чего переходим к пределу $r \to \infty$. В силу условия нормировки интеграл в правой стороне равенства обращается в единицу. В левой же стороне учтем, что в асимптотической области функции f и g связаны равенством

$$rg = \frac{(rf)'}{\varepsilon + m},$$

получающимся из (35.5) при пренебрежении членами с U и с $1/r$. В результате получим

$$\frac{1}{\varepsilon + m}\left[(rf)'\frac{\partial rf}{\partial\varepsilon} - rf\left(\frac{\partial rf}{\varepsilon}\right)'\right] = 1. \qquad (35.10)$$

Эта формула лишь коэффициентом ($\varepsilon+m$ вместо $2m$) отличается от аналогичной нерелятивистской формулы (для функции χ). Поэтому нет необходимости повторять все дальнейшие вычисления, и мы сразу приведем окончательную формулу, справедливую вблизи точки $\varepsilon = \varepsilon_0$ (ε_0 — уровень энергии):

$$e^{2i\delta_\varkappa} = (-1)^l\frac{2A_0^2}{\varepsilon - \varepsilon_0}\sqrt{\frac{m - \varepsilon_0}{m + \varepsilon_0}}, \qquad (35.11)$$

где A_0 — коэффициент в асимптотическом выражении (35.9).

Задача

Найти предельный вид волновой функции при малых r в поле $U \sim r^{-s}$, $s < 1$.

Решение. Для свободной частицы имеем при малых r: $f \sim r^l$, $g \sim r^{l'}$, так что при $l < l'$: $f \gg g$, а при $l > l'$: $f \ll g$. Делаем предположение

(оправдывающееся результатом), что такое соотношение сохраняется и в рассматриваемом поле. При $l < l'$ (т. е. $l = j - 1/2$, $\varkappa = -l - 1$) в первом из уравнений (35.4) член с g можно опустить, так что по-прежнему $f \sim r^l$. Из второго же уравнения имеем тогда $g \sim rfU$, т. е. $g \sim r^{l+1-s} = r^{l'-s}$. Аналогичным образом рассматривается случай $l > l'$. В результате находим

$$\text{при } l < l' : f \sim r^l, \qquad g \sim r^{l'-s};$$
$$\text{при } l > l' : f \sim r^{l-s}, \quad g \sim r^{l'}.$$

§ 36. Движение в кулоновом поле

Изучение свойств движения в наиболее важном случае кулонова поля начнем с исследования поведения волновых функций на малых расстояниях. Будем говорить для определенности о поле притяжения: $U = -Z\alpha/r$ [1]).

При малых r в уравнениях (35.5) можно опустить члены с $\varepsilon \pm m$; тогда

$$(fr)' + \frac{\varkappa}{r} fr - \frac{Z\alpha}{r} gr = 0,$$
$$(gr)' - \frac{\varkappa}{r} gr + \frac{Z\alpha}{r} fr = 0.$$

Функции fr и gr входят в каждое из этих уравнений равноправным образом. Поэтому обе ищем в виде одинаковых степеней r: $fr = ar^\gamma$, $gr = br^\gamma$. Подстановка в уравнения дает

$$a(\gamma + \varkappa) - bZ\alpha = 0, \qquad aZ\alpha + b(\gamma - \varkappa) = 0,$$

откуда

$$\gamma^2 = \varkappa^2 - (Z\alpha)^2. \tag{36.1}$$

Пусть $(Z\alpha)^2 < \varkappa^2$. Тогда γ вещественно, причем из двух значений должно быть выбрано положительное: соответствующее решение либо не расходится при $r = 0$, либо расходится менее быстро, чем другое. Такой выбор можно обосновать путем рассмотрения потенциала, обрезанного (как было объяснено в предыдущем параграфе) на некотором малом r_0, с дальнейшим переходом к пределу $r_0 \to 0$ (ср. аналогичные рассуждения в т. III, § 35). Таким образом,

$$f = \frac{Z\alpha}{\gamma + \varkappa} g = \text{const} \cdot r^{-1+\gamma},$$
$$\gamma = \sqrt{\varkappa^2 - Z^2\alpha^2} = \sqrt{(j + 1/2)^2 - Z^2\alpha^2}. \tag{36.2}$$

Хотя волновая функция и может обратиться при $r = 0$ в бесконечность (если $\gamma < 1$), интеграл от $|\psi|^2$ остается, разумеется,

[1]) В обычных единицах $U = -Ze^2/r$. При переходе к релятивистским единицам e^2 заменяется безразмерным α.

сходящимся. Если $(Z\alpha)^2 > \varkappa^2$, то оба значения γ из (36.2) — мнимые. Соответствующие решения при $r \to 0$ осциллируют (как $r^{-1}\cos(|\gamma|\ln r)$), что снова отвечает, как уже было объяснено выше, недопустимой в релятивистской теории ситуации «падения» на центр. Так как $\varkappa^2 \geqslant 1$, это значит, что чисто кулоново поле можно рассматривать в теории Дирака лишь при $Z\alpha < 1$, т. е. $Z < 137$.

Остановимся на качественном описании ситуации, возникающей при $Z > 137$. Снова, чтобы избежать неопределенности в граничном условии при $r = 0$, следует рассматривать потенциал, обрезанный на некотором расстоянии r_0 (*И. Я. Померанчук, Я. А. Смородинский*, 1945). Это имеет не только формальный, но и прямой физический смысл. Заряд $Z > 137$ фактически может быть сосредоточен только в некотором «сверхтяжелом» ядре конечного радиуса. Рассмотрим поэтому, как меняется расположение уровней с увеличением Z при заданном r_0.

В «необрезанном» кулоновом поле энергия ε_1 нижнего уровня обращается при $Z\alpha = 1$ в нуль и кривая зависимости $\varepsilon_1(Z)$ обрывается — при $Z\alpha > 1$ уровень ε_1 становится мнимым (см. (36.10)). В «обрезанном» же поле, при заданном $r_0 \neq 0$, уровень ε_1 проходит через нуль лишь при некотором $Z\alpha > 1$. Но значение $\varepsilon_1 = 0$ никак не выделено физически, а при $r_0 \neq 0$ оно ничем не выделено и формально — кривая зависимости $\varepsilon_1(Z)$ здесь не обрывается. При дальнейшем увеличении Z уровни продолжают понижаться, и при некотором «критическом» значении $Z = Z_c(r_0)$ энергия ε_1 достигает границы $(-m)$ нижнего континуума уровней. Как было объяснено в предыдущем параграфе, это означает обращение в нуль энергии, требуемой для рождения свободного позитрона. Поэтому критическое значение Z_c — это максимальный заряд, которым может обладать «голое» ядро при заданном r_0.

При $Z > Z_c$ уровень $\varepsilon_1 < -m$ и становится энергетически выгодным рождение двух электрон-позитронных пар. Позитроны уходят на бесконечность, унося кинетическую энергию $2(|\varepsilon_1| - m)$, а два электрона заполняют уровень ε_1. В результате образуется «ион» с заполненной K-оболочкой и зарядом $Z_{\text{эф}} = Z - 2$ (*С. С. Герштейн, Я. Б. Зельдович*, 1969). Эта система устойчива при $Z > Z_c$, вплоть до значений Z, когда границы $-m$ достигнет следующий уровень [1]).

[1]) Так, если заряд ядра равномерно распределен в сфере радиуса $r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ см, критическое значение $Z_c = 170$, а следующий уровень достигает границы $-m$ при $Z = 185$ (*В. С. Попов*, 1970). Подробное изложение количественной теории — см. обзорную статью *Я. Б. Зельдовича* и *В. С. Попова* (УФН.— 1971. — Т. 105. — С. 403).

Наконец отметим, что даже в случае точечного заряда ход потенциала на малых расстояниях искажается за счет радиационных поправок. Их учет приводит, однако, лишь к поправкам $\sim \alpha$ к значению $Z_c\alpha$.

Обратимся теперь к точному решению волнового уравнения (*G. Darwin*, 1928; *W. Gordon*, 1928).

Дискретный спектр ($\varepsilon < m$). Будем искать функции f и g в виде

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{m+\varepsilon}\, e^{-\rho/2}\rho^{\gamma-1}(Q_1+Q_2), \\ g &= -\sqrt{m-\varepsilon}\, e^{-\rho/2}\rho^{\gamma-1}(Q_1-Q_2), \end{aligned} \tag{36.3}$$

где введены обозначения

$$\rho = 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m^2-\varepsilon^2}, \quad \gamma = \sqrt{\varkappa^2 - Z^2\alpha^2}. \tag{36.4}$$

Такая форма представляется естественной ввиду известного уже нам поведения функций при $\rho \to 0$ (36.2) и их экспоненциального затухания ($\sim e^{-\rho/2}$) при $\rho \to \infty$. Поскольку при $\rho \to \infty$ первое равенство (35.9) должно выполняться и в случае кулонова поля, следует ожидать, что при $\rho \to \infty$ будет $Q_1 \gg Q_2$.

Подставив (36.3) в (35.4), получим уравнения

$$\rho(Q_1+Q_2)' + (\gamma+\varkappa)(Q_1+Q_2) - \rho Q_2 + Z\alpha\sqrt{\frac{m-\varepsilon}{m+\varepsilon}}(Q_1-Q_2) = 0,$$

$$\rho(Q_1-Q_2)' + (\gamma-\varkappa)(Q_1-Q_2) + \rho Q_2 - Z\alpha\sqrt{\frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon}}(Q_1+Q_2) = 0$$

(штрих означает дифференцирование по ρ). Их сумма и разность дают

$$\begin{aligned} \rho Q_1' + \left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_1 + \left(\varkappa - \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right) Q_2 = 0, \\ \rho Q_2' + \left(\gamma + \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda} - \rho\right) Q_2 + \left(\varkappa + \frac{Z\alpha m}{\lambda}\right) Q_1 = 0, \end{aligned} \tag{36.5}$$

или, после исключения Q_1 или Q_2,

$$\rho Q_1'' + (2\gamma+1-\rho)Q_1' - \left(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_1 = 0,$$

$$\rho Q_2'' + (2\gamma+1-\rho)Q_2' - \left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) Q_2 = 0$$

(надо учесть, что $\gamma^2 - (Z\alpha\varepsilon/\lambda)^2 = \varkappa^2 - (Z\alpha m/\lambda)^2$). Решение этих уравнений, конечное при $\rho = 0$:

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF(\gamma - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma+1, \rho), \\ Q_2 &= BF(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}, 2\gamma+1, \rho), \end{aligned} \tag{36.6}$$

где $F(\alpha, \beta, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Положив в каком-либо из уравнений (36.5) $\rho = 0$, найдем связь между постоянными A и B:

$$B = -\frac{\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda}{\varkappa - Z\alpha m/\lambda} A. \tag{36.7}$$

Обе гипергеометрические функции в (36.6) должны сводиться к полиномам (в противном случае они будут возрастать при $\rho \to \infty$ как e^ρ, а с ними будет возрастать — как $e^{\rho/2}$ — и вся волновая функция). Функция $F(\alpha, \beta, z)$ сводится к полиному, если параметр α равен целому отрицательному числу или нулю. Обозначим

$$\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda = -n_r. \tag{36.8}$$

Если $n_r = 1, 2, \ldots$, то обе гипергеометрические функции сводятся к полиномам. Если же $n_r = 0$, то сводится к полиному лишь одна из них. Но равенство $n_r = 0$ означает, что $\gamma = Z\alpha\varepsilon/\lambda$, и тогда, как легко проверить, $Z\alpha m/\lambda = |\varkappa|$. Если $\varkappa < 0$, то коэффициент B (36.7) обращается в нуль, так что $Q_2 = 0$, и требуемое условие не нарушается. Если же $\varkappa > 0$, то $B = -A$, и Q_2 остается при $n_r = 0$ расходящейся функцией. Таким образом, допустимы следующие значения квантового числа n_r:

$$n_r = \begin{cases} 0,\ 1,\ 2,\ \ldots & \text{при} \quad \varkappa < 0; \\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots & \text{при} \quad \varkappa > 0. \end{cases} \tag{36.9}$$

Из определения (36.8) находим теперь следующее выражение для дискретных уровней энергии:

$$\frac{\varepsilon}{m} = \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(\sqrt{\varkappa^2 - (Z\alpha)^2} + n_r)^2}\right]^{-1/2}. \tag{36.10}$$

В частности, энергия основного уровня $1s_{1/2}$ ($|\varkappa| = 1$, $n_r = 0$):

$$\varepsilon_1 = m\sqrt{1 - (Z\alpha)^2}.$$

При $Z\alpha \ll 1$ первые члены разложения формулы (36.10) дают

$$\frac{\varepsilon}{m} - 1 = -\frac{(Z\alpha)^2}{2(|\varkappa| + n_r)^2}\left\{1 + \frac{(Z\alpha)^2}{|\varkappa| + n_r}\left[\frac{1}{|\varkappa|} - \frac{3}{4(|\varkappa| + n_r)}\right]\right\}.$$

Обозначив $n_r + |\varkappa| = n$ ($= 1, 2, \ldots$) и заметив, что $|\varkappa| = j + 1/2$, мы вернемся к формуле (34.4), полученной нами ранее с помощью теории возмущений. Как уже было указано в конце § 34, дальнейшие члены этого разложения не имеют смысла, поскольку они заведомо перекрываются радиационными поправками. Формула (36.10), однако, имеет смысл в своем точном виде при $Z\alpha \sim 1$.

Отметим, что обнаруживаемое приближенной формулой (34.4) двукратное вырождение уровней сохраняется и в точной формуле: поскольку в нее входит лишь $|\varkappa|$, уровни с разными l при одном и том же j по-прежнему совпадают.

В волновой функции нам осталось еще определить общий нормировочный коэффициент A. Как всегда, волновая функция дискретного спектра должна быть нормирована условием $\int |\psi|^2\, d^3x = 1$; для функций f и g это означает условие

$$\int\limits_0^\infty (f^2 + g^2) r^2\, dr = 1.$$

Коэффициент A проще всего найти по асимптотическому виду функций при $r \to \infty$. С помощью асимптотической формулы

$$F(-n_r, 2\gamma+1, \rho) \approx \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma+1)}(-\rho)^{n_r}$$

(см. III, (d. 14)) находим

$$f \approx (-1)^{n_r} A\sqrt{m+\varepsilon}\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma+1)} e^{-\lambda r}(2\lambda r)^{\gamma+n_r-1}.$$

Сравнив эту формулу с выражением (36.22), которое будет найдено ниже, определим A. Собрав затем полученные формулы, выпишем окончательные выражения для нормированных волновых функций:

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = \frac{\pm(2\lambda)^{3/2}}{\Gamma(2\gamma+1)}\left[\frac{(m\pm\varepsilon)\Gamma(2\gamma+n_r+1)}{4m\,(Z\alpha m/\lambda)\,(Z\alpha m/\lambda-\varkappa)\,n_r!}\right]^{1/2}(2\lambda r)^{\gamma-1}e^{-\lambda r}\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda}-\varkappa\right)F(-n_r, 2\gamma+1, 2\lambda r) \mp n_r F(1-n_r, 2\gamma+1, 2\lambda r)\right\} \tag{36.11}$$

(верхние знаки относятся к f, нижние — к g).

Непрерывный спектр ($\varepsilon > m$). Нет необходимости заново решать волновое уравнение для состояний непрерывного спектра. Волновые функции этого случая получаются из функций дискретного спектра заменой [1])

$$\sqrt{m-\varepsilon} \to -i\sqrt{\varepsilon-m}, \quad \lambda \to -ip, \quad -n_r \to \gamma - i\frac{Z\alpha\varepsilon}{p} \tag{36.12}$$

(о выборе знака при аналитическом продолжении корня $\sqrt{m-\varepsilon}$ см. т. III, § 128). Заново, однако, должна быть произведена нормировка функций.

[1]) Ниже в этом параграфе p обозначает $|\mathbf{p}| = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$.

Проделав в (36.11) указанную замену, представим функции f и g в виде

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} \sqrt{\varepsilon+m} \\ i\sqrt{\varepsilon-m} \end{matrix}\right\} \cdot A' e^{ipr}(2pr)^{\gamma-1} \times$$

$$\times \left[e^{i\xi}F(\gamma-i\nu, 2\gamma+1, -2ipr) \mp e^{-i\xi}F(\gamma+1-i\nu, 2\gamma+1, -2ipr)\right],$$

где A' — новая нормировочная постоянная и введены обозначения

$$\nu = \frac{Z\alpha\varepsilon}{p}, \qquad e^{-2i\xi} = \frac{\gamma - i\nu}{\varkappa - i\nu m/\varepsilon} \tag{36.13}$$

(величина ξ вещественна, поскольку $\gamma^2 + (Z\alpha\varepsilon/p)^2 = \varkappa^2 + (Z\alpha m/p)^2$).

Согласно известной формуле

$$F(\alpha, \beta, z) = e^z F(\beta-\alpha, \beta, -z)$$

(см. III, (d. 10)) имеем

$$F(\gamma+1-i\nu, 2\gamma+1, -2ipr) = e^{-2ipr}F(\gamma+i\nu, 2\gamma+1, 2ipr) =$$
$$= e^{-2ipr}F^*(\gamma-i\nu, 2\gamma+1, -2ipr),$$

поэтому

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = 2iA'\sqrt{\varepsilon \pm m}(2pr)^{\gamma-1} \begin{matrix} \mathrm{Im} \\ \mathrm{Re} \end{matrix}\left\{e^{i(pr+\xi)}F(\gamma-i\nu, 2\gamma+1, -2ipr)\right\}. \tag{36.14}$$

Нормировочный коэффициент A' определяется сравнением асимптотического выражения для этой функции с общей формулой (35.7) для нормированной сферической волны. Выпишем сразу получающееся таким образом выражение для волновых функций непрерывного спектра (и затем проверим его) [1]:

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = 2^{3/2}\sqrt{\frac{m\pm\varepsilon}{\varepsilon}}e^{\frac{\pi\nu}{2}}\frac{|\Gamma(\gamma+1+i\nu)|}{\Gamma(2\gamma+1)}\frac{(2pr)^\gamma}{r} \times$$
$$\times \begin{matrix} \mathrm{Im} \\ \mathrm{Re} \end{matrix}\left\{e^{i(pr+\xi)}F(\gamma-i\nu, 2\gamma+1, -2ipr)\right\}. \tag{36.15}$$

Асимптотическое выражение для этой функции находится с помощью формулы III, (d, 14), в которой в данном случае существен только первый член (второй убывает с более высокой степенью $1/r$):

$$\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\} = \frac{\sqrt{2}}{r}\sqrt{\frac{\varepsilon\pm m}{\varepsilon}} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix}\left(pr - \frac{\pi l}{2} + \delta_\varkappa + \nu\ln 2pr - \frac{\pi l}{2}\right), \tag{36.16}$$

[1]) Волновые функции в поле отталкивания получаются отсюда изменением знака перед $Z\alpha$, т. е. изменением знака ν.

где

$$\delta_{\varkappa} = \xi - \arg\Gamma(\gamma + 1 + i\nu) - \frac{\pi\gamma}{2} + \frac{\pi l}{2}, \qquad (36.17)$$

или

$$e^{2i\delta_{\varkappa}} = \frac{\varkappa - i\nu m/\varepsilon}{\gamma - i\nu} \frac{\Gamma(\gamma+1-i\nu)}{\gamma+1+i\nu} e^{i\pi(l-\gamma)}. \qquad (36.18)$$

Отметим для будущих ссылок выражение фаз в ультрарелятивистском случае ($\varepsilon \gg m$, $\nu \approx Z\alpha$)

$$e^{2i\delta_{\varkappa}} = \frac{\varkappa}{\gamma - iZ\alpha} \frac{\Gamma(\gamma+1-iZ\alpha)}{\Gamma(\gamma+1+iZ\alpha)} e^{i\pi(l-\gamma)}. \qquad (36.19)$$

Выражение (36.16) отличается от (35.8) лишь логарифмическим членом в аргументе тригонометрической функции. Как и в случае уравнения Шредингера, медленность убывания кулонова потенциала приводит к искажению фазы волны, которая становится медленно меняющейся функцией r.

При аналитическом продолжении в область $\varepsilon < m$ выражение (36.18) принимает вид

$$e^{2i\delta_{\varkappa}} = \frac{\varkappa - Z\alpha m/\lambda}{\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda} \frac{\Gamma(\gamma+1-Z\alpha\varepsilon/\lambda)}{\Gamma(\gamma+1+Z\alpha\varepsilon/\lambda)} e^{i\pi(l-\gamma)}. \qquad (36.20)$$

Оно имеет полюсы в точках, где $\gamma + 1 - Z\alpha\varepsilon/\lambda = 1 - n_r$, $n_r = 1, 2, \ldots$ (полюсы Г-функции в числителе), а также в точке $\gamma - Z\alpha\varepsilon/\lambda = -n_r = 0$ (если при этом $\varkappa < 0$); как и следовало ожидать, эти точки совпадают с дискретными уровнями энергии.

Вблизи какого-либо из полюсов с $n_r \neq 0$ имеем

$$e^{2i\delta_{\varkappa}} \approx \frac{\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda} - \varkappa\right) e^{i\pi(l-\gamma)}}{n_r \Gamma(2\gamma+1+n_r)} \Gamma\left(\gamma + 1 - \frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right).$$

Вид Г-функции вблизи ее полюса находится с помощью известной формулы $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin\pi z$:

$$\Gamma\left(\gamma+1-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) \approx \frac{\pi}{\Gamma(n_r)\sin\pi(\gamma+1-Z\alpha\varepsilon/\lambda)},$$

$$\sin\pi\left(\gamma+1-\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right) \approx \pi\cos\pi n_r \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{Z\alpha\varepsilon}{\lambda}\right)(\varepsilon-\varepsilon_0) = \\ = (-1)^{n_r}\frac{\pi Z\alpha m^2}{\lambda^3}(\varepsilon-\varepsilon_0)$$

(ε_0 — уровень энергии). Таким образом [1]),

$$e^{2i\delta_{\varkappa}} \approx (-1)^{l+n_r} \frac{e^{-i\pi\gamma}\left(\frac{Z\alpha m}{\lambda} - \varkappa\right)}{n_r!\,\Gamma(2\gamma+1+n_r)} \frac{\lambda^3}{Z\alpha m^2} \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0}. \qquad (36.21)$$

[1]) Легко убедиться в том, что эта формула остается справедливой и при $n_r = 0$.

В конце предыдущего параграфа была получена формула (35.11), связывающая вычет функции $e^{2i\delta_\varkappa}$ в ее полюсе с коэффициентом в асимптотическом выражении волновой функции соответствующего связанного состояния. В случае кулонова поля, однако, эта формула должна быть несколько видоизменена в связи с тем, что вместо постоянного фазового сдвига $\delta_\varkappa$ (как это было в (35.7)) в (36.16) стоит сумма $\delta_\varkappa + \nu \ln(2pr)$. В левой стороне (35.11) надо поэтому писать не $e^{2i\delta_\varkappa}$, а

$$\exp[2i\delta_\varkappa + 2i\nu\ln(2pr)] \to e^{2i\delta_\varkappa}(2i\lambda r)^{2(n_r+\gamma)}.$$

Используя (36.21) и определяя из (35.11) коэффициент A_0 (который будет теперь степенной функцией r), находим асимптотический вид нормированной волновой функции дискретного спектра:

$$f = \left[\frac{(Z\alpha m/\lambda - \varkappa)(m+\varepsilon)\lambda^2}{2n_r!\, Z\alpha m^2\Gamma(2\gamma+1+n_r)}\right]^{1/2} \frac{e^{-\lambda r}}{r}(2\lambda r)^{n_r+\gamma}. \tag{36.22}$$

Эта формула была уже использована для определения коэффициента в (36.11).

§ 37. Рассеяние в центрально-симметричном поле

Напишем асимптотическое выражение для волновой функции частицы, рассеивающейся в поле неподвижного силового центра, в виде [1])

$$\psi = u_{\varepsilon\mathbf{p}}e^{ipz} + u'_{\varepsilon\mathbf{p}'}e^{ipr}/r. \tag{37.1}$$

Здесь $u_{\varepsilon\mathbf{p}}$ — биспинорная амплитуда падающей плоской волны. Биспинор же $u'_{\varepsilon\mathbf{p}'}$ является функцией направления рассеяния $\mathbf{n}'$, а при каждом заданном значении $\mathbf{n}'$ совпадает по форме (но, конечно, не по нормировке!) с биспинорной амплитудой плоской волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{n}'$.

Мы видели в § 24, что биспинорная амплитуда плоской волны полностью определяется заданием двухкомпонентной величины — 3-спинора w, представляющего собой нерелятивистскую волновую функцию в системе покоя частицы. Через этот спинор выражается и плотность потока: она пропорциональна w^*w (с коэффициентом пропорциональности, зависящим только от энергии ε и, следовательно, одинаковым для падающих и рассеянных

[1]) В § 37, 38 p обозначает $|\mathbf{p}|$, а в качестве индексов у амплитуды пишем отдельно ε и $\mathbf{p}$.

частиц). Поэтому сечение рассеяния $d\sigma = (w'^* w'/w^* w)do$ или, если (как и в § 24 нормировать падающую волну условием $w^* w = 1$,

$$d\sigma = w'^* w' do.$$

Введем оператор рассеяния f согласно определению

$$w' = \hat{f} w. \tag{37.2}$$

Ввиду двухкомпонентности величин w, w' определенный таким образом оператор аналогичен операторной амплитуде рассеяния, фигурирующей в нерелятивистской теории рассеяния с учетом спина (см. III, § 140). Поэтому непосредственно переносятся сюда полученные там формулы, выражающие оператор через фазовые сдвиги волновых функций в рассеивающем поле. Надо лишь произвести переобозначение этих фаз, выразив введенные в III, § 140 сдвиги δ_l^+ и δ_l^- через фазовый сдвиг $\delta_\varkappa$, фигурирующий в релятивистской формуле (35.7). Напомним, что фазы δ_l^+ и δ_l^- относились к состояниям с орбитальным моментом l и полным моментом $j = l + 1/2$ и $j = l - 1/2$. Согласно определению (35.3) $\varkappa = -l - 1$ при $j = l + 1/2$ и $\varkappa = l$ при $j = l - 1/2$. Поэтому мы должны переобозначить

$$\delta_l^+ \to \delta_{-(l+1)}, \qquad \delta_l^- \to \delta_l$$

(и помнить, что индекс у δ задает теперь значение числа $\varkappa$!). Таким образом, получим следующие формулы:

$$\hat{f} = A + B\boldsymbol{\nu\sigma}, \tag{37.3}$$

$$A = \frac{1}{2ip}\sum_{l=0}^{\infty}[(l+1)(e^{2i\delta_{-l-1}} - 1) + l(e^{2i\delta_l} - 1)]P_l(\cos\theta), \tag{37.4}$$

$$B = \frac{1}{2p}\sum_{l=1}^{\infty}(e^{2i\delta_{-l-1}} - e^{2i\delta_l})P_l^1(\cos\theta), \tag{37.5}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении $[\mathbf{nn}']$.

Поскольку w — спинорная волновая функция в системе покоя, то и поляризационные свойства рассеяния описываются с помощью $\hat{f}$ теми же формулами, что и в III, § 140.

В случае кулонова поля оказывается возможным выразить обе функции $A(\theta)$ и $B(\theta)$ через одну. Укажем вкратце ход соответствующих вычислений [1]).

---

[1]) *Gluckstern R. L., Lin S.R.*//J. Math. Phys. — 1964. — Vol. 5. — P. 1594.

Для кулонова поля фазы $\delta_\varkappa$ даются формулой (36.18), которую представим в виде

$$e^{2i\delta_\varkappa} = -\left(\varkappa - i\frac{Ze^2m}{p}\right)\frac{\varkappa}{|\varkappa|}C_\varkappa,$$
$$C_\varkappa = -\frac{\Gamma(\gamma - i\nu)}{\Gamma(\gamma + 1 + i\nu)}e^{i\pi(|\varkappa| - \gamma)} \tag{37.6}$$

(замечаем, что $e^{i\pi l} = e^{i\pi\varkappa}$ при $\varkappa > 0$ и $e^{i\pi l} = -e^{i\pi\varkappa}$ при $\varkappa < 0$). С помощью введенных таким образом величин ряды (37.4), (37.5) могут быть представлены в виде

$$A(\theta) = \frac{1}{p}G(\theta) - i\frac{Ze^2m}{p^2}F(\theta),$$
$$B(\theta) = -\frac{i}{p}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}G(\theta) + \frac{Ze^2m}{p^2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}F(\theta), \tag{37.7}$$

где

$$G(\theta) = \frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty} l^2C_l(P_l + P_{l-1}),\ F(\theta) = \frac{i}{2}\sum_{l=1}^{\infty} lC_l(P_l - P_{l-1}). \tag{37.8}$$

При преобразовании ряда $B(\theta)$ использованы следующие рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра:

$$P_l^1 + P_{l-1}^1 = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot l(P_l - P_{l-1}), \tag{37.9}$$

$$P_l^1 - P_{l-1}^1 = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\cdot l(P_l + P_{l-1}). \tag{37.10}$$

С другой стороны, в силу тождества

$$(1+\cos\theta)\frac{d}{d\cos\theta}[P_l(\cos\theta) - P_{l-1}(\cos\theta)] = \\ = l[P_l(\cos\theta) + P_{l-1}(\cos\theta)] \tag{37.11}$$

функции $F(\theta)$ и $G(\theta)$ связаны друг с другом соотношением

$$G = (1-\cos\theta)\frac{dF}{d\cos\theta} = -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\frac{dF}{d\theta}. \tag{37.12}$$

Тем самым $A(\theta)$ и $B(\theta)$ оказываются выраженными через одну функцию $F(\theta)$ [1]).

[1]) Функция $F(\theta)$ не выражается в замкнутом виде через элементарные функции. Однако ее можно записать в виде определенного двойного интеграла — см. указанную выше статью.

§ 38. Рассеяние в ультрарелятивистском случае

Особо рассмотрим рассеяние в ультрарелятивистском случае ($\varepsilon \gg m$). В первом приближении полностью пренебрегаем в волновом уравнении массой m. При этом удобно пользоваться для ψ спинорным представлением $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, так как уравнения для ξ и η при $m = 0$ разделяются:

$$-i\boldsymbol{\sigma}\nabla\xi = (\varepsilon - U)\xi, \qquad -i\boldsymbol{\sigma}\nabla\eta = -(\varepsilon - U)\eta \tag{38.1}$$

(приобретая «нейтринный» вид, см. § 30).

Спиральному состоянию электрона, поляризованного в направлении $\mathbf{p}$, отвечает волновая функция $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$, а поляризованному против $\mathbf{p}$: $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}$. В силу независимости уравнений для ξ и η ясно, что это свойство при рассеянии не меняется. Другими словами, при рассеянии ультрарелятивистских электронов сохраняется спиральность. Из соображений симметрии (продольная поляризация) очевидно, что при рассеянии спиральных частиц отсутствует азимутальная асимметрия. Можно также утверждать, что сечение рассеяния спиральных электронов не зависит от знака спиральности; это следует из того, что центральное поле инвариантно по отношению к инверсии, а знак спиральности при инверсии меняется на обратный.

В ультрарелятивистском случае формулы (37.3)–(37.5) могут быть существенно упрощены (*D. R. Yennie*, *D. G. Ravenhall*, *R. N. Wilson*, 1954).

Пусть падающий электрон поляризован, скажем, вдоль направления движения $\mathbf{n}$. Для плоской волны с определенным значением $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}$ спинор $\xi(= (\varphi + \chi)/\sqrt{2})$ пропорционален тому же 3-спинору w, который фигурировал в стандартном представлении волны. Поэтому связь между спинорными амплитудами падающей и рассеянной волн в новом представлении по-прежнему осуществляется тем же оператором $\widehat{f}$.

В результате рассеяния вектор поляризации поворачивается вместе с импульсом, приобретая направление $\mathbf{n}'$. Воздействие оператора $\widehat{f}$ на спиновую волновую функцию электрона сводится поэтому к повороту спина на угол θ (угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$) вокруг оси $\boldsymbol{\nu}$. В свою очередь такой поворот эквивалентен повороту системы координат вокруг той же оси в обратном направлении, т. е. на угол $-\theta$. Отсюда следует, что оператор $\widehat{f}$ должен совпадать (с точностью до коэффициента) с оператором, осуществляющим преобразование волновой функции при указанном изменении системы координат, т. е. с оператором (18.17) с заменой $\theta \to -\theta$.

Сравнив (37.3) с (18.17), найдем, что должно быть

$$\frac{B}{A} = -i\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}. \tag{38.2}$$

Таким образом, в ультрарелятивистском пределе

$$\widehat{f} = A(\theta)\left[1 - i\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\cdot\boldsymbol{\nu\sigma}\right]. \tag{38.3}$$

Выражение для $A(\theta)$ (37.4) тоже можно упростить, если воспользоваться возникающим в том же пределе соотношением между фазами $\delta_\varkappa$ и $\delta_{-\varkappa}$. Для его вывода замечаем, что уравнения (35.4) для функций f и g после вычеркивания членов с m становятся инвариантными относительно замены

$$\varkappa \to -\varkappa, \quad f \to g, \quad g \to -f,$$

не затрагивающей параметров самой частицы или поля. Поэтому должно быть $f_\varkappa/g_\varkappa = -g_{-\varkappa}/f_{-\varkappa}$, и после подстановки асимптотических выражений находим

$$\mathrm{tg}\left(pr - \frac{l\pi}{2} + \delta_\varkappa\right) = -\,\mathrm{ctg}\left(pr - \frac{l'\pi}{2} + \delta_{-\varkappa}\right),$$

$$\delta_\varkappa = \delta_{-\varkappa} - (l' - l)\frac{\pi}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

откуда

$$e^{2i\delta_\varkappa} = e^{2i\delta_{-\varkappa}}. \tag{38.4}$$

Используя это соотношение (и заменяя в первом члене суммы в (37.4) индекс суммирования l на $l-1$), получаем

$$A(\theta) = \frac{1}{2ip}\sum_{l=1}^{\infty} l(e^{2i\delta_l} - 1)[P_l(\cos\theta) + P_{l-1}(\cos\theta)]. \tag{38.5}$$

Из (38.2) следует, что $\mathrm{Re}(AB^*) = 0$. Это значит, что в рассматриваемом приближении сечение не зависит от начальной поляризации частиц, а неполяризованный пучок остается неполяризованным и после рассеяния (см. формулы III, (140.8)–(140.10)). Отметим также, что при $\theta \to \pi$ выражение $A(\theta)$ (38.5) стремится к нулю как $(\pi - \theta)^2$ (напомним, что $P_l(-1) = (-1)^l$). Вместе с ним стремится к нулю также и сечение

$$\frac{d\sigma}{do} = |A|^2 + |B|^2 = \frac{|A(\theta)|^2}{\cos^2(\theta/2)} \tag{38.6}$$

Перечисленные свойства исчезают, разумеется, в следующих приближениях по малой величине m/ε. В частности, анализ показывает, что при $\theta \to \pi$ сечение стремится к пределу, пропорциональному $(m/\varepsilon)^2$.

Для кулонова поля в ультрарелятивистском случае фазы $\delta_\varkappa$ не зависят от энергии, как это видно из (36.9) [1]. Поэтому в чисто кулоновом поле сечение рассеяния при $\varepsilon \gg m$ имеет вид

$$d\sigma = \frac{\tau(\theta)}{\varepsilon^2} do, \tag{38.7}$$

где τ — функция только от угла.

§ 39. Система волновых функций непрерывного спектра для рассеяния в кулоновом поле

В дальнейшем (см. § 95, 96) будут рассмотрены различные неупругие процессы, происходящие при рассеянии ультрарелятивистских электронов в поле тяжелого ($Z\alpha \sim 1$) ядра. Для вычисления соответствующих матричных элементов нам понадобятся волновые функции, асимптотическая (при $r \to \infty$) форма которых складывается из плоской и сферической волн.

Мы увидим, что в ультрарелятивистском случае (энергия электрона $\varepsilon \gg m$) основную роль в рассеянии играют передачи импульса (от электрона ядру) $q = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}| \sim m$. Этим значениям q отвечают «прицельные расстояния» $\rho \sim 1/q \sim 1/m$, причем электрон отклоняется на углы [2]

$$\theta \sim \frac{q}{p} \sim \frac{m}{\varepsilon}. \tag{39.1}$$

В терминах координат r (расстояние от центра) и $z = r\cos\theta$ это означает область

$$\rho \equiv r\sin\theta \sim 1/m, \quad p(r-z) = pr(1-\cos\theta) \sim 1. \tag{39.2}$$

При этом $r \sim \varepsilon/m^2$, т. е. мы имеем дело с областью больших расстояний.

Напишем уравнение Дирака в виде

$$(\varepsilon - U - m\beta + i\boldsymbol{\alpha}\nabla)\psi = 0, \qquad U = -Z\alpha/r. \tag{39.3}$$

Преобразуем его в уравнение второго порядка, для чего применим к (39.3) оператор $(\varepsilon - U + m\beta - i\boldsymbol{\alpha}\nabla)$:

$$(\Delta + p^2 - 2eU)\psi = (-i\boldsymbol{\alpha}\nabla U - U^2)\psi. \tag{39.4}$$

Поскольку в рассматриваемой области $r \gg Z\alpha/\varepsilon$, то $U \ll \varepsilon$. В первом приближении можно пренебречь в (39.4) правой

[1]) Это видно и непосредственно из уравнений (38.1), поскольку для кулонова поля заменой $\mathbf{r} \to \mathbf{r}'/\varepsilon$ энергию ε можно вообще устранить из уравнений.

[2]) В этом параграфе p обозначает $|\mathbf{p}|$.

стороной. Остающееся уравнение

$$\left(\Delta + p^2 + \frac{2\varepsilon Z\alpha}{r}\right)\psi = 0 \tag{39.5}$$

по форме совпадает с нерелятивистским уравнением Шредингера в кулоновом поле

$$\left(\frac{1}{2m}\Delta + \frac{p^2}{2m} + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi = 0, \tag{39.5a}$$

отличаясь от него лишь очевидным изменением обозначения параметров (в «потенциальной энергии» — лишний множитель ε/m). Поэтому мы можем сразу написать его решение, имеющее требуемый асимптотический вид (см. III, § 136).

Так, волновая функция, содержащая асимптотически плоскую ($\propto e^{i\mathbf{pr}}$) и расходящуюся сферическую волны, имеет вид

$$\begin{gathered}\psi^{(+)}_{\varepsilon\mathbf{p}} = C\frac{u_{\varepsilon\mathbf{p}}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{i\mathbf{pr}}F\left(\frac{iZ\alpha\varepsilon}{p}, 1, i(pr - \mathbf{pr})\right),\\ C = e^{\pi Z\alpha\varepsilon/(2p)}\Gamma\left(1 - i\frac{Z\alpha\varepsilon}{p}\right),\end{gathered} \tag{39.6}$$

где F — вырожденная гипергеометрическая функция, а $u_{\varepsilon\mathbf{p}}$ — постоянная биспинорная амплитуда плоской волны, нормированная принятым нами условием (23.4)

$$\overline{u}_{\varepsilon\mathbf{p}}u_{\varepsilon\mathbf{p}} = 2m. \tag{39.7}$$

Волновая функция (39.6) нормирована таким образом, что плоская волна в ее асимптотическом выражении имеет обычный вид

$$\frac{u_{\varepsilon\mathbf{p}}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{i\mathbf{pr}},$$

отвечающий одной частице в единичном объеме. Поскольку в ультрарелятивистском случае $p \approx \varepsilon$, в (39.6) можно положить $Z\alpha\varepsilon/p \approx Z\alpha$:

$$\begin{gathered}\psi^{(+)}_{\varepsilon\mathbf{p}} = C\frac{u_{\varepsilon\mathbf{p}}}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{i\mathbf{pr}}F\left(iZ\alpha, 1, i(pr - \mathbf{pr})\right),\\ C = e^{Z\alpha\pi/2}\Gamma(1 - iZ\alpha).\end{gathered} \tag{39.8}$$

Обратим внимание на то, что хотя мы рассматриваем расстояния настолько большие, что $pr \gg 1$, заменить в (39.8) гипергеометрическую функцию ее асимптотическим выражением нельзя: аргументом функции F является не pr, а величина $pr(1 - \cos\theta)$, не предполагающаяся нами большой [1].

[1]) В т. III, § 135 мы интересовались сколь угодно большими r, и поэтому такая замена была возможна для любых углов θ.

В применениях оказывается необходимым также следующее приближение в ψ, которое имеет спинорную структуру, отличную от структуры (39.8) (сводящейся к множителю $u_{\varepsilon\mathbf{p}}$). Для его вычисления пишем ψ в виде

$$\psi = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{i\mathbf{pr}} (u_{\varepsilon\mathbf{p}} F + \varphi).$$

В правой стороне уравнения (39.4) сохраняем теперь член с первой степенью U и для функции φ получаем уравнение

$$(\Delta + 2i\mathbf{p}\nabla - 2\varepsilon U)\varphi = -iu_{\varepsilon\mathbf{p}}(\boldsymbol{\alpha}\nabla U)F. \qquad (39.9)$$

Его решение можно найти, заметив, что функция F удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + 2i\mathbf{p}\nabla - 2\varepsilon U)F = 0$$

(в чем можно убедиться, подставив (39.6) в (39.5)). Применив к этому уравнению операцию ∇, получим

$$(\Delta + 2i\mathbf{p}\nabla - 2\varepsilon U)\nabla F = 2\varepsilon F \nabla U.$$

Сравнив с уравнением (39.9), найдем

$$\varphi = -\frac{i}{2\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha}\nabla) u_{\varepsilon\mathbf{p}} F.$$

Выпишем окончательное выражение для $\psi^{(+)}$ и для такой же функции $\psi^{(-)}$, содержащей в своем асимптотическом выражении сходящуюся сферическую волну:

$$\psi^{(+)}_{\varepsilon\mathbf{p}} = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{i\mathbf{pr}} \left(1 - \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F(iZ\alpha, 1, i(pr - \mathbf{pr})) u_{\varepsilon\mathbf{p}},$$

$$\psi^{(-)}_{\varepsilon\mathbf{p}} = \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{i\mathbf{pr}} \left(1 - \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F(-iZ\alpha, 1, -i(pr + \mathbf{pr})) u_{\varepsilon\mathbf{p}}, \qquad (39.10)$$

$$C = e^{\pi Z\alpha/2}\Gamma(1 - iZ\alpha)$$

(*W. H. Furry*, 1934). Выпишем также аналогичные функции ($\psi_{-\varepsilon-\mathbf{p}}$) с «отрицательной частотой», которые понадобятся при рассмотрении процессов с участием позитронов. Их можно получить из функций $\psi_{\varepsilon\mathbf{p}}$ заменой $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, $\varepsilon \to -\varepsilon$, причем $p = |\mathbf{p}|$ не меняется (в силу последнего обстоятельства параметр $iZ\alpha$ гипергеометрической функции меняет знак, как это видно из первоначального выражения (39.6), в котором этот параметр фигурирует в виде $iZ\alpha\varepsilon/p$). Таким образом, получим

$$\psi^{(+)}_{-\varepsilon-\mathbf{p}} = \frac{C}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-i\mathbf{pr}} \left(1 + \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F(-iZ\alpha, 1, i(pr + \mathbf{pr})) u_{-\varepsilon-\mathbf{p}},$$

$$\psi^{(-)}_{-\varepsilon-\mathbf{p}} = \frac{C^*}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-i\mathbf{pr}} \left(1 + \frac{i\boldsymbol{\alpha}}{2\varepsilon}\nabla\right) F(iZ\alpha, 1, -i(pr - \mathbf{pr})) u_{-\varepsilon-\mathbf{p}}, \qquad (39.11)$$

$$C = e^{-\pi Z\alpha/2}\Gamma(1 + iZ\alpha).$$

По поводу произведенных вычислений надо еще сделать следующее замечание. Поставленное нами асимптотическое условие само по себе отнюдь не достаточно для однозначного выбора решения волнового уравнения (это ясно хотя бы из того, что всегда можно добавить к ψ, не нарушая этого условия, любую кулонову расходящуюся сферическую волну). Написав решение уравнения (39.5) в виде (39.6), мы тем самым молчаливо подразумевали выбор решения, конечного при $r = 0$. Такое требование было необходимым в III, § 135, 136, где рассматривались решения точного уравнения Шредингера, справедливые во всем пространстве [1]). В данном же случае уравнение (39.5) относится лишь к большим расстояниям, и потому произведенный отбор решения нуждается в дополнительном обосновании.

Оно дается тем фактом, что большим «прицельным расстояниям» $\rho = r\sin\theta$ соответствуют большие орбитальные моменты l и малые углы рассеяния θ: при $\rho \sim 1/m$ имеем

$$l \sim \rho p \sim \rho\varepsilon \sim \varepsilon/m \gg 1,$$

а угол θ можно оценить квазиклассическим способом:

$$\theta \sim \frac{1}{p}\int \frac{dU}{dr}dt \sim \frac{U'(\rho)\rho}{p} \sim \frac{m}{\varepsilon} \ll 1.$$

Это значит, что в разложении ψ по сферическим волнам будут фигурировать (в рассматриваемой области r и θ) в основном волны с указанными большими значениями l. Но сферическая волна с большим l заведомо убывает до малых значений при приближении к началу координат на «классически недостижимые» (благодаря центробежному барьеру) расстояния $r \ll l/\varepsilon$. Поэтому, если производить «сшивание» решения уравнения (39.5) с решением точного уравнения (39.4) на малых расстояниях при $r \sim r_1$, где $l/\varepsilon \gg r_1 \gg Z\alpha/\varepsilon$, то граничное условие для решения уравнения (39.5) будет заключаться в требовании его малости, чем и оправдывается сделанный нами выбор.

Задача

Для кулонова поля притяжения с $Z\alpha \ll 1$ найти поправку (относительного порядка $Z\alpha$) к нерелятивистской волновой функции дискретного спектра.

Решение. Скорость электрона в связанном состоянии $v \sim Z\alpha$, так что при $Z\alpha \ll 1$ в нулевом приближении волновая функция — нерелятивистская, т. е.

$$\psi = u\psi_{\text{нр}},$$

[1]) В изложенном в т. III, § 135 ходе решения это условие было обеспечено выбором частного интеграла вида (135.1) вместо общей суммы интегралов с различными значениями β_1, β_2.

где $\psi_{\text{нр}}$ — удовлетворяющая нерелятивистскому уравнению Шредингера функция, u — биспинор вида $u = \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}$, где w — спинор, описывающий поляризационное состояние электрона. В следующем приближении пишем: $\psi = u\psi_{\text{нр}} + \psi^{(1)}$ и, подставляя в (39.4), находим для $\psi^{(1)}$ уравнение

$$\left(\frac{1}{2m} - |\varepsilon_n| + \frac{Z\alpha}{r}\right)\psi^{(1)} = i\frac{Z\alpha}{2m}\left(\nabla\frac{1}{r}\right)(\boldsymbol{\alpha}u)\psi_{\text{нр}},$$

где ε_n — нерелятивистский дискретный уровень энергии. Здесь опущены члены относительного порядка $(Z\alpha)^2$ (следует учитывать, что в нерелятивистском случае основные расстояния — порядка боровского радиуса: $r \sim 1/mZ\alpha$). Решение этого уравнения: $\psi^{(1)} = -\frac{i}{2m}\boldsymbol{\alpha}u\nabla\psi_{\text{нр}}$, так что

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m}\boldsymbol{\alpha}\nabla\right)u\psi_{\text{нр}}.$$

§ 40. Электрон в поле плоской электромагнитной волны

Уравнение Дирака может быть решено точно для электрона, движущегося в поле плоской электромагнитной волны (*Д. М. Волков*, 1937).

Поле плоской волны с волновым 4-вектором k ($k^2 = 0$) зависит от 4-координат лишь в комбинации $\varphi = kx$, так что 4-потенциал

$$A^\mu = A^\mu(\varphi), \tag{40.1}$$

причем он удовлетворяет условию калибровки Лоренца

$$\partial_\mu A^\mu = k_\mu A^{\mu\prime} = 0$$

(штрих означает дифференцирование по φ). Поскольку постоянный член в A несуществен, в этом условии можно опустить штрих и записать его в виде

$$kA = 0. \tag{40.2}$$

Исходим из уравнения второго порядка (32.6), в котором тензор поля

$$F_{\mu\nu} = k_\mu A'_\nu - k_\nu A'_\mu. \tag{40.3}$$

При раскрытии же квадрата $(i\partial - eA)^2$ надо учесть, что в силу (40.2) $\partial_\mu(A^\mu\psi) = A^\mu\partial_\mu\psi$. В результате получим уравнение

$$[-\partial^2 - 2ie(A\partial) + e^2A^2 - m^2 - ie(\gamma k)(\gamma A')]\psi = 0 \tag{40.4}$$

($\partial^2 = \partial_\mu\partial^\mu$).

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\psi = e^{-ipx}F(\varphi), \tag{40.5}$$

где p — постоянный 4-вектор. Прибавление к p любого вектора вида $\text{const}\cdot k$ не меняет такого вида функции ψ (требуется лишь соответствующее переобозначение функции $F(\varphi)$). Поэтому можно без ограничения общности наложить на p одно дополнительное условие. Пусть

$$p^2 = m^2 \tag{40.6}$$

Тогда при выключении поля квантовые числа p^μ переходят в компоненты 4-импульса свободной частицы. Смысл компонент 4-вектора p при наличии поля более нагляден в специальной системе отсчета, выбранной так, чтобы было $A_0 = 0$. Пусть в этой системе вектор $\mathbf{A}$ направлен по оси x^1, а $\mathbf{k}$ — по оси x^3 (т. е. электрическое поле волны направлено по x^1, магнитное — по x^2, а сама волна распространяется вдоль оси x^3). Тогда (40.5) будет собственной функцией операторов

$$\widehat{p}_1 = i\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \widehat{p}_2 = i\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \widehat{p}_0 - \widehat{p}_3 = i\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

с собственными значениями $p_1, p_2, p_0 - p_3$ (сами же эти операторы, как легко видеть, коммутативны с гамильтонианом уравнения Дирака). Таким образом, в данной системе отсчета p^1, p^2 — компоненты обобщенного импульса вдоль осей x^1, x^2, а $p^0 - p^3$ — разность между полной энергией и компонентой обобщенного импульса вдоль оси x^3.

При подстановке (40.5) в (40.4) замечаем, что

$$\partial^\mu F = k^\mu F', \qquad \partial_\mu \partial^\mu F = k^2 F'' = 0,$$

и находим для $F(\varphi)$ уравнение

$$2i(kp)F' + [-2e(pA) + e^2A^2 - ie(\gamma k)(\gamma A')]F = 0.$$

Формальное решение этого уравнения

$$F = \exp\left\{-i\int\limits_0^{kx}\left[\frac{e}{(kp)}(pA) - \frac{e^2}{2(kp)}A^2\right]d\varphi + \frac{e(\gamma k)(\gamma A)}{2(kp)}\right\}\frac{u}{\sqrt{2p_0}},$$

где $u/\sqrt{2p_0}$ — произвольный постоянный биспинор (о форме его записи см. ниже).

Все степени $(\gamma k)(\gamma A)$ выше первой равны нулю, поскольку

$$(\gamma k)(\gamma A)(\gamma k)(\gamma A) = \\ = -(\gamma k)(\gamma k)(\gamma A)(\gamma A) + 2(kA)(\gamma k)(\gamma A) = -k^2A^2 = 0.$$

Поэтому можно заменить

$$\exp\frac{e(\gamma k)(\gamma A)}{2(kp)} = 1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A),$$

так что ψ принимает вид

$$\psi_p = \left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma k)(\gamma A)\right] \frac{u}{\sqrt{2p_0}} e^{iS}, \tag{40.7}$$

где [1])

$$S = -px - \int\limits_0^{kx} \frac{e}{(kp)} \left[(pA) - \frac{e}{2}A^2\right] d\varphi. \tag{40.8}$$

Для выяснения условий, налагаемых на постоянный биспинор u, следует считать, что волна бесконечно медленно «включается», начиная от $t = -\infty$. Тогда $A \to 0$ при $kx \to -\infty$ и ψ должно переходить в решение свободного уравнения Дирака. Для этого $u = u(p)$ должно удовлетворять уравнению

$$(\gamma p - m)u = 0. \tag{40.9}$$

Этим условием отбрасываются «лишние» решения уравнения второго порядка. Так как u не зависит от времени, это условие остается в силе и при конечных kx. Таким образом, $u(p)$ совпадает с биспинорной амплитудой свободной плоской волны; будем предполагать ее нормированной тем же условием (23.4): $\overline{u}u = 2m$.

Изложенные рассуждения позволяют также сразу выяснить нормировку волновых функций (40.7). Бесконечно медленное включение поля не меняет нормировочного интеграла. Отсюда следует, что функции (40.7) удовлетворяют тому же условию нормировки

$$\int \psi^*_{p'}\psi_p d^3x = \int \overline{\psi}_{p'}\gamma^0\psi_p d^3x = (2\pi)^3\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \tag{40.10}$$

что и свободные плоские волны.

Найдем плотность тока, отвечающую функциям (40.7). Заметив, что

$$\overline{\psi}_p = \frac{\overline{u}}{\sqrt{2p_0}} \left[1 + \frac{e}{2(kp)}(\gamma A)(\gamma k)\right] e^{-iS},$$

прямым перемножением получим

$$j^\mu = \overline{\psi}_p\gamma^\mu\psi_p = \frac{1}{p_0}\left\{p^\mu - eA^\mu + k^\mu\left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2A^2}{2(kp)}\right)\right\}. \tag{40.11}$$

Если $A^\mu(\varphi)$ периодические функции и их среднее (по времени) значение обращается в нуль, то среднее значение плотности тока

$$\overline{j^\mu} = \frac{1}{p_0}\left(p^\mu - \frac{e^2}{2(kp)}\overline{A^2}k^\mu\right). \tag{40.12}$$

---

[1]) Выражение для S совпадает с классическим действием для частицы движущейся в поле волны (ср. II, § 47, задача 2).

Найдем также плотность кинетического импульса в состоянии ψ_p. Оператор кинетического импульса есть разность $\widehat{p}-eA = i\partial - eA$. Прямым вычислением найдем

$$\psi_p^*(\widehat{p}^\mu - eA^\mu)\psi_p = \overline{\psi}_p\gamma^0(\widehat{p}^\mu - eA^\mu)\psi_p = \\ = p^\mu - eA^\mu + k^\mu\left(\frac{e(pA)}{(kp)} - \frac{e^2A^2}{2(kp)}\right) + k^\mu\frac{ie}{8(kp)p_0}F_{\lambda\nu}(u^*\sigma^{\lambda\nu}u). \tag{40.13}$$

Среднее по времени значение этого 4-вектора, которое обозначим через q^μ, есть

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2\overline{A^2}}{2(kp)}k^\mu. \tag{40.14}$$

Его квадрат:

$$q^2 = m_*^2, \qquad m_* = m\sqrt{1 - \frac{e^2}{m^2}\overline{A^2}}; \tag{40.15}$$

m_* играет роль «эффективной массы» электрона в поле. Сравнив (40.14) и (40.12), мы видим, что

$$\overline{j^\mu} = q^\mu/p_0. \tag{40.16}$$

Отметим также, что условие нормировки (40.10), выраженное с помощью вектора $\mathbf{q}$, имеет вид

$$\int \psi_{p'}^*\psi_p d^3x = (2\pi)^3\frac{q_0}{p_0}\delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \tag{40.17}$$

(переход от (40.10) к (40.17) проще всего произвести в указанной выше специальной системе отсчета).

§ 41. Движение спина во внешнем поле

Переход к квазиклассическому приближению в уравнении Дирака производится так же, как и в нерелятивистской теории. В уравнение второго порядка (32.7а) подставляем ψ в виде [1])

$$\psi = ue^{iS/\hbar},$$

где S — скаляр, u — медленно меняющийся биспинор. При этом предполагается выполненным обычное условие квазиклассичности: импульс частицы должен мало меняться на расстояниях порядка длины волны $\hbar/|\mathbf{p}|$.

В нулевом приближении по $\hbar$ получается обычное классическое релятивистское уравнение Гамильтона—Якоби для действия S. При этом все члены, содержащие спин (и пропорциональные $\hbar$), выпадают из уравнений движения. Спин появился бы лишь в следующем приближении по $\hbar$. Другими словами,

[1]) Пользуемся сначала обычными единицами.

влияние магнитного момента электрона на его движение — всегда того же порядка величины, что и квантовые поправки. Это вполне естественно ввиду чисто квантовой природы спинового момента, который пропорционален $\hbar$.

В связи с такой ситуацией приобретает смысл постановка задачи о поведении спина электрона, совершающего заданное квазиклассическое движение во внешнем поле. Решение этой задачи содержится в следующем приближении по $\hbar$ в уравнении Дирака. Мы применим, однако, другой способ, более наглядный и не связанный непосредственно с уравнением Дирака. Он обладает тем преимуществом, что позволяет рассматривать движение любой частицы, в том числе обладающей «аномальным» гиромагнитным отношением, не описываемым уравнением Дирака.

Наша цель состоит в установлении «уравнения движения» для спина при произвольном (заданном) движении частицы. Начнем с нерелятивистского случая.

Нерелятивистский гамильтониан частицы во внешнем поле

$$\widehat{H} = \widehat{H}' - \mu\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}, \tag{41.1}$$

где в $\widehat{H}'$ включены все члены, не содержащие спина (см. III, § 111); μ — магнитный момент частицы. Этот вид гамильтониана не связан с определенным сортом частиц. Для электронов $\mu = e\hbar/2mc$ (заряд электрона $e = -|e|!$), а у нуклонов μ содержит еще и «аномальную» часть [1])

$$\mu' = \mu - \frac{e\hbar}{2mc}. \tag{41.2}$$

Согласно общим правилам квантовой механики операторное уравнение движения спина получается из формулы

$$\widehat{\dot{\mathbf{s}}} = \frac{i}{\hbar}(\widehat{H}\widehat{\mathbf{s}} - \widehat{\mathbf{s}}\widehat{H}) = \frac{i}{2\hbar}(\widehat{H}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\widehat{H}). \tag{41.3}$$

Подставив сюда (41.1), найдем

$$\widehat{\dot{s}}_i = -\frac{i\mu}{2\hbar}H_k(\sigma_k\sigma_i - \sigma_i\sigma_k) = -\frac{\mu}{\hbar}e_{ikl}H_k\sigma_l,$$

или

$$\widehat{\dot{\mathbf{s}}} = \frac{2\mu}{\hbar}[\widehat{\mathbf{s}}\mathbf{H}]. \tag{41.4}$$

Усредним это операторное равенство по состоянию квазиклассического волнового пакета, движущегося вдоль заданной траектории. Эта операция сводится к замене оператора спина его

[1]) С учетом радиационных поправок очень малая «аномальная часть» содержится также и в магнитном моменте электрона.

средним значением $\overline{\mathbf{s}}$, а вектора $\mathbf{H}$ — функцией $\mathbf{H}(t)$, представляющей собой изменение магнитного поля в точке нахождения частицы (волнового пакета) при ее заданном движении вдоль траектории. В нерелятивистском приближении, т. е. в рамках уравнения Паули, $\widehat{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\sigma}/2$ есть оператор спина частицы в ее системе покоя, среднее значение которого мы обозначили в § 29 как $\boldsymbol{\zeta}/2$. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{2\mu}{\hbar}[\boldsymbol{\zeta}\mathbf{H}(t)]. \tag{41.5}$$

В таком виде это уравнение имеет, по существу, чисто классический характер. Оно означает, что вектор магнитного момента прецессирует вокруг направления поля с угловой скоростью $-2\mu\mathbf{H}/\hbar$, оставаясь неизменным по величине [1]).

В том же нерелятивистском случае скорость $\mathbf{v}$ частицы меняется согласно уравнению

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\mathbf{H}],$$

т. е. вектор $\mathbf{v}$ вращается вокруг направления $\mathbf{H}$ с угловой скоростью $-e\mathbf{H}/mc$. Если $\mu' = 0$, то $\mu = e\hbar/2mc$, и эта угловая скорость совпадает со скоростью $-2\mu\mathbf{H}/\hbar$ вращения вектора $\boldsymbol{\zeta}$; другими словами, вектор поляризации сохраняет постоянный угол с направлением движения (мы увидим ниже, что этот результат остается в силе и в релятивистском случае).

Произведем теперь релятивистское обобщение уравнения (41.5). Для ковариантного описания поляризации надо при этом пользоваться введенным в § 29 4-вектором a, а уравнение движения спина должно определять производную $da/d\tau$ по собственному времени τ [2]).

Возможный вид этого уравнения может быть установлен уже из соображений релятивистской инвариантности, если учесть, что его правая часть должна быть линейна и однородна по тензору электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ и по 4-вектору a^μ, а, помимо них, может содержать только 4-скорость $u^\mu = p^\mu/m$. Этим условиям удовлетворяет лишь уравнение вида

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = \alpha F^{\mu\nu}a_\nu + \beta u^\mu F^{\nu\lambda}u_\nu a_\lambda, \tag{41.6}$$

---

[1]) Классически уравнение (41.5) получается непосредственно из равенства

$$d\mathbf{M}/dt = [\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}],$$

где $\mathbf{M}$ — момент импульса системы. $\boldsymbol{\mu}$ — ее магнитный момент, $[\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}]$ — действующий на систему момент сил. Положив $\mathbf{M} = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\mu} = \frac{\mu}{2s}\boldsymbol{\zeta} = \mu\boldsymbol{\zeta}$, получим (41.5).

[2]) Ниже снова полагаем $c = 1$, $\hbar = 1$.

где α, β — постоянные коэффициенты. Легко видеть, что в силу условия $a_\mu u^\mu = 0$ и антисимметричности тензора $F^{\mu\nu}$ (так что $F^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = 0$) никаких других выражений требуемого вида составить нельзя.

При $v \to 0$ это уравнение должно совпадать с (41.5). Положив $a^\mu = (0, \boldsymbol{\zeta})$, $u^\mu = (1, 0)$, $\tau = t$, получим

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \alpha[\boldsymbol{\zeta}\mathbf{H}].$$

Сравнив с (41.5), найдем: $\alpha = 2\mu$.

Для определения β учтем, что $a^\mu u_\mu = 0$. Продифференцировав это равенство по τ и воспользовавшись классическим уравнением движения заряда в поле

$$m\frac{u^\mu}{d\tau} = eF^{\mu\nu}u_\nu$$

(см. II, § 23), получим

$$u_\mu \frac{da^\mu}{d\tau} = -a_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = -a_\mu \frac{e}{m}F^{\mu\nu}u_\nu = \frac{e}{m}F^{\mu\nu}u_\mu a_\nu.$$

Поэтому, умножив уравнение (41.6) с обеих сторон на u_μ, учтя равенство $u_\mu u^\mu = 1$ и сократив общий множитель $F^{\mu\nu}u_\mu a_\mu$, получим

$$\beta = -2\left(\mu - \frac{e}{2m}\right) = -2\mu'.$$

Таким образом, находим окончательно релятивистское уравнение движения спина

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = 2\mu F^{\mu\nu}a_\nu - 2\mu' u^\mu F^{\nu\lambda}u_\nu a_\lambda \tag{41.7}$$

(*V. Bargmann*, *L. Michel*, *V. Telegdi*, 1959) [1]).

Перейдем от 4-вектора a к величине $\boldsymbol{\zeta}$, непосредственно характеризующей поляризацию частицы в ее «мгновенной» системе покоя; связь между a и $\boldsymbol{\zeta}$ дается формулами (29.7)–(29.9). Сразу же отметим, что из (41.7) автоматически следует, что $a_\mu da^\mu/d\tau = 0$, т. е. $a_\mu a^\mu = \text{const}$. Поскольку $a_\mu a^\mu = -\boldsymbol{\zeta}^2$, это означает естественный результат: при движении частицы ее поляризация $\boldsymbol{\zeta}$ остается неизменной по величине.

Уравнение, определяющее изменение направления поляризации, получим, перейдя в (41.7) к трехмерным обозначениям. Рас-

---

[1]) В другом виде подобное уравнение было впервые найдено *Я. И. Френкелем* (1926).

крыв пространственные компоненты этого уравнения, найдем

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{2\mu m}{\varepsilon}[\mathbf{aH}] + \frac{2\mu m}{\varepsilon}(\mathbf{av})\mathbf{E} - \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\mathbf{v}(\mathbf{aE}) + \\ + \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\mathbf{v}(\mathbf{v}[\mathbf{aH}]) + \frac{2\mu'\varepsilon}{m}\mathbf{v}(\mathbf{av})(\mathbf{vE}).$$

Сюда надо подставить (29.9), учитывая при дифференцировании равенства $\mathbf{p} = \varepsilon\mathbf{v}$, $\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ и уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{vH}], \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = e(\mathbf{vE}). \tag{41.8}$$

Элементарное, хотя и довольно длинное вычисление приводит к следующему уравнению [1]:

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{2\mu m + 2\mu'(\varepsilon - m)}{\varepsilon}[\boldsymbol{\zeta}\mathbf{H}] + \frac{2\mu'\varepsilon}{\varepsilon + m}(\mathbf{vH})[\mathbf{v}\boldsymbol{\zeta}] + \frac{2\mu m + 2\mu'\varepsilon}{\varepsilon + m}[\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{Ev}]]. \tag{41.9}$$

Особый интерес представляет не столько изменение абсолютного направления поляризации в пространстве, сколько его изменение по отношению к направлению движения. Представим $\boldsymbol{\zeta}$ в виде

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{n}\zeta_{||} + \boldsymbol{\zeta}_{\perp} \tag{41.10}$$

(где $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$) и выпишем уравнение для проекции $\zeta_{||}$ поляризации на направление движения. Вычисление с помощью (41.8), (41.9) приводит к следующему результату [2]:

$$\frac{\zeta_{||}}{dt} = 2\mu'(\boldsymbol{\zeta}_{\perp}[\mathbf{Hn}]) + \frac{2}{v}\left(\frac{\mu m^2}{\varepsilon^2} - \mu'\right)(\boldsymbol{\zeta}_{\perp}\mathbf{E}). \tag{41.11}$$

Ряд примеров применения полученных уравнений рассмотрен в задачах к этому параграфу. Здесь же отметим лишь, что при движении в чисто магнитном поле поляризация частицы без аномального магнитного момента сохраняет постоянный угол со скоростью ($\zeta_{||} = \text{const}$). Таким образом, этот результат, указанный

[1]) Если ввести, как это часто делается, для заряженных частиц гиромагнитный коэффициент (множитель Ланде) g согласно $\mu = g\frac{e}{2m}\cdot\frac{1}{2}\left(= g\frac{e}{2mc}\frac{\hbar}{2}\right)$, то уравнение запишется в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{e}{2m}\left(g - 2 + 2\frac{m}{\varepsilon}\right)[\boldsymbol{\zeta}\mathbf{H}] + \frac{e}{2m}(g-2)\frac{\varepsilon}{\varepsilon + m}(\mathbf{vH})[\mathbf{v}\boldsymbol{\zeta}] + \\ + \frac{e}{2m}\left(g - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + m}\right)[\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{Ev}]]. \tag{41.9a}$$

[2]) Несколько короче это уравнение можно получить, раскрывая временную компоненту уравнения (41.7).

уже выше для нерелятивистского случая, действительно, имеет общий характер.

Уточним условия применимости полученных уравнений. Упомянутое вначале требование достаточно медленного изменения импульса частицы сводится к определенному условию малости полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$; в частности, ларморов радиус в магнитном поле ($\sim p/eH$) должен быть велик по сравнению с длиной волны частицы. Помимо этого, однако, должно выполняться, строго говоря, еще и условие не слишком быстрого изменения полей в пространстве: поле должно мало меняться на размерах квазиклассического волнового пакета. Тем самым, поле должно мало меняться на расстояниях порядка длины волны частицы ($1/p$), а также на комптоновской длине волны, $1/m$ [1]).

Впрочем, в практических задачах о движении в макроскопических полях условие медленности их изменения заведомо выполняется, так что фактически требуется лишь достаточная их малость.

В § 33 были найдены первые релятивистские поправки для гамильтониана электрона, движущегося во внешнем поле. Для электрона в электрическом поле приближенный гамильтониан имеет вид (см. (33.12))

$$\widehat{H} = \widehat{H}' - \frac{e}{4m}\left(\boldsymbol{\sigma}\left[\mathbf{E}\frac{\widehat{\mathbf{p}}}{m}\right]\right), \quad \widehat{\mathbf{p}} = -i\nabla, \tag{41.12}$$

где в $\widehat{H}'$ включены члены, не содержащие спина. В нашем случае в силу медленного изменения поля в $\widehat{H}'$ следует пренебречь членом с производными от $\mathbf{E}$ (т. е. с $\operatorname{div}\mathbf{E}$); можно опустить также малый член с $\widehat{\mathbf{p}}^4$, не имеющий отношения к интересующим нас здесь эффектам поля, так что $\widehat{H}'$ (в отсутствие магнитного поля) сводится к нерелятивистскому гамильтониану $\widehat{H}' = \widehat{\mathbf{p}}^2/(2m) + e\Phi$.

Формулу (41.12) можно получить также исходя из уравнения (41.9), не прибегая непосредственно к уравнению Дирака. Тем самым будет достигнуто ее обобщение (в квазиклассическом случае) для частиц с аномальным магнитным моментом.

С точностью до членов первого порядка по скорости v уравнение движения спина в электрическом поле получается из

[1]) Последнее требование возникает из условия, чтобы разброс скоростей в волновом пакете в его системе покоя был мал по сравнению с c; в противном случае в этой системе нельзя было бы пользоваться нерелятивистскими формулами.

Если поле меняется слишком быстро, в уравнениях могут оказаться существенными дополнительные члены, содержащие производные поля по координатам.

(41.9) в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = (\mu + \mu')[\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{E}\mathbf{v}]] = \left(\frac{e}{2m} + 2\mu'\right)[\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{E}\mathbf{v}]].$$

Если потребовать, чтобы это уравнение получалось квантовомеханически путем коммутирования оператора спина с гамильтонианом (согласно (41.3)), то, как легко проверить, надо положить

$$\widehat{H} = \widehat{H}' = \left(\mu' + \frac{e}{4m}\right)\left(\boldsymbol{\sigma}\left[\mathbf{E}\frac{\widehat{\mathbf{p}}}{m}\right]\right). \qquad (41.13)$$

Это и есть искомое выражение. При $\mu' = 0$ мы возвращаемся к (41.12). Обратим внимание на то, что «нормальный» магнитный момент $e/2m$ входит с лишним множителем $1/2$ по сравнению с аномальным моментом μ' [1]).

Задачи

1. Определить изменение направления поляризации частицы при ее движении в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю ($\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$).

Решение. В правой стороне уравнения (41.9) остается лишь первый член, т. е. вектор $\boldsymbol{\zeta}$ прецессирует вокруг направления $\mathbf{H}$ (ось z) с угловой скоростью

$$-\frac{2\mu m + 2\mu'(\varepsilon - m)}{\varepsilon}\mathbf{H} = -\left(\frac{e}{\varepsilon} + 2\mu'\right)\mathbf{H}.$$

С этой же угловой скоростью вращается в плоскости xy проекция $\boldsymbol{\zeta}$ на эту плоскость (обозначим ее ζ_1). Вектор же $\mathbf{v}$ вращается в той же плоскости с угловой скоростью $-e\mathbf{H}/\varepsilon$ (как это видно из уравнения движения $\dot{\mathbf{p}} = \varepsilon\dot{\mathbf{v}} = e[\mathbf{v}\mathbf{H}]$). Отсюда видно, что ζ_1 поворачивается относительно направления $\mathbf{v}$ с угловой скоростью $-2\mu'\mathbf{H}$.

2. То же при движении вдоль направления магнитного поля.

Решение. При совпадающих направлениях $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ уравнение (41.9) приводится к виду

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{2\mu m}{\varepsilon}[\boldsymbol{\zeta}\mathbf{H}],$$

т. е. $\boldsymbol{\zeta}$ прецессирует вокруг общего направления $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ с угловой скоростью $-2\mu m\mathbf{H}/\varepsilon$.

3. То же при движении в однородном электрическом поле.

Решение. Пусть поле $\mathbf{E}$ направлено вдоль оси x, а движение происходит в плоскости xy (при этом $p_y = \text{const}$). Из (41.9) видно, что вектор $\boldsymbol{\zeta}$ прецессирует вокруг оси z с мгновенной угловой скоростью

$$-\left(\frac{e}{\varepsilon + m} + 2\mu'\right)E\frac{p_y}{\varepsilon}.$$

Снова разложим $\boldsymbol{\zeta}$ на составляющие ζ_z и ζ_1 (в плоскости xy). Тогда

$$\zeta_{\|} = \zeta_1\cos\varphi, \quad \boldsymbol{\zeta}_{\perp}\mathbf{E} = -\zeta_1\sin\varphi\cdot\frac{v_y}{v}.$$

[1]) Это и есть та «томасовская половинка», которая упоминалась в примечании на с. 151. Изложенный здесь вывод ясно демонстрирует ее происхождение.

Из (41.11) находим, что ζ_1 вращается относительно направления $\mathbf{v}$ с мгновенной угловой скоростью

$$\dot{\varphi} = \frac{2v_y}{v^2}\left(\frac{\mu m^2}{\varepsilon^2} - \mu'\right) = \frac{p_y}{\varepsilon}\left(\frac{em}{p^2} - 2\mu'\right).$$

§ 42. Рассеяние нейтронов в электрическом поле

При столкновениях нейтронов с ядрами рассеяние на большие углы определяется основным взаимодействием — ядерными силами. При рассеянии же на малые углы становится существенным, как мы увидим, взаимодействие магнитного момента нейтрона с электрическим полем ядра (*J. Schwinger*, 1948).

Будем предполагать нейтрон нерелятивистским, так что рассматриваемое взаимодействие описывается приближенным гамильтонианом (41.13). Весь магнитный момент электрически нейтральной частицы является «аномальным», а оператор $\widehat{H}'$ сводится в этом случае к оператору кинетической энергии [1]:

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + i\frac{\mu\hbar}{mc}\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{E}\nabla]. \tag{42.1}$$

Ввиду малости электромагнитного взаимодействия нейтрона амплитуда f_{em} обусловленного им рассеяния может вычисляться в борновском приближении:

$$f_{em} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}/\hbar}\left(i\frac{\mu\hbar}{mc}\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{E}\nabla]\right)e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}d^3x$$

(см. III, § 126), или

$$f_{em} = \frac{\mu}{2\pi c\hbar^2}\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{E}_\mathbf{q}\mathbf{p}], \quad \mathbf{E}_\mathbf{q} = \int \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}d^3x \tag{42.2}$$

($\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ — импульсы нейтрона до и после рассеяния, $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$). В написанном виде амплитуда f_{em} является оператором по отношению к спиновой переменной.

Прежде чем заняться дальнейшим вычислением, сделаем следующее замечание. Формула (42.1) была выведена в предыдущем параграфе для медленно меняющихся полей (что фактически означало пренебрежение в гамильтониане членами, содержащими производные от поля по координатам). В применении к кулонову полю ядра это значит, что длина волны $\hbar/p$ должна быть мала по сравнению с существенными в интеграле $\mathbf{E}_\mathbf{q}$,

[1]) В этом параграфе пользуемся обычными единицами, а буква m обозначает массу нейтрона.

расстояниями $r \sim 1/q$. Отсюда $\hbar q \ll p$, так что угол рассеяния $\theta \sim \hbar q/p \ll 1$. Таким образом, требуемое условие выполняется как раз для рассеяния на малые углы.

Для кулонова поля с потенциалом $\Phi = Ze/r$ компонента Фурье напряженности

$$\mathbf{E_q} = -i\mathbf{q}\Phi_q = -i\mathbf{q}\cdot 4\pi Ze/q^2$$

(см. II, (51.5)). Подстановка в (42.2) дает

$$f_{em} = i\frac{2Ze\mu}{q^2 c\hbar^3}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{pp}']).$$

При малых углах рассеяния $\hbar q \approx p\theta$, $[\mathbf{pp}'] \approx p^2\theta\boldsymbol{\nu}$, где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении $[\mathbf{pp}']$. Таким образом,

$$f_{em} = i\frac{2Ze\mu}{\theta\hbar c}\boldsymbol{\sigma\nu}.$$

К этому выражению надо прибавить амплитуду ядерного рассеяния. Ввиду быстрого убывания ядерных сил с расстоянием эта амплитуда стремится при малых углах к конечному (зависящему от энергии) комплексному значению, которое обозначим через a. Поэтому полная амплитуда рассеяния

$$f = a + i\frac{b}{\theta}\boldsymbol{\sigma\nu}, \quad b = \frac{2Ze\mu}{c\hbar} = 2Z\alpha\frac{\mu}{e}. \tag{42.3}$$

Мы видим, что электромагнитное рассеяние действительно становится преобладающим при достаточно малых углах.

Форма выражения (42.3) совпадает с рассматривавшейся в т. III, § 140. Поэтому мы можем прямо воспользоваться выведенными там формулами. Сечение рассеяния, просуммированное по всем возможным конечным поляризационным состояниям:

$$\frac{d\sigma}{do} = |a|^2 + \frac{b^2}{\theta^2} + 2b\,\mathrm{Im}\,a\cdot\boldsymbol{\nu\zeta}, \tag{42.4}$$

где $\boldsymbol{\zeta}$ — начальная поляризация пучка нейтронов ($\mathbf{P}$ см. в III, § 140). Если начальное состояние не поляризовано ($\boldsymbol{\zeta} = 0$), то поляризация после рассеяния

$$\boldsymbol{\zeta}' = \frac{2b\,\mathrm{Im}\,a\cdot\theta}{|a|^2\theta^2 + b^2}\boldsymbol{\nu}. \tag{42.5}$$

Эта поляризация максимальна при $\theta = b/|a|$, причем $\zeta'_{\max} = \mathrm{Im}\,a/|a|$.

ГЛАВА V

ИЗЛУЧЕНИЕ

§ 43. Оператор электромагнитного взаимодействия

Взаимодействие электронов с электромагнитным полем, как правило, может рассматриваться с помощью теории возмущений. Это обстоятельство связано со сравнительной слабостью электромагнитного взаимодействия, выражающейся в малости соответствующей безразмерной «константы связи» — постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$. Эта малость играет фундаментальную роль в квантовой электродинамике.

В классической электродинамике (см. II, § 16, 28) электромагнитное взаимодействие описывается членом

$$-ej^{\mu}A_{\mu} \tag{43.1}$$

в плотности лагранжиана системы «поле+заряды» (A — 4-потенциал поля, j — 4-вектор плотности тока частиц). При этом плотность тока удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0, \tag{43.2}$$

выражающему закон сохранения заряда. Напомним (см. II, § 29), что калибровочная инвариантность теории тесно связана именно с этим законом. Действительно, при замене $A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\chi$ (4.1) к плотности лагранжиана (43.1) добавляется величина $-ej^{\mu}\partial_{\mu}\chi$, которая в силу (43.2) может быть записана в виде 4-дивергенции

$$-e\partial_{\mu}(\chi j^{\mu})$$

и поэтому выпадает при интегрировании по d^4x в действии $S = \int L d^4x$.

В квантовой электродинамике 4-векторы j и A заменяются соответствующими вторично квантованными операторами. При этом оператор тока выражается через ψ-операторы согласно $\widehat{j} = \widehat{\overline{\psi}}\gamma\widehat{\psi}$. Роль обобщенных «координат» q в лагранжиане

$$\int \widehat{L}_{\text{взаим}} d^3x = -e\int (\widehat{j}\widehat{A}) d^3x$$

играют значения $\widehat{\overline{\psi}}$, $\widehat{\psi}$, $\widehat{A}$ в каждой точке пространства. Поскольку плотность лагранжиана оказывается зависящей только от самих «координат» q (но не от их производных по x), переход

к плотности гамильтониана по формуле (10.11) сводится лишь к изменению знака плотности лагранжиана [1]. Таким образом, оператор электромагнитного взаимодействия (интеграл по пространству от плотности гамильтониана взаимодействия) имеет вид

$$\widehat{V} = e\int(\widehat{j}\widehat{A})d^3x. \tag{43.3}$$

Оператор свободного электромагнитного поля представляет собой сумму

$$\widehat{A} = \sum_n[\widehat{c}_n A_n(x) + \widehat{c}_n^+ A_n^*(x)], \tag{43.4}$$

содержащую операторы рождения и уничтожения фотонов в различных состояниях (нумеруемых индексом n). Каждый из них имеет матричные элементы лишь для увеличения или уменьшения соответствующего числа заполнения N_n на 1 (при неизменных остальных числах заполнения). Поэтому и оператор $\widehat{A}$ имеет матричные элементы лишь для переходов с изменением числа фотонов на 1. Другими словами, в первом приближении теории возмущений возникают только процессы однократного излучения или поглощения фотона.

Согласно (2.15) матричные элементы

$$\langle N_n - 1|c_n|N_n\rangle = \langle N_n|c_n^+|N_n - 1\rangle = \sqrt{N_n}. \tag{43.5}$$

Если в начальном состоянии поля фотоны (сорта n) отсутствуют, то $\langle 1|c_n^+|0\rangle = 1$. Матричный элемент оператора (43.3) для испускания фотона

$$V_{fi}(t) = e\int(j_{fi}A_n^*)d^3x, \tag{43.6}$$

где $A_n(x)$ — волновая функция излучаемого фотона, а j_{fi} — матричный элемент оператора $\widehat{j}$ для перехода излучателя из начального состояния i в конечное f [2]. 4-вектор $j^\mu_{fi} = (\rho_{fi}, \mathbf{j}_{fi})$ называют *током перехода.*

Аналогичным образом получается матричный элемент для поглощения фотона:

$$V_{fi}(t) = e\int(j_{fi}A_n)d^3x. \tag{43.7}$$

Он отличается от (43.6) лишь тем, что вместо $A_n^*(x)$ стоит $A_n(x)$.

---

[1] Независимо от этих рассуждений укажем, что если речь идет лишь о поправке первого порядка малости, то всякая малая поправка к лагранжиану переходит в гамильтониан лишь с изменением своего знака (см. I, § 40).

[2] Обозначения в (43.6) содержат некоторую непоследовательность: индексы у V_{fi} относятся к состояниям всей системы «излучатель+поле», а у j_{fi} — к состояниям одного излучателя.

Указанием аргумента t у V_{fi} мы подчеркиваем, что речь идет о зависящем от времени матричном элементе. Выделив в волновых функциях временные множители, можно обычным образом перейти к независящим от времени матричным элементам:

$$V_{fi}(t) = V_{fi} e^{-i(E_i - E_f \mp \omega)t} \tag{43.8}$$

(E_i, E_f — начальная и конечная энергии излучающей системы; знаки $\mp$ соответствуют испусканию и поглощению фотона ω).

Волновая функция фотона с определенным импульсом $\mathbf{k}$ и определенной поляризацией

$$A^\mu = \sqrt{4\pi} \frac{e^\mu}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{kr}} \tag{43.9}$$

(см. (4.3); временной множитель опущен). Подставив в (43.6), найдем матричный элемент для испускания такого фотона в виде

$$V_{fi} = e\sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^*_\mu j^\mu_{fi}(\mathbf{k}), \tag{43.10}$$

где $j_{fi}(\mathbf{k})$ — ток перехода в импульсном представлении, т. е. компоненты Фурье

$$j_{fi}(\mathbf{k}) = \int j_{fi}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}} d^3x. \tag{43.11}$$

Аналогичная формула для поглощения фотона:

$$V_{fi} = e\sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e_\mu j^\mu_{fi}(-\mathbf{k}). \tag{43.12}$$

Уравнение сохранения тока в импульсном представлении записывается в виде условия 4-поперечности токов перехода:

$$k_\mu j^\mu_{fi} = \omega \rho_{fi}(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k}) = 0. \tag{43.13}$$

Написанные в этом параграфе формулы, в которых не предопределен вид оператора тока, имеют общий характер и справедливы для электромагнитных процессов с участием любых заряженных частиц. Существующая теория дает возможность установить вид оператора тока (и тем самым в принципе вычислить его матричные элементы) лишь для электронов. При применении же к системам сильновзаимодействующих частиц (в том числе к ядрам) мы ограничимся изложением полуфеноменологической теории, в которой токи перехода выступают как заимствуемые из опыта величины, удовлетворяющие лишь общим требованиям пространственно-временной симметрии и уравнению непрерывности.

§ 44. Испускание и поглощение

Вероятность перехода под влиянием возмущения $\widehat{V}$ в первом приближении дается известными формулами теории возмущений (III, § 42). Пусть начальное и конечное состояния излучающей системы относятся к дискретному спектру [1]. Тогда вероятность (в единицу времени) перехода $i \to f$ с испусканием фотона есть

$$dw = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f - \omega) d\nu, \tag{44.1}$$

где ν условно обозначает совокупность величин, характеризующих состояние фотона и пробегающих непрерывный ряд значений (при этом волновая функция фотона предполагается нормированной на δ-функцию «по шкале ν»).

Если испускается фотон с определенным значением момента, то единственной непрерывной величиной является частота ω. Интегрирование формулы (44.1) по $d\nu \equiv d\omega$ устраняет δ-функцию (заменяя ω определенным значением $\omega = E_i - E_f$), и тогда вероятность перехода

$$w = 2\pi |V_{fi}|^2. \tag{44.2}$$

Если же рассматривается испускание фотона с заданным импульсом $\mathbf{k}$, то $d\nu = d^3k/(2\pi)^3 = \omega^2 d\omega do/(2\pi)^3$. При этом предполагается, что волновая функция фотона (плоская волна) нормирована на один фотон в объеме $V = 1$, как это принято везде в этой книге; $d\nu$ есть число состояний, приходящихся на фазовый объем $V d^3k$. Таким образом, вероятность испускания фотона с заданным импульсом запишется в виде

$$dw = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f - \omega) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{44.3}$$

или после интегрирования по $d\omega$:

$$dw = \frac{1}{4\pi^2} |V_{fi}|^2 \omega^2 do. \tag{44.4}$$

Сюда должен быть подставлен матричный элемент V_{fi} из (43.10).

В следующих параграфах мы воспользуемся этими формулами для вычисления вероятности излучения в различных конкретных случаях. Здесь мы рассмотрим некоторые общие соотношения между различными видами радиационных процессов.

---

[1]) Тем самым, во всяком случае, подразумевается пренебрежение отдачей: излучатель как целое остается неподвижным.

Если в начальном состоянии поля уже имелось отличное от нуля число N_n данных фотонов, то матричный элемент перехода умножается еще на

$$\langle N_n+1|c_n^+|N_n\rangle = \sqrt{N_n+1}, \tag{44.5}$$

т. е. вероятность перехода умножается на N_n+1. Единица в этом множителе отвечает спонтанному испусканию, происходящему и при $N_n=0$. Член же N_n обусловливает *вынужденное* (или *индуцированное*) испускание: мы видим, что наличие фотонов в начальном состоянии поля стимулирует дополнительное испускание таких же фотонов.

Матричный элемент V_{if} перехода с обратным изменением состояния системы ($f\to i$) отличается от элемента V_{fi} заменой (44.5) на

$$\langle N_n-1|c_n|N_n\rangle = \sqrt{N_n}$$

(и заменой остальных величин их комплексно-сопряженными). Этот обратный переход представляет собой поглощение фотона системой, переходящей с уровня E_f на уровень E_i. Поэтому между вероятностями испускания и поглощения фотона (для заданной пары состояний i, f) имеет место важное соотношение [1])

$$\frac{w^{(\text{изл})}}{w^{(\text{погл})}} = \frac{N_n+1}{N_n} \tag{44.6}$$

(оно было впервые указано *А. Эйнштейном* в 1916 г.).

Свяжем число фотонов с интенсивностью падающего извне на систему излучения. Пусть

$$I_{\mathbf{k}e}\,d\omega\,do \tag{44.7}$$

есть энергия излучения, падающего в единицу времени на единицу площади и имеющего поляризацию $\mathbf{e}$, частоту — в интервале $d\omega$ и направление волнового вектора — в элементе телесного угла do. Указанным интервалам отвечают $k^2dk\,do/(2\pi)^3$ осцилляторов поля, на каждый из которых приходится по $N_{\mathbf{k}e}$ фотонов заданной поляризации. Поэтому ту же энергию (44.7) мы получим, составив произведение

$$c\frac{k^2dk\,do}{(2\pi)^3}N_{\mathbf{k}e}\hbar\omega = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3c^2}N_{\mathbf{k}e}\,d\omega\,do.$$

Отсюда находим искомое соотношение:

$$N_{\mathbf{k}e} = \frac{8\pi^3c^2}{\hbar\omega^3}I_{\mathbf{k}e}. \tag{44.8}$$

Пусть $dw_{\mathbf{k}e}^{(\text{сп})}$ есть вероятность спонтанного излучения фотона с поляризацией $\mathbf{e}$ в телесный угол do; индексами (инд) и (погл)

[1]) Ниже в этом параграфе пользуемся обычными единицами.

отметим аналогичные вероятности для индуцированного испускания и поглощения. Согласно (44.6) и (44.8) эти вероятности связаны между собой следующими соотношениями:

$$dw_{\mathbf{ke}}^{(\text{погл})} = dw_{\mathbf{ke}}^{(\text{инд})} = dw_{\mathbf{ke}}^{(\text{сп})} \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} I_{\mathbf{ke}}. \tag{44.9}$$

Если падающее излучение изотропно и не поляризовано ($I_{\mathbf{ke}}$ не зависит от направлений $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}$), то интегрирование (44.9) по do и суммирование по $\mathbf{e}$ дают аналогичные соотношения между полными вероятностями радиационных переходов (между заданными состояниями i и f системы)

$$w^{(\text{погл})} = w^{(\text{инд})} = w^{(\text{сп})} \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} I, \tag{44.10}$$

где $I = 2 \cdot 4\pi I_{\mathbf{ke}}$ — полная спектральная интенсивность падающего излучения.

Если состояния i и f излучающей (или поглощающей) системы вырождены, то полная вероятность излучения (или поглощения) данных фотонов получается суммированием по всем взаимно вырожденным конечным состояниям и усреднением по всем возможным начальным состояниям. Обозначим кратности вырождения (статистические веса) состояний i и f посредством g_i и g_f. Для процессов спонтанного и индуцированного испускания начальными являются состояния i, а для поглощения — состояния f. Предположив в каждом случае все g_i или g_f начальных состояний равновероятными, получим, очевидно, вместо (44.10), следующие соотношения:

$$g_f w^{(\text{погл})} = g_i w^{(\text{инд})} = g_i w^{(\text{сп})} \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} I. \tag{44.11}$$

В литературе часто используются так называемые *коэффициенты Эйнштейна*, определяемые как

$$A_{if} = w^{(\text{сп})}, \quad B_{if} = w^{(\text{инд})} \frac{c}{I}, \quad B_{fi} = w^{(\text{погл})} \frac{c}{I} \tag{44.12}$$

(величина I/c есть пространственная спектральная плотность энергии излучения). Они связаны друг с другом соотношениями

$$g_f B_{fi} = g_i B_{if} = g_i A_{if} \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3}. \tag{44.13}$$

§ 45. Дипольное излучение

Применим полученные формулы к испусканию фотона релятивистским электроном в заданном внешнем поле. Ток перехода в этом случае есть матричный элемент оператора

$$\hat{j} = \hat{\bar{\psi}} \gamma \hat{\psi},$$

в котором ψ-операторы предполагаются разложенными по системе волновых функций стационарных состояний электрона в данном поле (см. § 32). Переходу электрона из состояния i в состояние f отвечает матричный элемент $\langle 0_i 1_f | j | 1_i 0_f \rangle$. Такое изменение чисел заполнения осуществляется оператором $\widehat{a}_f^+ \widehat{a}_i$, и для тока перехода получаем

$$j_{fi}^{\mu} = \overline{\psi}_f \gamma^{\mu} \psi = (\psi_f^* \psi_i, \psi_f^* \boldsymbol{\alpha} \psi_i), \tag{45.1}$$

где ψ_i и ψ_f — волновые функции начального и конечного состояний электрона.

Выберем волновую функцию фотона в трехмерно поперечной калибровке (4-вектор поляризации $e = (0, \mathbf{e})$). Тогда в (43.10) произведение $j_{fi} e^* = -\mathbf{j}_{fi} \mathbf{e}^*$. Подставив V_{fi} в (44.4), получим следующую формулу для вероятности излучения (в 1 с) в элемент телесного угла do фотона с поляризацией $\mathbf{e}$:

$$dw_{\mathbf{en}} = e^2 \frac{\omega}{2\pi} |\mathbf{e}^* \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k})|^2 do, \tag{45.2}$$

где

$$\mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k}) = \int \psi_f^* \boldsymbol{\alpha} \psi_i e^{-i\mathbf{kr}} d^3x. \tag{45.3}$$

Суммирование по поляризациям фотона осуществляется путем усреднения по направлениям $\mathbf{e}$ (в плоскости, перпендикулярной заданному направлению $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$), после чего результат умножается на 2 соответственно двум независимым возможностям поперечной поляризации фотона [1]. Таким образом, получается формула

$$dw_{\mathbf{n}} = e^2 \frac{\omega}{2\pi} |[\mathbf{n} \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{k})]|^2 do. \tag{45.4}$$

Очень важен случай, когда длина волны фотона λ велика по сравнению с размерами излучающей системы a. Такая ситуация связана обычно с малостью скоростей частиц по сравнению со скоростью света. В первом приближении по a/λ (соответствующем дипольному излучению — ср. II, § 67) в токе перехода (45.3) можно заменить единицей множитель $e^{-i\mathbf{kr}}$, мало меняющийся в

---

[1]) Для усреднения используется формула

$$\overline{e_i e_k^*} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k) \tag{45.4а}$$

или

$$\overline{(\mathbf{ae})(\mathbf{be}^*)} = \frac{1}{2}\{\mathbf{ab} - (\mathbf{an})(\mathbf{bn})\} = \frac{1}{2}[\mathbf{an}][\mathbf{bn}], \tag{45.4б}$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — постоянные векторы.

области, где ψ_i или ψ_f заметно отличны от нуля. Такая замена означает, другими словами, пренебрежение импульсом фотона по сравнению с импульсами частиц в системе.

В том же приближении интеграл $\mathbf{j}_{fi}(0)$ может быть заменен его нерелятивистским выражением, т. е. просто матричным элементом $\mathbf{v}_{fi}$ скорости электрона по отношению к шредингеровским волновым функциям. В свою очередь этот элемент $\mathbf{v}_{fi} = -i\omega\mathbf{r}_{fi}$, а $e\mathbf{r}_{fi} = \mathbf{d}_{fi}$ где $\mathbf{d}$ — дипольный момент электрона (в его орбитальном движении). Таким образом, находим следующую формулу для вероятности дипольного излучения:

$$dw_{\mathbf{en}} = \frac{\omega^3}{2\pi}|\mathbf{e}^*\mathbf{d}_{fi}|^2 do \tag{45.5}$$

(направление $\mathbf{n}$ фигурирует здесь в неявном виде: вектор $\mathbf{e}$ должен быть перпендикулярен $\mathbf{n}$). Просуммировав по поляризациям, получим

$$dw_{\mathbf{n}} = \frac{\omega^3}{2\pi}|[\mathbf{n}\mathbf{d}_{fi}]|^2 do. \tag{45.6}$$

Ввиду нерелятивистского (по отношению к электрону) характера этих формул их обобщение на любые электронные системы очевидно: под $\mathbf{d}_{fi}$ надо понимать матричный элемент полного дипольного момента системы.

Проинтегрировав формулу (45.6) по всем направлениям, найдем полную вероятность излучения:

$$w = \frac{4\omega^3}{3}|\mathbf{d}_{fi}|^2, \tag{45.7}$$

или в обычных единицах:

$$w = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}|\mathbf{d}_{fi}|^2. \tag{45.7a}$$

Интенсивность I излучения получается умножением вероятности на $\hbar\omega$:

$$I = \frac{4\omega^4}{3c^3}|\mathbf{d}_{fi}|^2. \tag{45.8}$$

Эта формула обнаруживает непосредственную аналогию с классической формулой (см. II, (67.11)) для интенсивности дипольного излучения системой периодически движущихся частиц: интенсивность излучения частоты $\omega_s = s\omega$ (где ω — частота движения частиц, s — целое число) равна

$$I_s = \frac{4\omega_s^4}{3c^3}|\mathbf{d}_s|^2, \tag{45.9}$$

где $\mathbf{d}_s$ — компоненты Фурье дипольного момента, т. е. коэффициенты разложения

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}_s e^{-is\omega t}. \tag{45.10}$$

Квантовая формула (45.8) получается из (45.9) заменой этих компонент Фурье матричными элементами соответствующих переходов. Это правило (выражающее собой *принцип соответствия* Бора) является частным случаем общего соответствия между компонентами Фурье классических величин и квантовыми матричными элементами в квазиклассическом случае (см. III, § 48). Излучение квазиклассично для переходов между состояниями с большими квантовыми числами; при этом частота перехода $\hbar\omega = E_i - E_f$ мала по сравнению с энергиями излучателя E_i и E_f. Это обстоятельство, однако, не привело бы к каким-либо изменениям в виде формулы (45.8), справедливой для любых переходов. Этим объясняется тот (в известном смысле случайный) факт, что принцип соответствия для интенсивности излучения оказывается справедливым не только в квазиклассическом, но и в общем квантовом случае.

§ 46. Электрическое мультипольное излучение

Вместо того чтобы рассматривать излучение фотона в заданном направлении (т. е. с заданным импульсом), рассмотрим теперь излучение фотона с определенными значениями момента j его проекции m на некоторое избранное направление z. Мы видели в § 6, что такие фотоны могут быть двух типов — электрического и магнитного; начнем с излучения фотонов электрического типа. При этом снова будем считать размеры излучающей системы малыми по сравнению с длиной волны.

Вычисления удобно производить с помощью волновых функций фотона в импульсном представлении, т. е. представив 4-вектор $A^\mu(\mathbf{r})$ в виде интеграла Фурье. Тогда матричный элемент

$$V_{fi} = e\int j^\mu_{fi}(\mathbf{r})A^*_\mu(\mathbf{r})d^3x = e\int d^3x \cdot j^\mu_{fi}(\mathbf{r})\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}A^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{kr}} \tag{46.1}$$

(для упрощения записи формул опускаем индексы ωjm у волновых функций фотона).

Для Ej-фотона берем волновую функцию из (7.10), выбрав произвольную постоянную C равной

$$C = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}.$$

Цель такого выбора состоит в том, чтобы в пространственных компонентах волновой функции ($\mathbf{A}$) сократились члены, содержащие шаровые функции порядка $j-1$ (как это видно из формул (7.16)). Тогда $\mathbf{A}$ будет содержать только шаровые функции порядка $j+1$, в результате чего соответствующий вклад в V_{fi} окажется (как это будет очевидно из дальнейшего вычисления) более высокого порядка малости (по a/λ), чем вклад от компоненты $A^0 \equiv \Phi$, содержащей шаровые функции более низкого порядка j.

Таким образом, полагаем

$$A^\mu = (\Phi, 0), \quad \Phi = -\sqrt{\frac{j+1}{j}}\frac{4\pi^2}{\omega^{3/2}}\delta(|\mathbf{k}|-\omega)Y_{jm}(\mathbf{n})$$

($\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$). Подставив это выражение в (46.1) и проинтегрировав по $|\mathbf{k}|$, получим

$$V_{fi} = -e\sqrt{\frac{j+1}{j}}\frac{\sqrt{\omega}}{2\pi}\int d^3x \cdot \rho_{fi}(\mathbf{r})\int do_{\mathbf{n}} e^{-i\mathbf{kr}}Y^*_{jm}(\mathbf{n}). \tag{46.2}$$

Для вычисления внутреннего интеграла воспользуемся разложением (24.12), записав его в виде

$$e^{i\mathbf{pr}} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{-l}^{l} i^l g_l(kr)Y^*_{lm}\left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right)Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right), \tag{46.3}$$

где

$$g_l(kr) = \sqrt{\pi/(2kr)}J_{l+1/2}(kr) \tag{46.4}$$

(см. III, (34.3)) [1]. Подставив это разложение в (46.2), получим

$$\int e^{-i\mathbf{kr}}Y^*_{jm}(\mathbf{n})do_{\mathbf{n}} = 4\pi i^{-j}g_j(kr)Y^*_{jm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

(остальные члены обращаются в нуль ввиду ортогональности шаровых функций). В силу условия $a/\lambda \ll 1$ в интеграле по d^3x будут играть роль лишь расстояния, для которых $kr \ll 1$. Поэтому можно заменить функции $g_j(kr)$ первыми членами их разложений по kr [2]:

$$g_j(kr) \approx \frac{(kr)^j}{(2j+1)!!}. \tag{46.5}$$

---

[1]) Нормировка функций g_l такова, что их асимптотический вид при $kr \to \infty$:

$$g_l(kr) \approx \frac{\sin(kr - \pi l/2)}{kr}. \tag{46.4a}$$

[2]) Степень kr совпадает с порядком функции Y_{jm}, в произведении с которой выступает g_j. Тем самым оправдывается пренебрежение членами в $\mathbf{A}$, содержащими шаровые функции более высокого порядка.

В результате получим

$$V_{fi} = (-1)^{m+1} i^j \sqrt{\frac{(2j+1)(j+1)}{\pi j}} \frac{\omega^{j+1/2}}{(2j+1)!!} e(Q^{(э)}_{j,-m})_{fi}, \tag{46.6}$$

где введены величины

$$(Q^{(э)}_{jm})_{fi} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} \int \rho_{fi}(\mathbf{r}) r^j Y_{jm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) d^3x \tag{46.7}$$

(напомним, что $Y_{j,-m} = (-1)^{j-m} Y^*_{jm}$). Величины (46.7) называют 2^j*-польными электрическими моментами перехода* системы по аналогии с соответствующими классическими величинами (II, § 41) [1].

Для электрона во внешнем поле $\rho_{fi} = \psi^*_f \psi_i$, и тогда величины (46.7) вычисляются как матричные элементы от классической величины

$$Q^{(э)}_{jm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}} r^j Y_{jm}.$$

В нерелятивистском (по скоростям частиц) случае момент перехода может быть в принципе вычислен аналогичным образом для любой системы N взаимодействующих частиц. При этом плотность перехода выражается через волновые функции системы в виде

$$\rho_{fi}(\mathbf{r}) = \int \psi^*_f(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) \psi_i(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) \sum_{n=1}^{N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \cdot d^3x_1 \ldots d^3x_N, \tag{46.8}$$

где интеграл берется по всему конфигурационному пространству [2].

Использованная нами волновая функция фотона соответствует (в координатном представлении) нормировке на δ-функцию по шкале ω, как и предполагается в формуле (44.2). Подставив в нее (46.6), получим вероятность Ej-излучения [3]

$$w^{(э)}_{jm} = \frac{2(2j+1)(j+1)}{j[(2j+1)!!]^2} \omega^{2j+1} e^2 |(Q^{(э)}_{j,-m})_{fi}|^2. \tag{46.9}$$

---

[1]) Мы определяем мультипольные моменты без множителя e в соответствии с тем, что и токи определены в этой книге без зарядового множителя.

[2]) Возможна ситуация, когда вероятность перехода обращается в нуль в силу приближенных правил отбора, справедливых лишь в пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием электронов. В таком случае для получения отличного от нуля результата надо пользоваться волновыми функциями с релятивистской поправкой, учитывающей это взаимодействие.

[3]) На первый взгляд могло бы показаться, что в силу изотропии пространства полная вероятность испускания фотона не должна зависеть от значения m. Что это не так, легко понять, если заметить, что для испускания фотонов с различными значениями m должны быть различны конечные состояния системы (при заданном ее начальном состоянии); ср. ниже правило (46.16).

В частности, при $j = 1$ имеем

$$w_{1m}^{(э)} = \frac{4\omega^3}{3} e^2 |(Q_{1,-m}^{(э)})_{fi}|^2. \tag{46.10}$$

Величины $Q_{1m}^{(э)}$ связаны с компонентами вектора электрического дипольного момента формулами

$$eQ_{10}^{(э)} = id_z, \quad eQ_{1\pm1}^{(э)} = \mp \frac{i}{\sqrt{2}}(d_x \pm id_y). \tag{46.11}$$

Просуммировав (46.10) по значениям m, мы вернемся, как и следовало, к уже известной нам формуле (45.7) для полной вероятности дипольного излучения.

Угловое распределение мультипольного излучения определяется формулой (7.11). Нормируя ее на полную вероятность испускания w_{jm}, имеем

$$dw_{jm} = |\mathbf{Y}_{jm}^{(э)}(\mathbf{n})|^2 w_{jm} do = \frac{w_{jm}}{j(j+1)} |\nabla_{\mathbf{n}} Y_{jm}|^2 do. \tag{46.12}$$

В частности, для $j = 1$

$$Y_{10} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \cdot e^{\pm i\varphi},$$

где θ, φ — полярный угол и азимут направления $\mathbf{n}$ относительно оси z. Вычисляя градиент, найдем, что угловое распределение дипольного излучения с определенными значениями m дается выражениями

$$dw_{10} = w_{10} \frac{3}{8\pi} \sin^2\theta do, \quad dw_{1,\pm1} = w_{1,\pm1} \frac{3}{8\pi} \frac{1+\cos^2\theta}{2} do. \tag{46.13}$$

Их можно было бы, разумеется, получить и из формулы (45.6), положив в ней один раз (для $m = 0$): $d_x = d_y = 0$, $d_z = d$, а другой раз ($m = \pm 1$): $d_y = \mp i d_x = d/\sqrt{2}$, $d_z = 0$.

Если порядок величины размеров системы (атома или ядра) есть a, то порядок величины электрических мультипольных моментов есть, вообще говоря, $Q_{jm}^{э} \sim a^j$. Вероятность же мультипольного излучения

$$w_{jm}^{э} \sim \alpha k (ka)^{2j}. \tag{46.14}$$

Увеличение степени мультипольности на 1 уменьшает вероятность излучения в отношении $\sim (ka)^2$.

Законы сохранения момента в четности приводят к определенным правилам отбора, ограничивающим возможные изменения состояния излучающей системы. Если начальный момент системы равен J_i, то после излучения фотона с моментом j момент

системы может принимать лишь значения J_f, определяющиеся правилом сложения моментов ($\mathbf{J}_i - \mathbf{J}_f = \mathbf{j}$):

$$|J_i - J_f| \leqslant j \leqslant J_i + J_f. \tag{46.15}$$

При заданных значениях J_i и J_f тем же правилом (46.15) определяются возможные значения момента фотона j. Но поскольку вероятность излучения быстро убывает с увеличением j, то излучение происходит в основном с наименьшей возможной мультипольностью.

Проекции M_i, и M_f моментов $\mathbf{J}_i$ и $\mathbf{J}_f$ вместе с проекцией m момента фотона удовлетворяют очевидному (из того же закона сложения моментов) правилу

$$M_i - M_f = m. \tag{46.16}$$

Четности P_i и P_f начального и конечного состояний излучающей системы должны удовлетворять условию $P_f P_\text{ф} = P_i$, где $P_\text{ф}$ — четность излученного фотона; поскольку четности могут иметь лишь значения ± 1, это условие можно записать также в виде

$$P_i P_f = P_\text{ф}. \tag{46.17}$$

Для фотона электрического типа $P_\text{ф} = (-1)^j$, так что правило отбора по четности для электрического мультипольного излучения:

$$P_i P_f = (-1)^j. \tag{46.18}$$

Правила отбора по полному моменту и по четности являются вполне строгими и должны соблюдаться при излучении любыми системами. Наряду с этими правилами могут существовать и другие, более жесткие, связанные с теми или иными особенностями структуры конкретных излучающих систем. Такие правила неизбежно имеют лишь более или менее приближенный характер; мы рассмотрим их в дальнейших параграфах этой главы.

Зависимость вероятности испускания от квантовых чисел m, M_i, M_f всецело определяется тензорным характером мультипольных моментов. Величины Q_{jm} с заданным j составляют сферический тензор ранга j. Зависимость его матричных элементов от указанных квантовых чисел дается формулой

$$|\langle n_f J_f M_f | Q_{j,-m} | n_i J_i M_i \rangle|^2 = \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ M_f & m & -M_i \end{pmatrix} |\langle n_f J_f \| Q_j \| n_i J_i \rangle|^2 \tag{46.19}$$

(см. III, (107.6)), где буква n условно обозначает совокупность остальных, помимо J и M, квантовых чисел состояния системы. Стоящие в правой стороне равенства (46.19) приведенные

матричные элементы от чисел m, M_i, M_f не зависят. Подставленная в (46.9) эта формула и определит искомую зависимость, которая оказывается пропорциональной

$$\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ M_f & m & -M_i \end{pmatrix}^2$$

(при этом предполагается, конечно, что излучатель не находится во внешнем поле; тогда частота перехода ω не зависит от чисел M_i и M_f).

Просуммировав вероятность по всем значениям M_f (при заданном M_i), мы получим полную вероятность испускания фотона данной частоты с начального уровня системы n_iJ_i. В силу изотропии пространства очевидно, что эта величина не будет зависеть также и от начального значения M_i. Суммирование осуществляется с помощью формулы

$$\sum_{M_f} |\langle n_fJ_fM_f|Q_{j,-m}|n_iJ_iM_i\rangle|^2 = \frac{1}{2J_i+1}|\langle n_fJ_f\|Q_j\|n_iJ_i\rangle|^2 \quad (46.20)$$

(см. III, (107.11)).

§ 47. Магнитное мультипольное излучение

Волновая функция фотона магнитного типа $A^\mu = (0, \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ дается формулой (7.6). Подставив ее в (46.1), получим для матричного элемента перехода

$$V_{fi} = -e\frac{\sqrt{\omega}}{2\pi}\int d^3x \cdot \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r})\int do_{\mathbf{n}} \cdot e^{-i\mathbf{kr}}\mathbf{Y}^{(\text{м})*}_{jm}(\mathbf{n}). \quad (47.1)$$

Компоненты вектора $\mathbf{Y}^{(\text{м})}_{jm}$ выражаются согласно (7.16) через шаровые функции порядка j. Воспользовавшись снова разложением (46.3), получим для внутреннего интеграла

$$\int e^{-i\mathbf{kr}}\mathbf{Y}^{(\text{м})*}_{jm}(\mathbf{n})do_{\mathbf{n}} = 4\pi i^{-j}g_j(kr)\mathbf{Y}^{(\text{м})*}_{jm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right),$$

и после подстановки g_j из (46.5) [1])

$$V_{fi} = -ei^{-j}\frac{2\omega^{j+1/2}}{(2j+1)!!}\int \mathbf{j}_{fi}(\mathbf{r})r^j\mathbf{Y}^{(\text{м})*}_{jm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)d^3x.$$

Сюда надо подставить согласно определению (7.4):

$$\mathbf{Y}^{(\text{м})}_{jm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}[\mathbf{r}\nabla Y_{jm}].$$

[1]) Не смешивать ток $\mathbf{j}$ с моментом j!

После этого преобразуем под интегралом

$$r^j\mathbf{j}_{fi}[\mathbf{r}\nabla Y^*_{jm}] = -[\mathbf{r}\mathbf{j}_{fi}]\nabla(r^jY^*_{jm})$$

и получим

$$V_{fi} = (-1)^m i^j\sqrt{\frac{(2j+1)(j+1)}{\pi j}}\,\frac{\omega^{j+1/2}}{(2j+1)!!}e(Q^{(\text{м})}_{j,-m})_{fi}, \tag{47.2}$$

где введены величины

$$(Q^{(\text{м})}_{jm})_{fi} = \frac{1}{j+1}\sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\int[\mathbf{r}\mathbf{j}_{fi}]\nabla(r^jY_{jm})d^3x. \tag{47.3}$$

Их называют 2^j*-польными магнитными моментами перехода.*

Ввиду аналогии между выражениями (47.2) и (46.6) для вероятности испускания получается формула, отличающаяся от (46.9) лишь заменой электрических моментов магнитными. Остается в силе также и формула (46.12) для углового распределения (как уже было отмечено в связи с (7.11)).

Рассмотрим структуру выражения (47.3) при $j=1$. В этом случае функции

$$\sqrt{\frac{4\pi}{3}}rY_{10} = iz, \quad \sqrt{\frac{4\pi}{3}}rY_{1,\pm1} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}(x\pm iy),$$

а их градиенты равны просто циркулярным ортам $\mathbf{e}^{(0)}$, $\mathbf{e}^{(\pm1)}$ (7.14). Поэтому величины $e(Q^{(\text{м})}_{1m})_{fi}$ представляют собой сферические компоненты вектора

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = \frac{e}{2}\int[\mathbf{r}\mathbf{j}_{fi}]d^3x, \tag{47.4}$$

который по своей структуре аналогичен классическому магнитному моменту (см. II, § 44). Полная вероятность $M1$-излучения выражается через эту величину формулой (обычные единицы)

$$w = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}|\boldsymbol{\mu}_{fi}|^2. \tag{47.5}$$

Покажем, каким образом формула (47.4) связана с обычным квантовым нерелятивистским выражением оператора магнитного момента.

Выражение тока перехода (см. III, § 115):

$$\mathbf{j}_{fi} = -\frac{i}{2m}(\psi^*_f\nabla\psi_i - \psi_i\nabla\psi^*_f) + \frac{\mu}{es}\operatorname{rot}(\psi^*_f\hat{\mathbf{s}}\psi_i), \tag{47.6}$$

где μ — магнитный момент частицы, s — ее спин. Поэтому

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = -\frac{ie}{4m}\int\psi^*_f[\mathbf{r}\nabla]\psi_i d^3x + \frac{ie}{4m}\int\psi_i[\mathbf{r}\nabla]\psi^*_f d^3x + \frac{\mu}{2s}\int[\mathbf{r}\operatorname{rot}(\psi^*_f\mathbf{s}\psi_i)]d^3x. \tag{47.7}$$

Во втором члене пишем

$$\int \psi_i[\mathbf{r}\nabla]\psi_f^* d^3x = -\int \psi_f^*[\mathbf{r}\nabla]\psi_i d^3x + \int \operatorname{rot}(\mathbf{r}\psi_f^*\psi_i)d^3x.$$

Последний интеграл преобразуется в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и обращается в нуль. Таким образом, два первых члена в (47.7) одинаковы. В третьем члене преобразуем интеграл следующим образом (временно обозначаем $\mathbf{F} = \psi_f^*\widehat{\mathbf{s}}\psi_i$):

$$\int [\mathbf{r}[\nabla\mathbf{F}]]d^3x = \oint [\mathbf{r}[d\mathbf{f}\cdot\mathbf{F}]] - \int [[\mathbf{F}\nabla]\mathbf{r}]d^3x.$$

Интеграл по поверхности обращается в нуль, а в последнем интеграле имеем: $[[\mathbf{F}\nabla]\mathbf{r}] = -\mathbf{F}\operatorname{div}\mathbf{r} + \mathbf{F} = -2\mathbf{F}$. Таким образом,

$$\int [\mathbf{r}\operatorname{rot}\mathbf{F}]d^3x = 2\int \mathbf{F}d^3x.$$

В результате выражение для $\boldsymbol{\mu}_{fi}$ принимает вид

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = \int \psi_f^*\left(\frac{e}{2m}\widehat{\mathbf{L}} + \frac{\mu}{s}\widehat{\mathbf{s}}\right)\psi_i d^3x, \tag{47.8}$$

где $\widehat{\mathbf{L}} = -i[\mathbf{r}\nabla]$ — оператор орбитального момента частицы. Как и должно быть, $\boldsymbol{\mu}_{fi}$ оказывается матричным элементом оператора

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{e}{2m}\widehat{\mathbf{L}} + \frac{\mu}{s}\widehat{\mathbf{s}}, \tag{47.9}$$

складывающегося из операторов орбитального и собственного магнитных моментов частицы.

Правила отбора для магнитного мультипольного излучения аналогичны правилам для электрического случая: для полного момента справедливы те же правила (46.15),(46.16), а для четности — правило

$$P_iP_f = (-1)^{j+1}, \tag{47.10}$$

получающееся подстановкой в (46.17) четности Mj-фотона: $P_ф = (-1)^{j+1}$.

§ 48. Угловое распределение и поляризация излучения

Выведенные в § 46 и 47 формулы относились к испусканию фотона с определенными значениями момента j и его проекции m. Соответственно предполагалось, что и излучающая система (скажем, ядро) до и после испускания обладает не только определенными значениями момента J, но и определенными поляризациями, т. е. значениями M.

Рассмотрим теперь более общий случай излучения частично поляризованным ядром (размеры которого по-прежнему предполагаются малыми по сравнению с длиной волны). Испускаемый фотон по-прежнему обладает определенным моментом j, но может быть частично поляризован. Найдем вероятность испускания как функцию направления $\mathbf{n}$ фотона. Она должна быть выражена через матрицы плотности, описывающие поляризационные состояния ядра и фотона.

Для этого предварительно напишем вероятность испускания как функцию направления $\mathbf{n}$ и спиральности λ фотона ($\lambda = \pm 1$) для случая, когда начальное и конечное ядра обладают определенными значениями: $J_i M_i$ и $J_f M_f$.

Матричный элемент испускания фотона с определенными jm пропорционален матричному элементу 2^j-польного (электрического или магнитного) момента ядра:

$$\langle J_f M_f; jm|V|J_i M_i\rangle \propto (-1)^m \langle J_f M_f|Q_{j,-m}|J_i M_i\rangle. \tag{48.1}$$

Волновая функция испущенного фотона (в импульсном представлении) пропорциональна $\mathbf{Y}^{(\text{э})}_{jm}(\mathbf{n})$ или $\mathbf{Y}^{(\text{м})}_{jm}(\mathbf{n})$. Волновая же функция фотона с импульсом в направлении $\mathbf{n}$ и спиральностью λ пропорциональна вектору поляризации $\mathbf{e}^{(\lambda)}$. Матричный элемент испускания фотона $\mathbf{n}\lambda$ получится перемножением (48.1) с проекцией волновой функции состояния $|jm\rangle$ на волновую функцию состояния $|\mathbf{n}\lambda\rangle$:

$$\langle J_f M_f; \mathbf{n}\lambda|V|J_i M_i\rangle \propto (-1)^m \langle J_f M_f|Q_{j,-m}|J_i M_i\rangle (\mathbf{e}^{(\lambda)*}\mathbf{Y}_{jm}).$$

Согласно (16.23) для фотонов обоих типов

$$\mathbf{e}^{(\lambda)*}\mathbf{Y}_{jm}(\mathbf{n}) \propto D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{n}). \tag{48.2}$$

Матричный же элемент мультипольного момента выражаем обычным образом через приведенный элемент. В результате получаем амплитуду вероятности перехода в виде

$$\langle J_f M_f; \mathbf{n}\lambda|V|J_i M_i\rangle \propto (-1)^{J_f - M_f + m} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} Q D^{(j)}_{\lambda m}(\mathbf{n}), \tag{48.3}$$

где Q обозначает $\langle J_f \| Q \| J_i\rangle$.

Теперь мы можем перейти к общему случаю смешанных поляризационных состояний. Согласно общим правилам квантовой механики вероятность перехода будет пропорциональна

выражению [1])

$$\sum_{(m)} \langle J_f M_f; \mathbf{n}\lambda | V | J_i M_i \rangle \langle J_f M_f'; \mathbf{n}\lambda' | V | J_i M_i' \rangle^* \times$$
$$\times \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle \langle M_f' | \rho^{(f)} | M_f \rangle \langle \lambda' | \rho^{(\gamma)} | \lambda \rangle, \quad (48.4)$$

где $\rho^{(i)}$, $\rho^{(f)}$, $\rho^{(\gamma)}$ — матрицы плотности начального ядра, конечного ядра и испущенного фотона; символ (m) под знаком суммы означает, что суммирование производится по всем дважды повторяющимся m-индексам $(M_i M_i' M_f M_f' \lambda\lambda')$. В (48.4) надо подставить (48.3).

Обозначим вероятность испускания фотона в телесный угол do через $w(\mathbf{n})do$. Полная вероятность испускания по всем направлениям и со всеми поляризациями фотона и вторичного ядра не зависит, очевидно, от начального поляризационного состояния ядра. Она дается уже известными нам формулами и нас здесь не интересует. Поэтому условимся нормировать вероятность $w(\mathbf{n})$ на 1. Для нее получается [2])

$$w(\mathbf{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_{(m)} (-1)^{2J_i - M_i - M_i'} D^{(j)}_{\lambda m} D^{(j)*}_{\lambda' m'} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f' & -m' & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i | \rho^{(i)} | M_i' \rangle \times$$
$$\times \langle M_i' | \rho^{(f)} | M_f \rangle \langle \lambda' | \rho^{(\gamma)} | \lambda \rangle$$

[1]) Если начальное и конечное состояния системы описываются суперпозициями

$$\psi^{(i)} = \sum_n a_n \psi_n^{(i)}, \qquad \psi^{(f)} = \sum_m b_m \psi_m^{(f)},$$

то матричный элемент

$$\langle f | V | i \rangle = \sum_{mn} b_m^* a_n V_{mn},$$

а его квадрат

$$|\langle f | V | i \rangle|^2 = \sum_{nn'mm'} V_{mn} V^*_{m'n'} a_n a^*_{n'} b_{m'} b^*_m.$$

Переход к случаю смешанных состояний осуществляется заменой

$$a_n a^*_{n'} \to \rho^{(i)}_{nn'}, \qquad b_{m'} b^*_m \to \rho^{(f)}_{m'm},$$

так что

$$|\langle f | V | i \rangle|^2 \to \sum_{nn'mm'} V_{mn} V^*_{m'n'} \rho^{(i)}_{nn'} \rho^{(f)}_{m'm}.$$

[2]) При преобразованиях знакового множителя можно пользоваться тем, что числа $2J_i$, $2J_f$, $2M_i$, $2M_f$ одинаковой четности. Напомним также, что числа j, m целые, а $\lambda = \pm 1$.

(в правильности нормировки мы убедимся ниже). Преобразуем эту формулу, разложив произведение двух D-функций в ряд (110.2) (см. III)

$$D^{(j)}_{\lambda m}D^{(j)*}_{\lambda' m'} = (-1)^{\lambda'+m'}D^{(j)}_{\lambda m}D^{(j)}_{-\lambda' -m'} =$$
$$= (-1)^{\lambda+m}\sum_L (2L+1)\begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu\end{pmatrix} D^{(L)}_{\Lambda\mu}$$

(индексы $\Lambda = \lambda - \lambda'$, $\mu = m - m'$; L — целые числа, $L \geqslant 2j$). Таким образом, получаем окончательно

$$w(\mathbf{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi}\sum_L\sum_{(m)}(-1)^{2J_i-M_i-M_i'+m+1}(2L+1)\times$$
$$\times\begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f' & -m' & M_i'\end{pmatrix} D^{(L)}_{\Lambda\mu}(\mathbf{n})\langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle\times$$
$$\times\langle M_i'|\rho^{(f)}|M_f\rangle\langle\lambda'|\rho^{(\gamma)}|\lambda\rangle. \quad (48.5)$$

Как и выше, $\sum_{(m)}$ означает суммирование по всем (дважды повторяющимся) m-индексам. При этом надо помнить об отличии индексов λ, λ' от остальных m-индексов: суммирование по ним производится не по всем $2j+1$ возможным (при данном j-индексе) значениям, а лишь по двум значениям: λ, $\lambda' = \pm 1$, отвечающим двум поляризациям фотона.

Формула (48.5) содержит в себе всю необходимую информацию об угловом распределении испускаемых фотонов и их поляризации, а также о поляризации вторичных (т. е. испустивших фотон) ядер. При этом подразумевается, что начальная матрица плотности задана.

Угловое распределение. Угловое распределение фотонов получится суммированием по всем поляризациям фотона и вторичного ядра. Усреднение по поляризациям осуществляется подстановкой матриц плотности неполяризованных состояний:

$$\langle\lambda|\rho^{(\gamma)}|\lambda'\rangle = \frac{1}{2}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \langle M_f|\rho^{(f)}|M_f'\rangle = \frac{1}{2J_f+1}\delta_{M_f M_f'}, \quad (48.6)$$

после чего суммирование сводится к умножению на 2 (для фотона) или на $2J_f+1$ (для ядра). Другими словами, суммирование осуществляется просто заменой

$$\langle\lambda|\rho^{(\gamma)}|\lambda'\rangle \to \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \langle M_f|\rho^{(f)}|M_f'\rangle \to \delta_{M_f M_f'}. \quad (48.7)$$

Таким образом, угловое распределение

$$\overline{w}(\mathbf{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_L \sum_{(m)} (-1)^{m'+1}(2L+1) D^{(L)}_{0\mu}(\mathbf{n}) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m' & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle.$$

Эту формулу можно существенно упростить, произведя суммирования по m-индексам.

Прежде всего замечаем, что

$$\begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = (-1)^L \begin{pmatrix} j & j & L \\ -\lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{48.8}$$

и потому сумма

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2\begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{при четных } L, \\ 0 & \text{при нечетных } L. \end{cases}$$

Таким образом, в сумме по L остаются лишь члены с четными L, т. е. в нее входят шаровые функции $(D^{(L)}_{0\mu})$ лишь четных порядков. Этот результат можно было предвидеть: в силу сохранения четности вероятность должна быть инвариантна по отношению к инверсии, т. е. к замене $\mathbf{n} \to -\mathbf{n}$.

Таким образом,

$$\overline{w}(\mathbf{n}) = \frac{(2j+1)(2J_i+1)}{8\pi} \sum_L (2L+1) \begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} D^{(L)}_{0\mu}(\mathbf{n}) \times$$
$$\times \sum_{(m)} (-1)^{m'+1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ m & -m' & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m' & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle.$$

Отметим, что здесь легко проверить нормировку: в силу формулы

$$\int D^{(L)}_{0\mu}(\mathbf{n}) \frac{do}{4\pi} = \delta_{L0}\delta_{\mu 0}$$

после интегрирования по направлениям остается лишь член с $L = \mu = 0$; с помощью формул

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{1}{\sqrt{2j+1}},$$

$$\sum_{M_f m} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2J_i+1}, \quad \operatorname{Sp} \rho^{(i)} = 1$$

убедимся, что интеграл равен 1.

Дальнейшее суммирование по $mm'M_f$ во внутренней сумме в $\overline{w}(\mathbf{n})$ производится с помощью формулы (108.4) (см. III). В результате получим для углового распределения фотонов следующую окончательную формулу:

$$\overline{w}(\mathbf{n}) = (-1)^{1+J_i+J_f}\frac{(2j+1)\sqrt{2J_i+1}}{4\pi}\sum\nolimits_{\text{чет } L}(-i)^L\sqrt{2L+1}\,\times$$
$$\times\begin{pmatrix} j & j & L\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} J_i & J_i & L\\ j & j & J_f\end{Bmatrix}\sum\nolimits_{\mu}\mathcal{P}^{(i)*}_{L\mu}D^{(L)}_{0\mu}(\mathbf{n}), \quad (48.9)$$

где обозначено

$$\mathcal{P}^{(i)}_{L\mu} = i^L\sqrt{(2L+1)(2J_i+1)}\sum\nolimits_{M_iM_i'}(-1)^{J_i-M_i'}\begin{pmatrix} J_i & L & J_i\\ -M_i' & \mu & M_i\end{pmatrix}\times$$
$$\times\langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle,$$
$$\mathcal{P}^{(i)*}_{L\mu} = (-1)^{L-\mu}\mathcal{P}^{(i)}_{L,-\mu}. \quad (48.10)$$

Внутренняя сумма в (48.9) берется по всем $|\mu| \leqslant L$, а внешняя — по всем четным значениям L, удовлетворяющим условиям

$$L \leqslant 2j, \quad L \leqslant 2J_i \quad (48.11)$$

(эти условия — следствие правила треугольника, которому должны удовлетворять j-индексы в $3j$-символах, фигурирующих в (48.9), (48.10)). В силу этих условий число членов в сумме обычно невелико. Так, при $J_i = 0$ или $1/2$ остается лишь член с $L = 0$, т. е. излучение изотропно (легко убедиться в том, что член с $L = 0$ равен $1/4$, как и должно было быть по условию нормировки). При $J_i = 1$, $3/2$ или при $j = 1$ в сумме по L остается два члена: $L = 0$, 2. Отметим также, что если матрица плотности $\rho^{(i)}$ диагональна ($M_i = M_i'$), то $\mu = 0$, и функция распределения (48.9) принимает вид разложения по полиномам Лежандра (согласно (16.5) и (58.23) (см. III) функции $D^{(L)}_{00}$ сводятся к функциям $P_L(\cos\theta)$). Наконец, если

$$\langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle = 1/(2J_i+1)\delta_{M_iM_i'},$$

т. е. начальное ядро не поляризовано, то все $\mathcal{P}^{(i)}_{L\mu} = 0$, кроме $\mathcal{P}^{(i)}_{00} = 1$ [1]).

---

[1]) Действительно, заметив, что

$$\begin{pmatrix} J & 0 & J\\ -M' & 0 & M\end{pmatrix} = (-1)^{J-M}\frac{1}{\sqrt{2J+1}}\delta_{MM'},$$

имеем

$$\sum\nolimits_{MM'}(-1)^{J-M'}\begin{pmatrix} J & L & J\\ -M' & \mu & M\end{pmatrix}\delta_{MM'} =$$
$$= \sqrt{2J+1}\sum\nolimits_{MM'}\begin{pmatrix} J & L & L\\ -M' & \mu & M\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & 0 & J\\ -M' & 0 & M\end{pmatrix} = \sqrt{2J+1}\,\delta_{L0}\delta_{\mu 0},$$

после чего из определения (48.10) найдем указанный результат.

Величины $\mathcal{P}_{L\mu}$ — удобные характеристики поляризационного состояния ядра; назовем их *поляризационными моментами*. Формула (48.10) определяет эти величины через матрицу плотности $\rho_{MM'}$. Прямой проверкой легко убедиться в справедливости обратной формулы, выражающей эту матрицу через поляризационные моменты:

$$\rho_{MM'} = \sum_{L\mu} \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}} i^{-L} (-1)^{j-M'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \mathcal{P}_{L\mu}. \quad (48.12)$$

Пусть $f_{L\mu}$ — некоторый сферический тензор, зависящий от поляризационного состояния ядра. Согласно общим правилам (см. III, (14.8)) его среднее значение в состоянии с матрицей плотности $\rho_{MM'}$ равно

$$\overline{f}_{L\mu} = \sum_{MM'} \rho_{MM'} \langle JM'|f_{L\mu}|JM\rangle. \quad (48.13)$$

Выразив матричные элементы величин $f_{L\mu}$ через приведенный элемент $\langle J\|f_L\|J\rangle$ согласно

$$\langle JM'|f_{L\mu}|JM\rangle = i^L (-1)^{J-M'} \begin{pmatrix} J & L & J \\ -M' & \mu & M \end{pmatrix} \langle J\|f_L\|J\rangle$$

и введя поляризационные моменты согласно определению (48.10), получим

$$\overline{f}_{L\mu} = \frac{\langle J\|f_L\|J\rangle}{\sqrt{(2L+1)(2J+1)}} \mathcal{P}_{L\mu}. \quad (48.14)$$

Поляризация фотона. При заданных (наряду с $\rho^{(i)}$) матрицах $\rho^{(\gamma)}$ и $\rho^{(f)}$ формула (48.5) определяет вероятность перехода, при котором испускаемый фотон и ядро оказываются в определенных поляризационных состояниях. Эти состояния являются по существу характеристикой не процесса излучения как такового, а тех детекторов, которые регистрируют фотон и ядро отдачи, выделяя их определенные поляризации. Более естественна другая постановка вопроса, в которой конечное состояние системы «ядро+фотон» заранее не фиксируется, и требуется определить поляризационную матрицу плотности этого состояния при заданном лишь направлении испускания фотона.

Ответ на этот вопрос дается той же формулой (48.5). Если представить ее в виде

$$w = \overline{w}(\mathbf{n}) \sum_{(m)} \langle M_f; \mathbf{n}\lambda|\rho|M'_f; \mathbf{n}\lambda'\rangle \langle\lambda'|\rho^{(\gamma)}|\lambda\rangle \langle M'_f|\rho^{(f)}|M_f\rangle, \quad (48.15)$$

то выражение $\langle M_f; \mathbf{n}\lambda|\rho|M'_f; \mathbf{n}\lambda'\rangle$ и будет искомой матрицей плотности, так как согласно общим правилам квантовой механики вероятность w перехода в наперед заданное состояние дается

ее «проекцией» на данные $\rho^{(\gamma)}\rho^{(f)}$. Множитель $\overline{w}(\mathbf{n})$ выделен в (48.15) для того, чтобы эта матрица была нормирована обычным условием

$$\sum_{\lambda M_f} \langle M_f; \mathbf{n}\lambda|\rho|M_f; \mathbf{n}\lambda\rangle = 1.$$

Если мы интересуемся поляризацией только фотона, то надо просуммировать по $M_f = M_f'$:

$$\langle \mathbf{n}\lambda|\rho|\mathbf{n}\lambda'\rangle = \sum_{M_f} \langle M_f; \mathbf{n}\lambda|\rho|M_f; \mathbf{n}\lambda'\rangle.$$

Вполне аналогично выводу формулы (48.9) получим

$$\langle \mathbf{n}\lambda|\rho|\mathbf{n}\lambda'\rangle = (-1)^{1+J_i+J_f} \frac{(2j+1)\sqrt{2J_i+1}}{8\pi\overline{w}(\mathbf{n})} \times \\ \times \sum_L (-i)^L \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ \lambda & -\lambda' & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ j & j & J_f \end{Bmatrix} \sum_\mu \mathcal{P}^{(i)*}_{L\mu} D^{(L)}_{\Lambda\mu}(\mathbf{n}) \tag{48.16}$$

$(\Lambda = \lambda - \lambda')$, причем суммирование производится по всем целым значениям L, удовлетворяющим условиям (48.11).

В частности, круговая поляризация определяется параметром Стокса

$$\xi_2 = \langle \mathbf{n}1|\rho|\mathbf{n}1\rangle - \langle \mathbf{n}, -1|\rho|\mathbf{n}, -1\rangle$$

(см. задачу к § 8). В силу соотношения (48.8) в этой разности выпадают все члены с четными L, и для ξ_2 получается формула, отличающаяся от выражения (48.9) лишь тем, что суммирование производится по нечетным (вместо четных) значениям L.

Поляризация вторичных ядер. Наконец, если нас интересует только конечная поляризация ядер, надо положить $\rho^{(\gamma)} \to \delta$. Если при этом произвести также и интегрирование по направлениям фотона, то матрица плотности вторичного ядра будет

$$\langle M_f|\rho|M_f'\rangle = \int \overline{w}(\mathbf{n})\langle M_f\mathbf{n}|\rho|M_f'\mathbf{n}\rangle do = \\ = (2J_i+1) \sum_{mM_iM_i'} (-1)^{2J_i-M_i-M_i'} \begin{pmatrix} J_f & j & J_i \\ -M_f & -m & M_i \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} J_f & i & J_i \\ -M_f' & -m & M_i' \end{pmatrix} \langle M_i|\rho^{(i)}|M_i'\rangle.$$

Вычисленные по этой матрице поляризационные моменты равны

$$\mathcal{P}_{L\mu}^{(f)} = (-1)^{J_i+J_f+L+j}\sqrt{(2J_i+1)(2J_f+1)}\begin{Bmatrix} J_i & J_i & L \\ J_f & J_f & j \end{Bmatrix}\mathcal{P}_{L\mu}^{(i)}. \quad (48.17)$$

Если начальное ядро не поляризовано, то и конечное ядро не будет поляризовано. Однако при этом будет иметься корреляционная поляризация, т. е. поляризация ядра после излучения в заданном направлении. Положив $\rho^{(i)} \to \delta/(2J_i+1)$ (и соответственно $\overline{w}(\mathbf{n}) = 1/(4\pi)$) и произведя вычисление, аналогичное выводу (48.9), получим для описывающей эту поляризацию матрицы плотности

$$\langle M_f; \mathbf{n}|\rho|M_f'; \mathbf{n}\rangle = \\ = (2j+1)(-1)^{J_i+M_f'+1}\sum_{\text{чет } L}(2L+1)\begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_f & L & J_f \\ -M_f' & \mu & M_f \end{pmatrix}\times \\ \times\begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i \end{Bmatrix} D_{0\mu}^{(L)}(\mathbf{n}). \quad (48.18)$$

Соответствующие этой матрице поляризационные моменты

$$\mathcal{P}_{L\mu}^{(f)} = i^L(-1)^{1+J_i+J_f}(2j+1)\sqrt{(2L+1)(2J_f+1)}\times \\ \times\begin{pmatrix} j & j & L \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} J_f & J_f & L \\ j & j & J_i \end{Bmatrix} D_{0\mu}^{(L)}(\mathbf{n}). \quad (48.19)$$

Возникают моменты лишь четного порядка (это — тоже следствие упоминавшегося уже сохранения четности).

Если вторичное ядро в свою очередь излучает, то, будучи поляризованным, оно даст неизотропное распределение фотонов. Так как поляризационные моменты (48.19) зависят от направления $\mathbf{n}$ фотона, испущенного при первом распаде, возникает определенная корреляция между направлениями последовательно испущенных фотонов (при неполяризованном первичном ядре). Аналогичным образом могут быть рассмотрены и другие корреляционные явления при каскадных испусканиях (корреляция поляризаций и т. п.) [1])

З а д а ч а

Связать поляризационные моменты $\mathcal{P}_{1\mu}$ и $\mathcal{P}_{2\mu}$ со средними значениями вектора момента $\mathbf{J}$ и тензора квадрупольного момента Q_{ik}.

Р е ш е н и е. Приведенные элементы вектора $\mathbf{J}$ и тензора Q_{ik} определяются из равенств

$$\overline{\mathbf{J}^2} = \frac{\langle J\|J\|J\rangle^2}{2J+1}, \quad \overline{Q_{ik}^2} = \frac{\langle J\|Q\|J\rangle^2}{2J+1}$$

[1]) Подробное изложение этих вопросов можно найти в статье *А. З. Долгинова* в книге «Гамма-лучи» (изд-во АН СССР, 1961).

(ср. III, (107.10), (107.11)). Оператор $\widehat{Q}_{ik}$ выражается через операторы момента формулой (75.2) (см. III):

$$\widehat{Q}_{ik} = \frac{3Q}{2J(2J-1)}\left(\widehat{J}_i\widehat{J}_k + \widehat{J}_k\widehat{J}_i - \frac{2}{3}\widehat{\mathbf{J}}^2\delta_{ik}\right).$$

Отсюда находим среднее значение

$$\overline{Q_{ik}^2} = \frac{3Q^2}{2J^2(2J-1)^2}\mathbf{J}^2(4\mathbf{J}^2-3) = Q^2\frac{3(J+1)(2J+3)}{2J(2J-1)}.$$

Приведенные матричные элементы:

$$\langle J\|J\|J\rangle = \sqrt{J(J+1)(2J+1)},$$

$$\langle J\|Q\|J\rangle = Q\sqrt{\frac{3(2J+1)(J+1)(2J+3)}{2J(2J-1)}}.$$

Из (48.14) видно теперь, что поляризационные моменты $\mathcal{P}_{1\mu}$ совпадают со сферическими компонентами вектора

$$\sqrt{\frac{3}{J(J+1)}}\overline{\mathbf{J}},$$

а моменты $\mathcal{P}_{2\mu}$ — со сферическими компонентами тензора

$$\sqrt{\frac{10J(2J-1)}{3(J+1)(2J+3)}}\frac{\overline{Q}_{ik}}{Q}.$$

§ 49. Излучение атомов. Электрический тип [1]

Энергии внешних электронов атома (принимающих участие в оптических радиационных переходах) в грубой оценке имеют порядок величины $E \sim me^4/\hbar^2$, так что излучаемые длины волн $\lambda \sim \hbar c/E \sim \hbar^2/(\alpha m e^2)$. Размеры же атома $a \sim \hbar^2/me^2$. Поэтому в оптических спектрах атомов, как правило, выполняется неравенство $a/\lambda \sim a \ll 1$. Такой же порядок величины имеет отношение $v/c \sim \alpha$, где v — скорости оптических электронов.

Таким образом, в оптических спектрах атомов выполняется условие, в силу которого вероятность электрического дипольного излучения (если оно допускается правилами отбора) значительно превосходит вероятности мультипольных переходов [2]. В связи с этим в спектроскопии атомов наиболее важную роль играют именно электрические дипольные переходы.

---

[1]) В § 49–51, 53–55 пользуемся обычными единицами.

[2]) Типичные значения вероятности дипольных переходов в оптической области спектра атомов имеют порядок 10^8 с$^{-1}$.

Как уже указывалось, такие переходы подчинены строгим правилам отбора по полному моменту атома J и по четности P [1]:

$$|J' - J| \leqslant 1 \leqslant J + J', \tag{49.1}$$

$$PP' = -1. \tag{49.2}$$

Неравенство $|J' - J| \leqslant 1$ означает, что момент J может меняться лишь на 0, ± 1; в силу неравенства $J + J' \geqslant 1$ дополнительно запрещен переход $0 \to 0$. Четности начального и конечного состояний должны быть противоположны [2].

Вероятность излучения с переходом $nJM \to n'J'M'$ определяется соответствующим матричным элементом дипольного момента атома согласно

$$w(nJM \to n'J'M') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} |\langle n'J'M'|d_{-m}|nJM\rangle|^2, \tag{49.3}$$
$$\omega = \omega(nJ \to n'J').$$

Просуммировав (49.3) по всем значениям $M' = M - m$ (при заданном M), мы получим полную вероятность излучения данной частоты с атомного уровня nJ. Суммирование производится с помощью (46.20) и дает

$$w(nJ \to n'J') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \frac{1}{2J+1} |\langle n'J'\|d\|nJ\rangle|^2. \tag{49.4}$$

Стоящий здесь квадрат модуля приведенного матричного элемента иногда называют *силой линии перехода*; эта величина симметрична относительно начального и конечного состояний.

Наблюдаемая интенсивность излучения получается умножением w на $\hbar\omega$ и на число атомов в источнике, находящихся на данном возбужденном уровне (N_{nJ}). Так, в газе с температурой T это число $N_{nJ} \propto (2J+1)\exp(-E_{nJ}/T)$; множитель $(2J+1)$ — статистический вес уровня с моментом J.

Дальнейшие заключения о вероятностях перехода в атомных спектрах можно сделать лишь при конкретизации характера состояний атома. Мы не станем останавливаться здесь на методах расчета матричных элементов, степень приближенности которых не имеет четкого теоретического характера. Выведем лишь некоторые соотношения для довольно широкой (в особенности в лег-

[1] Будем теперь обозначать квантовые числа начальных и конечных состояний соответственно буквами без штриха и со штрихом. Буквами n, n' будут обозначаться совокупности остальных (помимо указываемых явно) квантовых чисел, определяющих состояния системы.

[2] Правило отбора по четности было установлено *Лапортом* (*O. Laporte*, 1924).

ких атомах) категории состояний, построенных по типу LS-связи(см. III, § 72). Такие состояния характеризуются, помимо полного момента, также и определенными значениями сохраняющихся в этом случае орбитального момента L и спина S.

Поскольку дипольный момент представляет собой чисто орбитальную величину, его оператор коммутирует с оператором спина, т. е. его матрица диагональна по числу S. По числу же L для дипольного момента имеют место такие же правила отбора, как для любого орбитального вектора (см. III, § 29). Таким образом, переходы между состояниями, построенными по LS-типу, подчинены дополнительным (помимо (49.1), (49.2)) правилам отбора:

$$S' - S = 0, \tag{49.5}$$

$$|L' - L| \leqslant 1 \leqslant L + L'. \tag{49.6}$$

Подчеркнем лишний раз, что эти правила — приближенные и нарушаются при учете спин-орбитального взаимодействия.

Отметим, что правило (49.5) (запрещение переходов между термами различной мультиплетности) справедливо не только для дипольных, но и для всех вообще переходов электрического типа: электрические мультипольные моменты всех порядков представляют собой орбитальные тензоры, так что их матрицы диагональны по спину. Так, для электрических квадрупольных переходов, помимо общих правил

$$|J' - J| \leqslant 2 \leqslant J + J', \quad PP' = 1, \tag{49.7}$$

в случае LS-связи имеют место дополнительные правила отбора:

$$S' - S = 0, \quad |L' - L| \leqslant 2 \leqslant L + L'. \tag{49.8}$$

Зависимость вероятности излучения от чисел S, J, J' может быть определена в явном виде. Этот вопрос непосредственно решается с помощью общих формул для матричных элементов сферических тензоров при сложении моментов. Согласно формуле (109.3) (см. III) имеем [1]:

$$|\langle n'L'SJ'\|d\|nLSJ\rangle|^2 = \\ = (2J+1)(2J'+1)\begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'L'\|d\|nL\rangle|^2. \tag{49.9}$$

[1]) В формулах т. III, § 109 под «моментами подсистем 1 и 2» надо понимать теперь орбитальный момент и спин атома, взаимодействием между которыми пренебрегаем. Роль величин $f^{(1)}_{1q}$ играет орбитальный вектор d_q.

Подставив это в (49.4), получим

$$w(nLSJ \to n'L'SJ') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}(2J'+1)\begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'L'\|d\|nL\rangle|^2, \tag{49.10}$$

причем $\omega = \omega(nLS \to n'L'S)$ [1]).

Для этих вероятностей можно получить определенное правило сумм. Для квадратов $6j$-символов имеет место формула суммирования (см. III, (108.7)):

$$\sum_{J'}(2J'+1)\begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2 = \frac{1}{2L+1}. \tag{49.11}$$

С ее помощью находим из (49.10)

$$\sum_{J'} w(nLSJ \to n'L'SJ') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\frac{1}{2L+1}|\langle n'L'\|d\|nL\rangle|^2. \tag{49.12}$$

Отметим, что эта величина оказывается не зависящей от начального значения J.

Если мы имеем дело с излучением газа с температурой, много большей интервалов тонкой структуры атомного терма nSL, то состояния с различными J заселены равномерно, т. е. все значения J равновероятны. Вероятность того, что атом находится на уровне с некоторым определенным значением J, в таком случае равна

$$\frac{2J+1}{(2L+1)(2S+1)}, \tag{49.13}$$

т. е. отношению статистического веса этого уровня к полному статистическому весу терма nSL. Усреднение выражений (49.10) или их сумм (49.12) по этим вероятностям сводится к умножению на фактор (49.13); обозначим это усреднение чертой над буквой. Полная вероятность излучения всех линий спектрального мультиплета (образованного всеми возможными переходами между компонентами тонкой структуры двух термов nSL и $n'SL'$) есть сумма:

$$\overline{w}(nLS \to n'L'S) = \sum_J \sum_{J'} \overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ'). \tag{49.14}$$

Поскольку, разумеется, $\sum_J (2J+1) = (2S+1)(2L+1)$, для полной вероятности получается выражение, совпадающее с (49.12).

[1]) Пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием при вычислении матричных элементов, мы пренебрегаем также и зависимостью частот от J и J', т. е. тонкой структурой начального и конечного уровней атома.

Поэтому для относительной вероятности (или, что то же, относительной интенсивности) отдельной линии получим

$$\frac{\overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \to n'L'S)} = \frac{(2J+1)(2J'+1)}{(2S+1)} \begin{Bmatrix} L' & J' & S \\ J & L & 1 \end{Bmatrix}^2. \qquad (49.15)$$

Анализ численных значений, даваемых этой формулой, обнаруживает, что среди линий мультиплета наиболее интенсивны те, для которых $\Delta J = \Delta L$ (их называют *главными линиями*, в отличие от остальных компонент мультиплета, называемых *сателлитами*). При этом интенсивность главных линий тем больше, чем больше начальное значение J.

Суммирование величин (49.15) по J или по J' дает

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{J'} \overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \to n'L'S)} &= \frac{2J+1}{(2L+1)(2S+1)}, \\ \frac{\sum_{J} \overline{w}(nLSJ \to n'L'SJ')}{\overline{w}(nLS \to n'L'S)} &= \frac{2J'+1}{(2L+1)(2S+1)}. \end{aligned} \qquad (49.16)$$

Таким образом, сумма интенсивностей всех линий спектрального мультиплета, имеющих один и тот же начальный (или конечный) уровень, пропорциональна статистическому весу начального (или конечного) уровня.

Остановимся еще на сверхтонкой структуре спектральных линий атома. Напомним, что сверхтонкое расщепление атомных уровней возникает в результате взаимодействия электронов со спином ядра, если последний отличен от нуля (см. III, § 122). Полный момент атома (вместе с ядром) $\mathbf{F}$ складывается из полного момента электронов $\mathbf{J}$ и момента ядра $\mathbf{I}$. Каждая компонента сверхтонкой структуры уровня nJ характеризуется своим значением квантового числа F.

Строгий закон сохранения момента приводит теперь к строгому правилу отбора для полного момента F; при электрическом дипольном излучении

$$|F' - F| \leqslant 1 \leqslant F + F'. \qquad (49.17)$$

Но ввиду чрезвычайной слабости взаимодействия электронов со спином ядра им можно вовсе пренебречь при вычислении матричных элементов электрических (и магнитных) моментов электронной оболочки атома. Поэтому остаются справедливыми также и прежние правила отбора по электронному моменту J и по электронной четности. В частности, в силу последнего невозможны электрические дипольные переходы между компонентами сверхтонкой структуры одного и того же терма: все эти уровни обладают одинаковой четностью, между тем как указанные переходы возможны лишь между состояниями различной четности.

Поскольку оператор дипольного момента коммутирует со спином ядра, зависимость матричных элементов от чисел I и F

может быть найдена в явном виде; эти вычисления лишь очевидным изменением обозначений отличаются от произведенных выше для LS-связи. Вероятность излучения, просуммированная по конечным значениям проекции полного момента $\mathbf{F}$:

$$w(nJIF \to n'J'IF') = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\frac{1}{2F+1}|\langle n'J'IF'\|d\|nJIF\rangle|^2, \qquad \omega = \omega(nJ \to n'J'), \tag{49.18}$$

причем квадрат приведенного матричного элемента

$$|\langle n'J'IF'\|d\|nJIF\rangle|^2 = \\ = (2F+1)(2F'+1)\begin{Bmatrix} J' & F' & I \\ F & J & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle n'J'\|d\|nJ\rangle|^2. \tag{49.19}$$

З а д а ч а

Большинство линий в спектрах щелочных металлов можно описать как результат переходов одного внешнего (оптического) электрона в самосогласованном поле атомного остатка, образующего замкнутую конфигурацию; состояние атома построено по типу LS-связи. В этих предположениях определить относительные интенсивности компонент тонкой структуры спектральных линий.

Р е ш е н и е. Полные моменты L и $S = 1/2$ атома совпадают с орбитальным моментом и спином оптического электрона.Поэтому четность состояния равна $(-1)^L$ (четность замкнутой конфигурации атомного остатка положительна). Правила отбора по четности запрещают, следовательно, дипольный переход с $L' = L$, так что возможны лишь переходы с $L' - L = \pm 1$. Переходы между компонентами дублетных уровней n, L и n', $L-1$ дают в силу правила отбора по J всего три линии (рис. 1). Их относительные интенсивности (обозначим их a, b, c) проще определить, не прибегая непосредственно к формуле (49.15), из правил (49.16). Составляя отношения суммарных интенсивностей линий с одним или другим начальным (или конечным) уровнем, получаем два равенства:

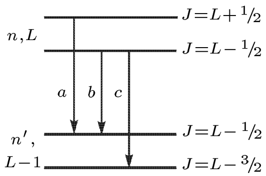


Рис. 1

$$\frac{b+c}{a} = \frac{2L}{2L+2}, \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{2L}{2L-2},$$

откуда

$$a : b : c = [(L+1)(2L-1)] : 1 : [(L-1)(2L+1)].$$

Если L=1, то нижний уровень не расщеплен, линия c отсутствует, а a/b=2.

§ 50. Излучение атомов. Магнитный тип

Магнитный момент атома по порядку величины дается боровским магнетоном: $\mu \sim e\hbar/mc$. Эта оценка отличается множителем α от порядка величины электрического дипольного момента: $d \sim ea \sim \hbar^2/(me)$ (поскольку и $v/c \sim \alpha$, то $\mu \sim dv/c$, как и

следовало ожидать). Отсюда следует, что вероятность магнитного дипольного ($M1$) излучения атомом примерно в α^2 раз меньше вероятности электрического дипольного излучения (той же частоты). Поэтому магнитное излучение фактически играет роль лишь для переходов, запрещенных правилами отбора электрического случая.

Что касается электрического квадрупольного ($E2$) излучения, то отношение его вероятности к вероятности $M1$-излучения по порядку величины равно

$$\frac{E2}{M1} \sim \frac{(ea^2)^2\omega^2/c^2}{\mu^2} \sim \frac{a^4m^2\omega^2}{\hbar^2} \sim \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^2 \tag{50.1}$$

(квадрупольный момент $\sim ea^2$, $E \sim \hbar^2/ma^2$ — энергия атома, ΔE — изменение энергии при переходе). Мы видим, что для средних атомных частот (т. е. при $\Delta E \sim E$) вероятности $E2$- и $M1$-излучений имеют одинаковый порядок величины (при условии, разумеется, что то и другое разрешено правилами отбора). Если же $\Delta E \ll E$ (например, для переходов между компонентами тонкой структуры одного и того же терма), то $M1$-излучение более вероятно, чем $E2$-излучение.

Магнитные дипольные переходы подчинены строгим правилам отбора

$$|J' - J| \leqslant 1 \leqslant J + J', \tag{50.2}$$

$$PP' = 1. \tag{50.3}$$

В случае LS-связи возникают дополнительные правила отбора, даже еще более ограничительные, чем в электрическом случае. Последнее обстоятельство связано со специфическим свойством магнитного момента атома, возникающим в результате одинаковости всех частиц в системе (электроны). Именно, оператор магнитного момента атома выражается через операторы его полных орбитального и спинового моментов:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = -\mu_0(\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}}) = -\mu_0(\hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{S}}), \tag{50.4}$$

где $\mu_0 = |e|\hbar/(2mc)$ — магнетон Бора (см. III, § 113). Ввиду сохранения полного момента оператор $\hat{\mathbf{J}}$ вообще не имеет недиагональных по энергии матричных элементов; так что в теории излучения достаточно писать $\hat{\boldsymbol{\mu}} = -\mu_0\hat{\mathbf{S}}$ [1]).

При пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием каждый из моментов L и S сохраняется по отдельности. Поэтому

[1]) Исключение представляют случаи, когда электронный момент атома **J** не сохраняется: при учете сверхтонкой структуры, в присутствии внешнего поля и т. п. (см. задачи).

оператор спина диагонален по всем квантовым числам nSL, характеризующим нерасщепленный терм. Для того чтобы вообще имел место какой-либо переход, должно, следовательно, непременно измениться число J. Таким образом, имеем правила отбора:

$$n' = n, \quad S' = S, \quad L' = L, \quad J' - J = \pm 1, \tag{50.5}$$

т. е. переходы возможны лишь между компонентами тонкой структуры одного и того же терма.

Вычисление вероятности излучения в этом случае может быть произведено до конца. Изменив соответствующим образом обозначения в формуле (49.10), найдем

$$w(nLSJ \to nLSJ') = \frac{4\omega^3\mu_0^2}{3\hbar c^3}(2J'+1)\begin{Bmatrix} S & J' & L \\ J & S & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle S\|S\|S\rangle|^2.$$

Входящий сюда приведенный матричный элемент спина по отношению к собственным функциям его самого дается формулой

$$\langle S\|S\|S\rangle = \sqrt{S(S+1)(2S+1)} \tag{50.6}$$

(см. III, (29.13)). Нужный нам $6j$-символ равен

$$\begin{Bmatrix} S & J-1 & L \\ J & S & 1 \end{Bmatrix}^2 = \frac{(L+S+J+1)(L+S-J+1)(L-S+J)(S-L+J)}{S(2S+1)(2S+2)(2J-1)2J(2J+1)} \tag{50.7}$$

(см. таблицу в III, § 108). В результате получим

$$w(nLSJ \to nLS, J-1) = \frac{2J+1}{2J-1}w(nLS, J-1 \to nLSJ) =$$
$$= \frac{\omega^3\mu_0^2}{3\hbar c^3(2J+1)J}(L+S+J+1)(L+S-J+1)(J+S-L) \times$$
$$\times (J+L-S). \tag{50.8}$$

Переходы между компонентами сверхтонкой структуры одного и того же уровня (их частоты лежат в радиоволновой области) вообще не могут происходить как электрически-дипольные, поскольку все эти компоненты обладают одинаковой четностью. Без изменения четности происходят переходы $E2$ и $M1$. Но ввиду очень малой величины интервалов сверхтонкой структуры получение $E2$ маловероятно по сравнению с $M1$ (ср. (50.1)), так что указанные переходы осуществляются как магнитно-дипольные.

Задачи

1. Найти вероятность $M1$-перехода между компонентами сверхтонкой структуры одного и того же уровня.

Решение. Вероятность перехода дается формулами (49.18), (49.19), в которых будет фигурировать теперь диагональный приведенный матричный элемент магнитного момента: $\langle nJ\|\mu\|nJ\rangle$. Его значение можно

написать сразу, если заметить, что полный (неприведенный) матричный элемент $\langle nJM|\mu_z|nJM\rangle$ как раз определяет расщепление данного уровня в эффекте Зеемана (см. III, § 113) и равен $-\mu_0 gM$, где g — множитель Ланде. Приведенный же матричный элемент (см. III, (29.7))

$$\langle nJ\|\mu\|nJ\rangle = \frac{1}{M}\sqrt{J(J+1)(2J+1)}\langle nJM|\mu_z|nJM\rangle = \\ = -\mu_0 g\sqrt{J(J+1)(2J+1)}.$$

В результате находим для искомой вероятности [1])

$$w(nJIF \to nJI, F-1) = \frac{2F+1}{2F-1}w(nJI, F-1 \to nJIF) = \\ = \frac{\omega^3\mu_0^2 g^2}{3\hbar c^3(2F+1)F}(J+I+F+1)(J+I-F+1)(F+J-I)(F-J+I).$$

Это выражение отличается от (50.8) лишь очевидным изменением обозначений и лишним множителем g^2.

2. Найти вероятность $M1$-перехода между зеемановскими компонентами одного и того же атомного уровня.

Р е ш е н и е. Речь идет о переходе $M \to M-1$ при неизменных значениях nJ; частота перехода (см. ниже, (51.3)): $\hbar\omega = \mu_0 gH$ (g — фактор Ланде). Матричный элемент сферической компоненты μ_{-1} вектора $\boldsymbol{\mu}$:

$$|\langle nJ, M-1|\mu_{-1}|nJM\rangle| = \sqrt{\frac{(J-M+1)(J+M)}{2J(J+1)(2J+1)}}|\langle nJ\|\mu\|nJ\rangle| = \\ = -\mu_0 g\sqrt{\frac{1}{2}(J-M+1)(J+M)}$$

(см. III, (27.12) и предыдущую задачу). Вероятность перехода

$$w = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}|\langle nJ, M-1|\mu_{-1}|nJM\rangle|^2 = \frac{2\mu_0^5 H^3}{3\hbar^4 c^3}(J-M+1)(J+M).$$

§ 51. Излучение атомов. Эффекты Зеемана и Штарка

Во внешнем магнитном поле H (которое предполагаем слабым) каждый атомный уровень с полным моментом J расщепляется на $2J+1$ уровней

$$E_M = E^{(0)} + \mu_0 gMH, \tag{51.1}$$

[1]) Интересный пример представляет переход между компонентами сверхтонкой структуры основного уровня атома водорода ($1s_{1/2}$), строго запрещенный не только как $E1$, но и как $E2$ (последнее — по правилу, запрещающему квадрупольный переход с $J+J'=1$). Этому переходу отвечает частота $\omega = 2\pi\cdot 1{,}42\cdot 10^9$ с$^{-1}$ (длина волны $\lambda = 21$ см). Положив $g=2$, $I=1/2$, $J=1/2$, $F=1$, $F'=0$, получим

$$w = \frac{4\omega^3\mu_0^2}{3\hbar c^3} = 2{,}85\cdot 10^{-15}\ \text{с}^{-1}.$$

где $E^{(0)}$ — невозмущенный уровень, μ_0 — магнетон Бора, g — фактор Ланде, M — проекция момента J на направление поля (см. III, § 113). Вырождение по направлениям момента, таким образом, полностью снимается.

Соответственно расщепляются и спектральные линии, возникающие от переходов между двумя расщепленными уровнями. Число компонент линии определяется правилом отбора для числа M, согласно которому при дипольном излучении должно быть

$$m = M - M' = 0, \pm 1. \tag{51.2}$$

Дополнительно к этому правилу запрещены переходы с $M = M' = 0$, если при этом $J' = J$. Это непосредственно видно из общих выражений (29.7) (см. III) матричных элементов произвольного вектора.

Компоненты, возникающие от переходов с $m = 0$, ± 1, называют соответственно π- и σ-компонентами. Их частоты:

$$\begin{aligned} \hbar\omega_\pi &= \hbar\omega^{(0)} + \mu_0 H(g - g')M, \\ \hbar\omega_\sigma &= \hbar\omega^{(0)} + \mu_0 H[gM - g'(M \pm 1)]. \end{aligned} \tag{51.3}$$

В частном случае, когда $g = g'$, имеем

$$\hbar\omega_\pi = \hbar\omega^{(0)}, \ \hbar\omega_\sigma = \hbar\omega^{(0)} \mp \mu_0 g H, \tag{51.4}$$

независимо от значения M; другими словами, в этом случае линия расщепляется в триплет с несмещенной π-компонентой и симметрично расположенными по обе стороны от нее двумя σ-компонентами (так называемый *нормальный эффект Зеемана*).

Полная (по всем направлениям) вероятность излучения пропорциональна квадрату модуля $|\langle n'J'M'|d_{-m}|nJM\rangle|^2$. Поэтому, в силу формулы (46.19) с $j = 1$, относительная вероятность излучения каждой из зеемановских компонент спектральной линии равна

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix}^2. \tag{51.5}$$

В частном случае нормального эффекта Зеемана имеется всего три компоненты, каждая из которых возникает от переходов со всех начальных M при заданном m. Поскольку

$$\sum_{MM'} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M' & m & -M \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \tag{51.6}$$

(см. III, (106.12)), в этом случае излучение всех трех компонент равновероятно.

Больший интерес представляет, однако, относительная интенсивность зеемановских компонент при наблюдении в определенном направлении (по отношению к направлению приложенного к источнику магнитного поля). Согласно (45.5) вероятность

излучения (а с нею и интенсивность линии) в заданном направлении $\mathbf{n}$ пропорциональна $\sum |\mathbf{e}^*\mathbf{d}_{fi}|^2$, где суммирование производится по двум независимым поляризациям $\mathbf{e}$, возможным при данном $\mathbf{n}$.

При наблюдении вдоль поля (ось z) эта сумма есть

$$|(d_x)_{fi}|^2 + |(d_y)_{fi}|^2.$$

Переходя к сферическим компонентам, получаем

$$|(d_1)_{fi}|^2 + |(d_{-1})_{fi}|^2.$$

Это значит, что в продольном (по полю) направлении наблюдаются лишь две σ-компоненты ($m = \pm 1$). Их интенсивности пропорциональны

$$\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{pmatrix}^2. \tag{51.7}$$

Обладая определенными значениями проекции момента m вдоль направления распространения, эти линии имеют правую ($m = 1$) и левую ($m = -1$) круговые поляризации (см. § 8).

При наблюдении в перпендикулярном полю направлении (пусть это будет ось x) интенсивность пропорциональна сумме

$$|(d_z)_{fi}|^2 + |(d_y)_{fi}|^2 = |(d_0)_{fi}|^2 + \frac{1}{2}\{|(d_1)_{fi}|^2 + |(d_{-1})_{fi}|^2\}.$$

Таким образом, в поперечном направлении наблюдаются две σ-компоненты и π-компонента с интенсивностями, пропорциональными соответственно

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \mp 1 & \pm 1 & -M \end{pmatrix}^2 \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix} \tag{51.8}$$

(интенсивности σ-компонент вдвое меньше, чем при продольном наблюдении). При этом π-компонента поляризована линейно вдоль оси z, а σ-компоненты наблюдаются в этом направлении поляризованными линейно вдоль оси y.

Отметим, что относительные интенсивности зеемановских компонент целиком определяются начальными и конечными значениями J и M вне зависимости от других характеристик уровней.

Правила отбора запрещают электрически-дипольные переходы между зеемановскими компонентами одного и того же уровня, поскольку все они обладают одинаковой четностью. По той же причине, которая была указана в конце предыдущего параграфа для переходов между компонентами сверхтонкой структуры уровня, указанные переходы осуществляются как магнитно-дипольные. В силу правила отбора по числу M переходы проис-

ходят лишь между соседними компонентами ($M' - M = \pm 1$) [1]. Расщепление уровней атома в слабом электрическом поле (*эффект Штарка*), в отличие от расщепления в магнитном поле, не приводит к полному снятию вырождения по направлениям момента. Все уровни, за исключением уровней с $M = 0$, остаются двукратно вырожденными: к каждому относятся два состояния с проекциями момента M и $-M$.

Вычисление относительных интенсивностей штарковских компонент спектральной линии аналогично изложенному выше для эффекта Зеемана [2]. При этом надо иметь в виду, что в интенсивность π-компонент дают вклад (при $M \neq 0$) переходы $M \to M$ и $-M \to -M$ а в интенсивности σ-компонент — переходы $M \to M \pm 1$ и $-M \to -(M \pm 1)$. Поэтому, например, при поперечном наблюдении эффекта интенсивности π-компонент пропорциональны

$$2\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M & 0 & -M \end{pmatrix}^2,$$

а интенсивности σ-компонент пропорциональны суммам

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \pm 1 & \mp 1 & -M \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M \mp 1 & \pm 1 & M \end{pmatrix}^2 = \\ = \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ M \pm 1 & \mp 1 & -M \end{pmatrix}^2$$

(напомним, что при изменении знака всех чисел второй строки $3j$-символы могут изменить лишь знак, квадраты их не меняются).

Во внешнем, даже слабом поле полный момент $\mathbf{J}$, строго говоря, перестает сохраняться; в однородном поле соблюдается точно лишь сохранение проекции момента M. Поэтому и при радиационных переходах в слабом поле сохранение момента становится не строго обязательным, и в спектре атомов могут появиться линии, запрещенные обычными правилами отбора.

Вычисление интенсивностей этих линий сводится к вычислению поправок в матрице дипольного момента, что в свою очередь требует определения поправок к волновым функциям стационарных состояний. В первом приближении теории возмущений (по слабому внешнему полю) в волновой функции появляются «при-

[1]) Эти переходы обычно имеют частоты в сантиметровом диапазоне и наблюдаются в поглощении и вынужденном испускании (электронный парамагнитный резонанс): поглощающие атомы находятся в сильном постоянном магнитном поле (производящем зеемановское расщепление) и слабом радиочастотном поле резонансной частоты.

[2]) Мы имеем здесь в виду квадратичный эффект Штарка, свойственный всем атомам, за исключением водорода (см. III, § 76). Поле предполагается настолько слабым, что вызываемое им расщепление уровней мало по сравнению даже с интервалами тонкой структуры.

меси» состояний, соединенных с исходным отличными от нуля матричными элементами возмущения ($-\mathbf{Ed}$ в электрическом поле): добавка некоторого состояния ψ_2 к состоянию ψ_1 есть

$$\frac{-\mathbf{Ed}_{21}}{E_1 - E_2}\psi_2.$$

В результате в матричном элементе «запрещенного» перехода появится член

$$\frac{-(\mathbf{Ed}_{21})\mathbf{d}_{32}}{E_1 - E_2},$$

отличный от нуля, если разрешены переходы из «промежуточного» состояния 2 в начальное и конечное состояния 1 и 3.

§ 52. Излучение атомов. Атом водорода

Атом водорода представляет единственный случай, в котором вычисление матричных элементов перехода может быть произведено до конца в аналитическом виде (*W. Gordon*, 1929).

Четность состояния атома водорода равна $(-1)^l$, т. е. однозначно определяется орбитальным моментом электрона (напомним, что число l как определяющее четность состояния сохраняет свой смысл и для точных релятивистских волновых функций, т. е. при учете спин-орбитального взаимодействия). Поэтому правило отбора по четности строго запрещает электрически-дипольные переходы без изменения l; возможны лишь переходы с $l \to l \pm 1$. Изменения же главного квантового числа n не ограничены.

Дипольный момент атома водорода сводится к радиус-вектору электрона: $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$. Поскольку волновая функция электрона в атоме водорода представляет собой произведение угловой части и радиальной функции R_{nl}, приведенные матричные элементы радиус-вектора тоже представляются в виде произведения

$$\langle n', l-1 \| r \| nl \rangle = \langle l-1 \| \nu \| l \rangle \int_0^\infty R_{n',l-1} r R_{nl} r^2 dr,$$

где $\langle l-1 \| \nu \| l \rangle$ — приведенные матричные элементы единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$ в направлении $\mathbf{r}$. Последние равны

$$\langle l-1 \| \nu \| l \rangle = \langle l \| \nu \| l-1 \rangle^* = i\sqrt{l}$$

(см. III, (29.14)). Таким образом,

$$\langle n', l-1 \| r \| nl \rangle = -\langle nl \| r \| n', l-1 \rangle = i\sqrt{l} \int_0^\infty R_{n',l-1} R_{nl} r^3 dr. \quad (52.1)$$

Нерелятивистские радиальные функции дискретного спектра атома водорода даются формулой (36.13) (см. III) [1])

$$R_{nl} = \frac{2}{n^{l+2}(2l+1)!}\sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}}(2r)^l e^{-r/n} \times \\ \times F\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{2r}{n}\right). \quad (52.2)$$

Интеграл (52.1) с произведением двух вырожденных гипергеометрических функций вычисляется с помощью формул, приведенных в т. III, § f [2]) . Вычисление приводит к результату

$$\langle n', l-1\|r\|nl\rangle = \\ = i\sqrt{l}\frac{(-1)^{n'-1}}{4(2l-1)!}\sqrt{\frac{(n+l)!(n'+l-1)!}{(n-l-1)!(n'-l)!}}\frac{(4nn')^{l+1}(n-n')^{n+n'-2l-2}}{(n+n')^{n+n'}} \times \\ \times \left\{F\left(-n+l+1, -n'+l, 2l, -\frac{4nn'}{(n-n')^2}\right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2 F\left(-n+l-1, -n'+l, 2l, -\frac{4nn'}{(n-n')^2}\right)\right\}, \quad (52.3)$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрические функции. Поскольку параметры α, β в данном случае равны отрицательным целым числам (или нулю), эти функции сводятся к полиномам [3]) .

Приведем для справок выражения, получающиеся из (52.3) в некоторых частных случаях (значение l указываем спектроскопическим символом s, p, d, ...):

$$\begin{aligned} |\langle 1s\|r\|np\rangle|^2 &= \frac{2^8 n^7 (n-1)^{2n-5}}{(n+1)^{2n+5}}, \\ |\langle 2s\|r\|np\rangle|^2 &= \frac{2^{17} n^7 (n^2-1)(n-2)^{2n-6}}{(n+2)^{2n+6}}, \\ |\langle 2p\|r\|nd\rangle|^2 &= \frac{2^{19} n^9 (n^2-1)(n-2)^{2n-7}}{3(n+2)^{2n+7}}, \\ |\langle 2p\|r\|ns\rangle|^2 &= \frac{2^{15} n^9 (n-2)^{2n-6}}{3(n+2)^{2n+6}}. \end{aligned} \quad (52.4)$$

[1]) В этом параграфе пользуемся атомными единицами. В обычных единицах написанные ниже выражения для матричных элементов координаты должны быть умножены на $\hbar^2/(me^2)$ (если же речь идет о водородоподобном ионе с номером Z, то на $\hbar^2/(mZe^2)$).

[2]) Во введенных там обозначениях речь идет о вычислении интеграла $J^{12}_{2l+2}(-n+l+1, -n'+l)$. Оно осуществляется с помощью формул (f. 12)–(f. 16).

[3]) Численные таблицы матричных элементов и вероятностей переходов для водорода можно найти в книге: *Бете Г.*, *Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. — М.: ИЛ, 1960.

Формула (52.3) непригодна для переходов без изменения главного квантового числа n (переходы между компонентами тонкой структуры уровня). В этом случае ($n = n'$) для осуществления интегрирования исходим из представления радиальных функций через обобщенные полиномы Лагерра:

$$R_{nl} = -\frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}}e^{-r/n}\left(\frac{2r}{n}\right)^l L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right). \tag{52.5}$$

В интеграле

$$\int_0^\infty R_{n,l-1}R_{nl}r^3dr \propto \int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{2l+2}L_{n+1}^{2l+1}(\rho)L_{n+l-1}^{2l-1}(\rho)d\rho$$

заменяем один из полиномов его выражением через производящую функцию (см. III, § d):

$$L_{n+1}^{2l+1}(\rho) = -\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}e^{\rho}\rho^{-2l-1}\left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n-l-1}e^{-\rho}\rho^{n+l}.$$

После $(n-l-1)$-кратного интегрирования по частям получим интеграл вида

$$\int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{n+l}\left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n-l-1}\rho L_{n+l-1}^{2l-1}(\rho)d\rho,$$

в котором заменяем полином Лагерра его явным выражением согласно формуле

$$L_n^m(\rho) = (-1)^m n!\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n}{m+k}\frac{(-\rho)^k}{k!}.$$

После проведения дифференцирования в сумме остается всего три члена, после чего интегрирование элементарно. Вычисление приводит к простому результату:

$$\langle n, l-1\|r\|nl\rangle = i\sqrt{l}\cdot\frac{3}{2}n\sqrt{n^2-l^2}. \tag{52.6}$$

Интеграл

$$\int_0^\infty R_{n',l-1}R_{nl}r^3dr = \int_0^\infty \chi_{n',l-1}(r\chi_{nl})dr$$

(где $\chi_{nl} = rR_{nl}$) представляет собой коэффициент разложения функции $r\chi_{nl}$ по системе ортогональных функций $\chi_{n',l-1}$($n' = 1$,

2, ...). Сумма квадратов модулей этих коэффициентов равна интегралу от квадрата разлагаемой функции [1]). Поэтому

$$\sum_{n'} |\langle n', l-1\|r\|nl\rangle|^2 = l\int_0^\infty r^2\chi_{nl}^2\,dr. \tag{52.7}$$

Воспользовавшись известным выражением для среднего квадрата r^2 в состоянии nl (см. III, (36.16)), найдем следующее правило сумм:

$$\sum_{n'} |\langle n', l-1\|r\|nl\rangle|^2 = l\frac{n^2}{2}[5n^2+1-3l(l+1)]. \tag{52.8}$$

При заданных значениях n, l и больших значениях n' матричный элемент перехода $nl \to n'l'$ убывает по закону

$$|\langle n'l'\|r\|nl\rangle|^2 \propto \frac{3}{n'^3}, \tag{52.9}$$

в чем можно убедиться как из частных выражений (52.4), так и из общей формулы (52.3). Этот результат вполне естествен: кулоновы уровни энергии $E' = -1/2n'^2$ при больших n' расположены квазинепрерывно, и вероятность перехода на какой-либо уровень в интервале dE' пропорциональна плотности расположения этих уровней, которая сама $\propto n'^{-3}$.

Эффект Штарка в водороде имеет, как известно, специфический характер (см. III, § 77) — расщепление пропорционально первой степени электрического поля. При этом поле предполагается хотя и не сильным (условие применимости теории возмущений), но в то же время таким, чтобы расщепление уровней было велико по сравнению с их тонкой структурой. В этих условиях величина момента вообще не сохраняется и уровни должны классифицироваться по параболическим квантовым числам n_1, n_2, m. Последнее из них — магнитное квантовое число m — по-прежнему определяет проекцию орбитального момента на ось z (направление поля), которая в данных условиях (пренебрежение спин-орбитальным взаимодействием) сохраняется. Поэтому для него имеет место обычное правило отбора

$$m' - m = 0, \pm 1. \tag{52.10}$$

Ограничений же для изменения чисел n_1, n_2 не имеется.

Матричные элементы дипольного момента в параболических координатах тоже могут быть вычислены аналитически. Полу-

[1]) Суммирование производится по состояниям как дискретного, так и непрерывного спектров.

чающиеся формулы, однако, очень громоздки, и мы не станем приводить их здесь [1]).

Задачи

1. Найти штарковское расщепление уровней водорода в случае, когда расщепление мало по сравнению с интервалами тонкой структуры (но велико по сравнение с лэмбовским сдвигом).

Решение. В указанных условиях остается двукратное вырождение невозмущенных уровней с $l = j \pm 1/2$, в связи с чем штарковское расщепление остается линейным по полю. Значение расщепления Δ определяется из секулярного уравнения

$$\begin{vmatrix} -\Delta & -E(d_z)_{12} \\ -E(d_z)_{21} & -\Delta \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \pm E|(d_z)_{12}|$$

(индексы 1, 2 отвечают состояниям с $l = j \pm 1/2$ и заданным магнитным квантовым числом m; возмущение $V = -Ed_z$ диагонально по m и не имеет элементов, диагональных по l). Матричный элемент орбитальной величины d_z вычисляется с помощью формул (29.7) и (109.3) (см. III), согласно которым

$$\langle j, l-1, m|d_z|jlm\rangle = \frac{m}{\sqrt{j(j+1)(2j+1)}}\langle j, l-1\|d\|jl\rangle,$$

$$\langle j, l-1\|d\|jl\rangle = -(2j+1)\begin{Bmatrix} l-1 & j & 1/2 \\ j & l & 1 \end{Bmatrix}\langle l-1\|d\|l\rangle,$$

причем надо положить $l = j + 1/2$; величина $\langle l-1\|d\|l\rangle$ берется из (52.6). В результате получим $\Delta = \pm\frac{3}{4}\sqrt{n^2 - (j+1/2)^2}\frac{nm}{j(j+1)}E$.

2. Определить вероятность испускания фотона при переходе между состояниями $2s_{1/2} \to 1s_{1/2}$ атома водорода (*G. Breit*, *E. Teller*, 1940).

Решение. Рассматриваемый процесс строго запрещен для $E1$-перехода по четности, а для $E2$-перехода по правилу (46.15). Поэтому следует вычислить вероятность $M1$-перехода, даваемую формулой (47.5). В данном случае ($l = 0$), однако, магнитный момент — чисто спиновая величина, и его матричный элемент в пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием обращается в нуль в силу взаимной ортогональности орбитальных волновых функций с различными главными квантовыми числами. Это значит, что для получения отличного от нуля ответа было бы недостаточно приближения уравнения Паули, и надо исходить из полного уравнения Дирака.

В стандартном представлении волновых функций ток перехода [2])

$$j_{fi} = \psi_f^*\boldsymbol{\alpha}\psi_i = \varphi_f^*\boldsymbol{\sigma}\chi_i + \chi_f^*\boldsymbol{\sigma}\varphi_i.$$

Согласно (35.1), (24.2), (24.8) волновые функции состояний с $l = 0$, $j = 1/2$ имеют вид

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} f(r)w(m) \\ -ig(r)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})w(m) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, а $w(m)$ — вещественный единичный 3-спинор, отвечающий значению m проекции спина. Таким образом,

$$j_{fi} = \frac{1}{4\pi i}\{f_f g_i w_f\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})w_i - g_i f_i w_f(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\boldsymbol{\sigma}w_i\}.$$

[1]) Эти формулы и соответствующие численные таблицы см. в указанной выше книге *Г. Бете* и *Э. Солпитера*.

[2]) В этой задаче пользуемся релятивистскими единицами.

Подставив это выражение в (47.4) и произведя интегрирование по направлениям **n**, получим

$$\mu_{fi} = -\frac{e}{6i} w_f [\boldsymbol{\sigma\sigma}] w_i I = -\frac{e}{3} w_f \boldsymbol{\sigma} w_i I$$

(в силу условий коммутации матриц Паули $[\boldsymbol{\sigma\sigma}] = 2i\boldsymbol{\sigma}$); здесь

$$I = \int\limits_0^\infty (f_f g_i + f_i g_f) r^3 dr. \qquad (1)$$

Вероятность же испускания фотона (47.5), просуммированная по значениям m_f, есть

$$w = \frac{4e^2\omega^3}{27} w_i \boldsymbol{\sigma}^2 w_i I^2 = \frac{4e^2\omega^3}{9} I^2. \qquad (2)$$

Из (35.4) имеем (при $\varkappa = -1$)

$$g = \frac{f'}{\varepsilon + m + \alpha/r} \approx \frac{f'}{2m} - \left(\varepsilon - m + \frac{\alpha}{r}\right) \frac{R'}{4m^2};$$

во втором члене точная функция f заменена нерелятивистской радиальной функцией R. Если ограничиться приближением $g = R'/2m$, интеграл

$$I = \frac{1}{2m} \int\limits_0^\infty (R_f R_i)' r^3 dr = -\frac{3}{2m} \int\limits_0^\infty R_f R_i r^2 dr = 0 \qquad (3)$$

в силу ортогональности функций R_f и R_i. В следующем приближении, с учетом (3),

$$I = \frac{1}{2m} \int\limits_0^\infty (f_f f_i)' r^3 dr + \frac{1}{4m^2} \int \left\{ R'_f R_i (\varepsilon_i - \varepsilon_f) - \frac{\alpha}{r} (R_f R_i)' \right\} r^3 dr. \qquad (4)$$

Учитывая, что в силу ортогональности точных функций ψ_i и ψ_f имеем (при $\varkappa_i = \varkappa_f$)

$$\int\limits_0^\infty (f_i f_f + g_i g_f) r^2 dr = 0,$$

первый член в (4) после интегрирования по частям переписываем как

$$-\frac{3}{2m} \int\limits_0^\infty f_f f_i r^2 dr = \frac{3}{2m} \int\limits_0^\infty g_f g_i r^2 dr \approx \frac{3}{8m^3} \int\limits_0^\infty R'_f R'_i r^2 dr.$$

Вычисление интеграла с функциями

$$R_f = 2(m\alpha)^3 e^{-m\alpha r}, \quad R_i = \frac{(m\alpha)^3}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{m\alpha r}{2}\right) e^{-m\alpha r/2}$$

(см. III, § 36) и разностью энергий

$$\omega = \varepsilon_i - \varepsilon_f = \frac{m\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{8} m\alpha^2$$

дает $I = 2^{3/2}\alpha^2/(9m)$. Отсюда вероятность перехода (обычные единицы)

$$\omega = \frac{2^5 \alpha^5 \hbar^2 \omega^3}{3^6 m^2 c^4} = \frac{mc^2 \alpha^{11}}{2^4 \cdot 3^3 \hbar} = 5{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{c}^{-1}.$$

Соответствующее время жизни состояний $2s_{1/2}$ очень велико, и фактически гораздо вероятнее высвечивание путем одновременного испускания двух фотонов (см. примеч. на с. 263).

§ 53. Излучение двухатомных молекул. Электронные спектры

Специфика молекулярных спектров связана в первую очередь с разделением энергии молекулы на электронную, колебательную и вращательную части, из которых каждая следующая мала по сравнению с предыдущей. Структура уровней двухатомных молекул была подробно изучена в т. III, гл. XI. Здесь мы займемся выяснением возникающей картины спектра и вычислением интенсивности линий в нем [1].

Начнем с общего случая, когда при переходе меняется электронное состояние молекулы (а вместе с ним, вообще говоря, также колебательное и вращательное состояния). Частоты этих переходов лежат в видимой и ультрафиолетовой областях спектра. Об их совокупности говорят как об *электронном спектре* молекулы. При этом мы всегда будем иметь а виду электрически-дипольные переходы; переходы других типов вообще мало существенны в молекулярной спектроскопии.

Как и для дипольных переходов и любой системе, справедливо правило отбора для полного момента молекулы J:

$$|J' - J| \leqslant 1 \leqslant J + J'. \tag{53.1}$$

Строгому правилу отбора по четности системы соответствует в данном случае правило отбора по *знаку* уровня; напомним, что по принятой в молекулярной спектроскопии терминологии состояния с волновыми функциями, не меняющими или меняющими знак при инверсии (изменение знака координат электронов и ядер), называются *положительными* или *отрицательными*. Таким образом, имеем строгое правило:

$$+ \to -, \quad - \to +. \tag{53.2}$$

Если молекула состоит из одинаковых атомов (с ядрами одного и того же изотопа), то появляется классификация уровней по отношению к перестановке координат ядер: *симметричные* (s) уровни с волновыми функциями, не меняющими знак при этом преобразовании, и *антисимметричные* (a) уровни с функциями, меняющими знак. Поскольку оператор электронного дипольного момента этим преобразованием вообще не затрагивается, его матричные элементы отличны от нуля лишь для переходов без изменения этой симметрии [2]:

$$s \to s, \quad a \to a. \tag{53.3}$$

[1] Дальнейшее изложение основано на материале, содержащемся в т. III, § 78, 82–88. Чтобы не загромождать текст, будем избегать постоянных ссылок на эти параграфы.

[2] Это правило относится, очевидно, и к переходам любой мультипольности.

Это правило, однако, не является абсолютно строгим. Дело в том, что существование у уровня данного свойства симметрии связано с существованием у молекулы того или иного определенного значения суммарного спина ядер I. Ввиду чрезвычайной слабости взаимодействия ядерных спинов с электронами спин I сохраняется с большой точностью, но все же не строго. При учете этого взаимодействия I не будет иметь определенного значения, свойство симметрии (s или a) не сохраняется и правило отбора (53.3) теряется.

Электронные термы молекулы из одинаковых атомов характеризуются также своей *четностью* (g или u) — поведением волновых функций при изменении знака координат электронов (отсчитываемых от центра молекулы) при неизменных координатах ядер. Существует тесная связь между этим свойством электронного терма, с одной стороны, и ядерной симметрией и знаком относящихся к этому терму вращательных уровней, с другой. Уровни, относящиеся к четному (g) электронному терму, могут иметь характеристики $s+$ или $a-$, а относящиеся к нечетному терму — характеристики $s-$ или $a+$. Из правил (53.2) или (53.3) следует поэтому также правило

$$g \to u, \quad u \to g. \tag{53.4}$$

В качестве приближенного правило (53.4) остается справедливым также и для молекул из разных изотопов одного и того же элемента. Поскольку заряды ядер одинаковы, рассматривая электронный терм при неподвижных ядрах, мы будем иметь в таком случае дело с системой электронов в электрическом поле, обладающем центром симметрии (в точке, делящей пополам расстояние между ядрами). Симметрия электронной волновой функции по отношению к инверсии в этой точке и определяет четность терма, а поскольку вектор электрического дипольного момента при этом преобразовании меняет знак, то мы приходим к правилу (53.4). Приближенность правила, основанного лишь на таком выводе, связана с необходимостью рассматривать ядра как неподвижные. Поэтому оно нарушается при учете взаимодействия между электронным состоянием и вращением молекулы.

Дальнейшие правила отбора связаны с теми или иными конкретными предположениями о сравнительной величине различных взаимодействий в молекуле (т. е. о ее типе связи). Тем самым эти правила могут быть лишь приближенными.

Большинство электронных термов двухатомных молекул относится к типам связи a или b. Оба эти типа характеризуются тем, что связь орбитального момента с осью (электрическое взаимодействие обоих атомов в молекуле) велика по сравнению со всеми другими взаимодействиями. В связи с этим существуют квантовые числа Λ и S (проекция орбитального момента элек-

тронов на ось молекулы и полный спин электронов). Оператор орбитальной величины — электронного орбитального момента — коммутирует с оператором спина, так что

$$S' - S = 0 \quad (\text{случаи } a,\, b). \tag{53.5}$$

Изменение же числа Λ подчинено правилу отбора

$$\Lambda' - \Lambda = 0, \pm 1 \quad (\text{случаи } a,\, b), \tag{53.6}$$

причем для переходов между состояниями с $\Lambda = 0$ (Σ-термы) имеет место дополнительное правило

$$\Sigma^+ \to \Sigma^+, \quad \Sigma^- \to \Sigma^- \quad (\text{случаи } a,\, b) \tag{53.7}$$

(напомним, что состояния Σ^+ и Σ^- различаются поведением по отношению к отражению в плоскости, проходящей через ось молекулы). Правила (53.6),(53.7) получаются путем рассмотрения молекулы в системе координат, жестко связанной с ядрами (см. III, § 87); правило (53.6) аналогично правилу отбора по магнитному квантовому числу в случае атомов.

Типы связи a и b отличаются друг от друга соотношением между энергией взаимодействия «спин — ось» и энергией вращения (разностями вращательных уровней). В случае a первая из них больше второй, а в случае b — много меньше. Далее рассмотрим эти случаи раздельно.

С л у ч а й a. В этом случае существует квантовое число Σ — проекция полного спина на ось молекулы (а с ним и число $\Omega = \Sigma + \Lambda$ — проекция полного момента). Если оба (начальное и конечное) состояния относятся к случаю a, то справедливо правило

$$\Sigma' - \Sigma = 0 \quad (\text{случай } a) \tag{53.8}$$

(следующее из упомянутой уже коммутативности дипольного момента со спином). Из (53.6) и (53.8) следует [1]):

$$\Omega' - \Omega = 0, \pm 1. \tag{53.9}$$

Если $\Omega = \Omega' = 0$, то дополнительно к общему правилу (53.1) запрещены переходы с $J' = J$ [2]):

$$J' - J = \pm 1 \text{ при } \Omega = \Omega' = 0 \quad (\text{случай } a). \tag{53.10}$$

[1]) Это правило остается в силе также и в случае c (связь орбитального момента с осью мала по сравнению со связью «спин — орбита»), когда числа Λ и Σ в отдельности не существуют.

[2]) Это правило аналогично запрету переходов с $J = J'$ при $M = M' = 0$ для атомов (см. § 5), где, однако, оно могло представлять интерес лишь при наличии внешнего поля. В данном случае правило непосредственно следует из приведенной ниже формулы (53.12); $3j$-символ $\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ обращается в нуль при $J' = J$, когда сумма $J' + J + 1$ нечетна.

Рассмотрим переходы между какими-либо двумя определенными колебательными уровнями, относящимися к двум различным электронным термам (типа a). При учете тонкой структуры электронного терма каждый из этих уровней распадается на несколько компонент, число которых $(2S+1)$ у обоих должно быть одинаково в силу правила (53.5). Согласно правилу (53.8) каждая из компонент одного уровня комбинирует только с одной компонентой другого с тем же значением Σ.

Возьмем далее одну пару уровней с одинаковыми Σ; их значения Ω и Ω' могут различаться (вместе с Λ и Λ') на 0 или ± 1. При учете вращения каждый из них распадается на последовательность уровней, различающихся значениями чисел J и J', пробегающих значения $J \geqslant |\Omega|$, $J' \geqslant |\Omega'|$. Зависимость вероятностей перехода от этих чисел может быть установлена в общем виде (*H. Hönl*, *F. London*, 1925).

Матричный элемент перехода $n\Lambda\Omega J M_J \to n'\Lambda'\Omega' J' M'_J$ (n — остальные, помимо Ω и Λ, характеристики электронного терма) равен

$$|\langle n'\Lambda'\Omega'J'M'_J|d_q|n\Lambda\Omega JM_J\rangle| = \\ = \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -\Omega' & q' & \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M'_J & q & M_J \end{pmatrix} \times \\ \times |\langle n'\Lambda'|\overline{d}_{q'}|n\Lambda\rangle|, \quad (53.11)$$

где d_q и $\overline{d}_{q'}$ — сферические компоненты вектора дипольного момента соответственно в неподвижной системе координат xyz и в «подвижной» системе $\xi\eta\zeta$ с осью ζ вдоль оси молекулы (эта формула получается с помощью формулы (110.6) (см. III)). Матричные элементы $\langle n'\Lambda'|\overline{d}_{q'}|n\Lambda\rangle$ не зависят от вращательных квантовых чисел J, J', а зависят только от характеристик электронных термов (причем в данном случае не зависят от числа Σ [1])); поэтому в обозначении матричного элемента опущены индексы $\Omega' = \Lambda' + \Sigma$ и $\Omega = \Lambda + \Sigma$.

Вероятность перехода $n\Lambda\Omega J \to n'\Lambda'\Omega'J'$ пропорциональна квадрату матричного элемента (53.11), просуммированному по M'_J. В силу формулы (106.12) (см. III) имеем

$$\sum_{M'_j} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M'_J & q & M_J \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2J+1},$$

[1]) В этом можно убедиться подобно тому, как это было сделано в начале III, § 29 для скалярной величины f. В данном случае оператор векторной величины $\mathbf{d}$ коммутирует с оператором сохраняющегося (в нулевом приближении) вектора $\mathbf{S}$, а Σ есть проекция $\mathbf{S}$ на ось ζ во вращающейся системе координат, в которой и надо рассматривать условие коммутации $\mathbf{d}$ и $\mathbf{S}$.

так что

$$w(n\Lambda\Omega J \to n'\Lambda'\Omega'J') = \\ = (2J'+1)\begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -\Omega' & \Omega'-\Omega & \Omega \end{pmatrix}^2 B(n',n;\Lambda',\Lambda), \quad (53.12)$$

где коэффициенты B не зависят от J, J' (мы пренебрегаем, конечно, относительно малой разницей в частотах переходов с различными J, J') [1].

Если просуммировать (53.12) по J', то (в силу свойства ортогональности $3j$-символов (см. III, (106.13)) мы получим просто $B(n',n;\Lambda',\Lambda)$. Другими словами, полная вероятность перехода с вращательного уровня J состояния Ω на все уровни J' состояния Ω' не зависит от J.

С л у ч а й *b*. В этом случае существует, наряду с полным моментом J, также и квантовое число K — момент молекулы без учета ее спина. Правила отбора по этому числу совпадают с общими правилами отбора для всякой орбитальной векторной величины (каковой является электрический дипольный момент):

$$|K'-K| \leqslant 1 \leqslant K+K' \quad \text{(случай } b\text{)} \quad (53.13)$$

с дополнительным запрещением перехода с $K=K'$ при $\Lambda=\Lambda'= 0$ (аналогично (53.10)):

$$K'-K = \pm 1 \text{ при } \Lambda=\Lambda'=0. \quad (53.14)$$

Рассмотрим переходы между вращательными компонентами определенных колебательных уровней двух электронных состояний, относящихся к типу *b*. Вероятности переходов между ними определяются теми же формулами (53.12), в которых надо писать K, Λ вместо J, Ω. При учете тонкой структуры (при $S\neq 0$) каждый вращательный уровень K распадается на $2S+1$ компонент с $J=|K-S|, \ldots, K+S$, в результате чего вместо одной линии $J\to J'$ возникает мультиплет. Поскольку в данном случае мы имеем дело со сложением свободных (не связанных с осью молекулы) моментов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{S}$, формулы относительных вероятностей перехода для различных линий мультиплета совпадают с аналогичными формулами (49.15) для компонент тонкой структуры атомных спектров, где такую же роль (в случае LS-связи) играют моменты $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$.

[1]) Каждый из рассмотренных вращательных уровней J при учете Λ-удвоения расщепляется еще на два уровня, из которых один положителен, а другой отрицателен. Поэтому вместо одного перехода $J\to J'$ будем иметь с учетом правила отбора (53.2) два перехода: с положительной (отрицательной) компоненты уровня J на отрицательную (положительную) компоненту уровня J'. Вероятности этих переходов одинаковы.

Таким образом, мы рассмотрели правила отбора, определяющие возможные линии спектра во всех основных случаях, которые могут представиться в двухатомных молекулах.

Совокупность линий от переходов между вращательными компонентами двух данных электронно-колебательных уровней составляет, как говорят в спектроскопии, полосу; ввиду малости вращательных интервалов линии в полосе расположены очень тесно. Частоты этих линий даются разностями

$$\hbar\omega_{JJ'} = \text{const} + BJ(J+1) - B'J'(J'+1), \tag{53.15}$$

где B, B' — вращательные постоянные в обоих электронных состояниях (во избежание излишних усложнений предполагаем электронные термы синглетными). При $J' = J$, $J \pm 1$ формула (53.15) изображается графически (рис. 2) тремя ветвями (параболами), точки которых для целочисленных J определяют значения частот (расположение ветвей на рис. 2 отвечает случаю $B' < B$; при $B' > B$ они открыты в сторону малых ω, причем верхней является кривая для $J' = J - 1$) [1]). Наличие перегибающейся ветви приводит, как это ясно из рисунка, к сгущению линий по направлению к определенному предельному положению (*канту* полосы).

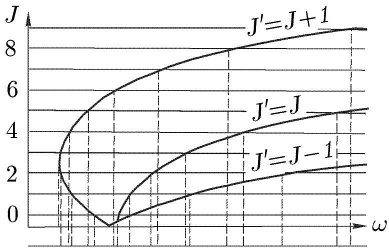


Рис. 2

Говоря об интенсивностях линий, следует упомянуть также своеобразное явление *чередования интенсивностей* в некоторых полосах электронного спектра молекул из атомов одного и того же изотопа (*W. Heisenberg*, *F. Hund*, 1927). Связанные с ядерными спинами требования симметрии приводят к тому, что у электронных Σ-термов вращательные компоненты с четными и нечетными значениями K обладают противоположной симметрией по отношению к ядрам и соответственно различными ядерными статистическими весами g_s и g_a (см. III, § 86). Согласно правилу (53.14) при переходах между двумя различными Σ-термами допустимы лишь $J' = J \pm 1$; при этом один из Σ-термов должен быть в силу (53.4) четным, а другой — нечетным. В результате при заданном значении $J' - J$ переходы с последовательными значениями J происходят попеременно между парами симметричных и парами антисимметричных уровней (как это иллюстрируется схемой рис. 3 на примере состояний Σ_g^+ и Σ_u^+). С другой стороны, наблюдаемая интенсивность линии пропорцио-

[1]) Серии линий, отвечающих переходам с $J' = J + 1$, J, $J - 1$, называют соответственно P-, Q- и R-ветвями.

нальна числу молекул, находящихся в данном начальном состоянии, а тем самым его статистическому весу. Поэтому интенсивность последовательных линий ($J = 0, 1, 2, \ldots$) будет попеременно большей и меньшей, пропорционально попеременно g_s и g_a (помимо монотонного хода, предсказываемого формулами (53.12) [1]).

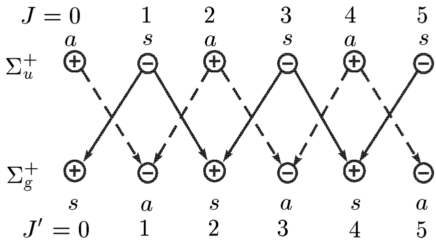


Рис. 3

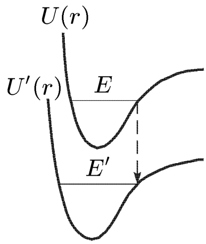


Рис. 4

Для изменения колебательного квантового числа при переходах между двумя различными электронными термами никаких строгих правил отбора не существует. Существует, однако, правило (*принцип Франка–Кондона*), позволяющее предсказать наиболее вероятное изменение колебательного состояния. Оно основано на квазиклассичности движения ядер, связанной с их большой массой (ср. сказанное о предиссоциации в III, § 90) [2].

В интеграле, определяющем матричный элемент перехода между колебательными состояниями E и E' электронных термов $U(r)$ и $U'(r)$, основную роль играет окрестность точки $r = r_0$, в которой

$$U(r_0) - U'(r_0) = E - E' \tag{53.16}$$

(т. е. импульсы относительного движения ядер в обоих состояниях одинаковы: $p = p'$). При заданном значении E вероятность перехода (как функция конечной энергии E') тем больше, чем меньше каждая из разностей $E - U$ и $E' - U'$. Она максимальна при

$$E - U(r_0) = E' - U'(r_0) = 0, \tag{53.17}$$

т. е. когда «точка перехода» r_0 (корень уравнения (53.16)) совпадает с классической точкой остановки ядер (рис. 4 иллюстрирует графически эту связь между E и наиболее вероятным E'). Для наглядности можно сказать, что наиболее вероятен переход

[1]) При этом предполагается, что все состояния с различными значениями суммарного ядерного спина заселены равномерно.

[2]) Строго говоря, необходимо также, чтобы колебательное квантовое число было достаточно велико.

вблизи точки, в которой ядра останавливаются и в окрестности которой проводят, следовательно, больше времени.

§ 54. Излучение двухатомных молекул. Колебательный и вращательный спектры

Перечисленные в предыдущем параграфе правила отбора и формулы для вероятностей перехода сохраняют свою силу и для переходов, в которых электронное состояние молекулы не меняется [1]). Остановимся здесь лишь на некоторых специфических особенностях этих переходов.

Прежде всего, правилом отбора (53.4) переходы (дипольные) без изменения электронного состояния вообще запрещаются в молекулах из одинаковых атомов, поскольку при таком переходе четность электронного терма осталась бы неизменной. Как следует из сказанного в § 53, этот запрет мог бы нарушиться лишь при учете взаимодействия ядерных спинов с электронами, а для молекул из различных изотопов одного и того же элемента — уже и за счет влияния вращения на электронное состояние.

Вычисление матричных элементов дипольного момента сводится (по формулам § 87 (см. III)) к их вычислению в системе координат, вращающейся вместе с молекулой. Волновая функция молекулы в этой системе представляет собой произведение волновой функции электронов при заданном расстоянии r между ядрами и волновой функции колебательного движения ядер в эффективном поле $U(r)$ электронов и ядер. При полном пренебрежении влиянием движения ядер на электронное состояние начальная и конечная электронные волновые функции при рассматриваемых переходах одинаковы. Интегрирование по координатам электронов дает поэтому в матричном элементе просто средний дипольный момент молекулы $\overline{d}$ (направленный, очевидно, вдоль ее оси) как функцию от расстояния r. Ввиду малости колебаний функцию $\overline{d}(r)$ можно разложить по степеням колебательной координаты $q = r - r_0$. При переходах, связанных с изменением колебательного состояния, нулевой член разложения выпадает из матричного элемента ввиду ортогональности волновых функций колебательного движения в одном и том же поле $U(q)$, так что остается член, пропорциональный q. Если рассматривать колебания как гармонические, то согласно известным свойствам

[1]) Переходы с изменением колебательного (а с ним и вращательного) состояния образуют, как говорят, *колебательный спектр* молекулы; он лежит в близкой инфракрасной области (длины волн менее 20 мкм). Переходы же с изменением лишь вращательного состояния образуют вращательный. спектр, лежащий в далекой инфракрасной области (длины волн более 20 мкм).

линейного осциллятора (см. III, § 23) матричные элементы будут отличны от нуля лишь для переходов между соседними колебательными состояниями; другими словами, для колебательного квантового числа v будет справедливо правило отбора

$$v' - v = \pm 1. \tag{54.1}$$

Это правило, однако, нарушается при учете ангармоничности колебаний, а также следующих членов разложения функции $\overline{d}(q)$.

При чисто вращательном переходе (без изменения также и колебательного состояния) матричный элемент проекции дипольного момента на подвижную ось ζ можно положить равным просто среднему дипольному моменту молекулы $\overline{d} = \overline{d}(0)$ [1]). Для вероятности перехода $J \to J \to 1$ получается в результате формула

$$w(nJ \to n, J-1) = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\overline{d}^2 \frac{J^2 - \Omega^2}{J(2J+1)}, \tag{54.2}$$

позволяющая вычислить не только относительные (как (53.12)), но и абсолютные значения вероятностей. (Формула (54.2) написана для случая a; в случае b надо писать K, Λ вместо J, Ω.)

Частоты чисто вращательных переходов даются разностями вращательных энергий $BJ(J+1)$ и равны

$$\hbar\omega_{J,J-1} = 2BJ. \tag{54.3}$$

Последовательные линии находятся на одинаковых расстояниях $(2B)$ друг от друга.

§ 55. Излучение ядер

Для γ-излучения ядер, как правило, выполняется условие малости размеров системы (радиуса ядра R) по сравнению с длиной волны фотона. Однако расстояния между ядерными уровнями (а тем самым и энергия γ-кванта) обычно малы по сравнению с энергией, приходящейся в ядре на один нуклон. Поэтому величина R/λ не связана непосредственно со скоростью v/c нуклонов в ядре и, вообще говоря, значительно меньше ее. Соответственно этому и вероятность Ml-излучения, как правило, больше вероятности излучения $E, l+1$ (ср. начало § 50).

Общие правила отбора по полному моменту («спину») ядра и по четности — те же, что и для излучения любой системой. Характерной особенностью ядерного излучения является распро-

---

[1]) В молекуле из одинаковых атомов $\overline{d} = 0$, что очевидно из соображений симметрии.

страненность переходов высших мультипольностей. В противоположность атомам, излучение которых обычно является электрически-дипольным, у ядра при малых энергиях такие переходы сравнительно редки, оказываясь запрещенными правилами отбора.

Если радиационный переход ядра можно рассматривать как одночастичный — изменение состояния одного нуклона при неизменном состоянии ядерного «остова», — то добавляются правила отбора по моменту этого нуклона. Однако точность соблюдения таких «одночастичных» правил отбора оказывается очень низкой.

Специфическими для ядра являются правила отбора по изотопическому спину. Напомним, что проекция T_3 изотопического спина определяется уже массой и номером ядра:

$$T_3 = \frac{1}{2}(Z - N) = Z - \frac{A}{2}.$$

При заданном же значении T_3 абсолютная величина изотопического спина может иметь любые значения $T \geqslant |T_3|$. Правило отбора по числу T для радиационных переходов возникает в связи с тем, что операторы электрических и магнитных моментов ядра, выраженные с помощью операторов изотопических спинов нуклонов, представляют собой суммы скаляра и x_3-компоненты вектора в изотопическом пространстве (см. III, § 116). Поэтому их матричные элементы отличны от нуля лишь при условии

$$T' - T = 0, \pm 1. \tag{55.1}$$

Само по себе это правило, однако, не накладывает особых ограничений на переходы в легких ядрах (для которых только и можно говорить с достаточной точностью о сохранении изотопического спина); дело в том, что среди низколежащих уровней этих ядер фактически вообще нет уровней с $T > 1$.

Но для $E1$-переходов имеется еще дополнительное правило в связи с тем, что для электрического дипольного момента изотопически-скалярная часть выпадает, и его оператор сводится к x_3-компоненте изотопического вектора (см. III, § 116). Поэтому если $T_3 = 0$, то дополнительно запрещены переходы с $\Delta T = 0$. Другими словами, в ядрах с одинаковым числом нейтронов и протонов ($N = Z$, $A = 2Z$) $E1$-переходы возможны лишь при

$$T' - T = \pm 1 \quad (T_3 = 0). \tag{55.2}$$

Разумеется, точность соблюдения этого правила зависит от точности, с которой сохраняется изотопический спин ядра.

На вероятность $E1$-переходов в ядре оказывает влияние также эффект отдачи ядерного остова при движении отдельных нуклонов. Этот эффект приводит к тому, что в создании дипольного момента протоны участвуют с эффективным зарядом $e(1 - Z/A)$ вместо e, а нейтроны — с зарядом $-eZ/A$ вместо 0 (см.

III, § 118). Уменьшение эффективного заряда протона приводит к некоторому подавлению вероятности $E1$-переходов.

Уровни энергии несферических ядер обладают вращательной структурой. В связи с этим появляется специфическая для таких ядер вращательная структура спектра γ-излучения.

Симметрия поля, в котором движутся нуклоны в «неподвижном» несферическом (аксиальном) ядре, совпадает с симметрией поля, в котором движутся электроны в «неподвижной» двухатомной молекуле из одинаковых атомов (точечная группа $\mathbf{C}_{\infty h}$). Поэтому свойства симметрии уровней несферического ядра (а с ним и правила отбора для матричных элементов) аналогичны симметрии уровней двухатомной молекулы (см. III, § 119). В частности, как и у двухатомной молекулы из одинаковых атомов, запрещены электрически-дипольные переходы внутри одной и той же вращательной полосы (т. е. без изменения внутреннего состояния ядра) — ср. § 54. Такие переходы осуществляются поэтому как $E2$- или $M1$-переходы. В первом случае полный момент ядра J может меняться на 2 или 1, а во втором — на 1.

Согласно (46.9) вероятность квадрупольного перехода, просуммированная по значениям проекции M' полного момента ядра в конечном состоянии:

$$w_{E2} = \frac{\omega^5}{15\hbar c^5}\sum_{M'} |\langle J'\Omega M'|Q^{(э)}_{2,-m}|J\Omega M\rangle|^2$$

(J — полный момент ядра; Ω — его проекция на ось ядра; $m = M - M'$). С помощью формулы (110.8) (см. III) эта сумма выразится через квадраты заданных величин — диагональных (по внутреннему состоянию ядра) квадрупольных моментов перехода $\overline{Q}_{2\lambda}$, определенных по отношению к связанным с ядром осям координат $\xi\eta\zeta$. При этом $\lambda = \Omega - \Omega'$, так что в данном случае ($\Omega' = \Omega$) фигурирует лишь компонента $\overline{Q}_{20}$. По определению просто квадрупольным моментом ядра называют величину

$$eQ_0 = e\int \rho_{ii}(2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2)\,d\xi d\eta d\zeta = -2e(\overline{Q}_{20})_{ii}.$$

Поэтому получим

$$w_{E2}(\Omega J \to \Omega J') = \frac{\omega^5}{60\hbar c^5} Q_0^2 (2j'+1)\begin{pmatrix} J' & 2 & J \\ -\Omega & 0 & \Omega \end{pmatrix}^2. \tag{55.3}$$

В раскрытом виде

$$w_{E2}(\Omega J \to \Omega, J-1) = \frac{\omega^5}{20\hbar c^5} Q_0^2 \frac{\Omega^2(J^2-\Omega^2)}{(J-1)J(J+1)(2J+1)},$$

$$w_{E2}(\Omega J \to \Omega, J-2) = \frac{\omega^5}{40\hbar c^5} Q_0^2 \frac{(J^2-\Omega^2)[(J-1)^2-\Omega^2]}{(J-1)J(2J-1)(2J+1)}.$$

По поводу этих формул надо, однако, сделать следующее замечание. В них использованы матричные элементы, вычисленные с волновыми функциями вида

$$\psi_{J\Omega M} = \mathrm{const} \cdot \chi_\Omega D^{(J)}_{\Omega M}(\mathbf{n})$$

(χ — волновая функция внутреннего состояния ядра). Эти функции отвечают определенным (по величине и знаку) значениям проекции момента на ось ζ. В ядрах же мы имеем дело с состояниями, обладающими лишь определенными четностью и величиной проекции момента (последнюю обычно и понимают под Ω). Поэтому при $\Omega \neq 0$ в качестве начальной и конечной волновых функций надо было бы взять комбинации вида

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{J\Omega M} \pm \psi_{J,-\Omega,M}), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{J'\Omega M'} \pm \psi_{J',-\Omega,M'}).$$

Произведения первых и вторых членов дадут прежнее значение матричного элемента квадрупольного момента. «Перекрестные» же произведения приведут к отличным от нуля интегралам, если $2\Omega \leqslant 2$ [1]. Поэтому формула (55.3), строго говоря, непригодна при $\Omega = 1/2, 1$; в этих случаях в вероятности перехода появляется дополнительный член, не выражающийся через среднее значение квадрупольного момента [2].

Аналогично выводу формулы (55.3) для вероятности $M1$-перехода получается формула

$$w_{M1}(\Omega J \to \Omega, J-1) = \\ = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\mu^2(2J-1)\begin{pmatrix} J-1 & 1 & J \\ -\Omega & 0 & \Omega \end{pmatrix}^2 = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3}\mu^2\frac{J^2-\Omega^2}{J(2J+1)}, \quad (55.4)$$

где μ — магнитный момент ядра (эта формула непригодна при $\Omega = 1/2$).

§ 56. Фотоэффект. Нерелятивистский случай

В § 49–52 мы рассматривали радиационные переходы (испускание или поглощение фотона) между атомными уровнями дискретного спектра. Фотоэффект отличается от такого процесса

---

[1]) Для матричных элементов 2^l-польных моментов в подынтегральные выражения войдут произведения вида

$$D^{(J')*}_{-\Omega M'} D^{(l)}_{q'q} D^{(J)}_{\Omega M}.$$

Интеграл по углам будет отличен от нуля при $q' = -2\Omega$, между тем как q' пробегает значения лишь от $-l$ до l; поэтому должно быть $2\Omega \leqslant l$.

[2]) Фактически этот член дает существенную поправку лишь при $\Omega = 1/2$, когда связь между вращением и внутренним состоянием ядра особенно велика (см. об этом III, § 119).

поглощения фотона лишь тем, что конечное состояние относится к непрерывному спектру.

Сечение фотоэффекта может быть вычислено до конца в аналитическом виде для атома водорода или для водородоподобного иона (с зарядом ядра $Z \ll 137$).

В начальном состоянии имеем электрон на дискретном уровне $\varepsilon_i \equiv -I$ (I — потенциал ионизации атома) и фотон с определенным импульсом $\mathbf{k}$. В конечном состоянии электрон имеет импульс $\mathbf{p}$ (и энергию $\varepsilon_f \equiv \varepsilon$). Поскольку $\mathbf{p}$ пробегает непрерывный ряд значений, сечение фотоэффекта дается формулой

$$d\sigma = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(-I + \omega - \varepsilon) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tag{56.1}$$

(ср. (44.3)), причем волновая функция конечного состояния электрона предполагается нормированной на одну частицу в объеме $V = 1$. Таким же образом по-прежнему нормирована волновая функция фотона; для перехода к сечению $d\sigma$ вероятность dw должна быть при этом разделена на плотность потока фотонов (равную $c/V = c$), но в релятивистских единицах это не отражается на виде формулы (56.1).

Выберем, как и в (45.2), трехмерно поперечную калибровку фотона. Тогда

$$V_{fi} = -e\mathbf{A}\mathbf{j}_{fi} = -e\sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} M_{fi},$$

где обозначено

$$M_{fi} = \int \psi'^* (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}) e^{i\mathbf{kr}} \psi d^3x \tag{56.2}$$

($\psi \equiv \psi_i$ и $\psi' \equiv \psi_f$ — начальная и конечная волновые функции электрона). Заменив в (56.1) $d^3p \to \mathbf{p}^2 d|\mathbf{p}|do = \varepsilon|\mathbf{p}|d\varepsilon do$ и проинтегрировав δ-функцию по $d\varepsilon$, перепишем эту формулу в виде

$$d\sigma = e^2 \frac{\varepsilon|\mathbf{p}|}{2\pi\omega} |M_{fi}|^2 do. \tag{56.3}$$

Мы произведем вычисления в двух случаях, различающихся значением энергии фотона: для $\omega \gg I$ и для $\omega \ll m$. Поскольку $I \sim me^4Z^2 \ll m$, эти две области частично перекрываются (при $I \ll \omega \ll m$), так что исследование этих случаев дает по существу полное описание фотоэффекта.

Начнем со случая

$$\omega \ll m. \tag{56.4}$$

При этом скорость электрона мала как в начальном, так и в конечном состояний, так что по отношению к электрону задача — целиком нерелятивистская. Соответственно этому заменим в (56.2) $\boldsymbol{\alpha}$ нерелятивистским оператором скорости $\widehat{\mathbf{v}} = -i\nabla/m$

(ср. § 45). Кроме того, можно перейти к дипольному приближению — положить $e^{i\mathbf{kr}} \approx 1$, т. е. пренебречь импульсом фотона по сравнению с импульсом электрона. Тогда

$$d\sigma = e^2 \frac{m|\mathbf{p}|}{2\pi\omega} |\mathbf{e}\mathbf{v}_{fi}|^2 do, \quad \mathbf{v}_{fi} = -\frac{i}{m} \int \psi'^* \nabla \psi \cdot d^3x. \tag{56.5}$$

Будем рассматривать фотоэффект с основного уровня атома водорода (или водородоподобного иона). Тогда

$$\psi = \frac{(Ze^2 m)^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-Ze^2 mr} \tag{56.6}$$

(в обычных единицах $me^2 \to 1/a_0$, где $a_0 = \hbar^2/me^2$ — боровский радиус).

В качестве же ψ' надо взять волновую функцию, асимптотическая форма которой содержит плоскую волну ($e^{i\mathbf{pr}}$) и наряду с ней сходящуюся сферическую (см. III, § 136, где такая функция обозначалась через $\psi_{\mathbf{p}}^{(-)}$). В силу правила отбора по l переход из s-состояния возможен лишь в p-состояние (дипольный случай). Поэтому в разложении [1])

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(-)} = \frac{1}{2p} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) e^{-i\delta_l} R_{pl}(r) P_l(\mathbf{n}\mathbf{n}_1) \tag{56.7}$$

($\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}/r$) достаточно оставить лишь член с $l = 1$. Опустив несущественные фазовые множители, получим

$$\psi' = \frac{3}{2p} (\mathbf{n}\mathbf{n}_1) R_{pl}(r). \tag{56.8}$$

С функциями ψ и ψ' из (56.6), (56.8) имеем

$$\mathbf{e}\mathbf{v}_{fi} = \frac{3(Ze^2 m)^{5/2}}{2\sqrt{\pi} mp} \iint (\mathbf{n}\mathbf{n}_1)(\mathbf{n}_1\mathbf{e}) e^{-Ze^2 mr} R_{p1}(r) do_1 \cdot r^2 dr =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}(Ze^2 m)^{5/2}}{pm} \int_0^{\infty} r^2 e^{-Ze^2 mr} R_{p1}(r) dr.$$

Согласно формулам (36.18) и (36.24) (см. III) радиальная функция (в принятых здесь единицах)

$$R_{pl} = \frac{\sqrt{8\pi} Ze^2 m}{3} \sqrt{\frac{1+\nu^2}{\nu(1-e^{-2\pi\nu})}} pre^{-ipr} F(2+i\nu, 4, 2ipr),$$

где обозначено:

$$\nu = \frac{Ze^2 m}{p} \left(= \frac{Ze^2}{\hbar v} \right). \tag{56.9}$$

[1]) Ниже в этом параграфе p обозначает $|\mathbf{p}|$.

Нужный нам интеграл вычисляется с помощью формулы

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} z^{\gamma-1} F(\alpha, \gamma, kz) dz = \Gamma(\gamma)\lambda^{\alpha-\gamma}(\lambda - k)^{-\alpha}$$

(см. III, (f. 3)). Заметив также, что

$$\left(\frac{\nu + i}{\nu - i}\right)^{i\nu} = e^{-2\nu \operatorname{arcctg} \nu},$$

получим

$$\mathbf{ev}_{fi} = \frac{2^{7/2}\pi\nu^3(\mathbf{ne})}{\sqrt{p}m(1+\nu^2)^{3/2}} \frac{e^{-2\nu \operatorname{arcctg} \nu}}{\sqrt{1 - e^{-2\pi\nu}}}.$$

Энергия ионизации с основного уровня атома водорода (или водородоподобного иона) $I = Z^2e^4m/2$. Поэтому

$$\omega = \frac{p^2}{2m} + I = \frac{p^2}{2m}(1 + \nu^2). \tag{56.10}$$

Учитывая это соотношение, пишем окончательное выражение для сечения фотоэффекта с испусканием электрона в элемент телесного угла do:

$$d\sigma = 2^7\pi\alpha a^2 \left(\frac{I}{\hbar\omega}\right)^4 \frac{e^{-4\nu \operatorname{arcctg} \nu}}{1 - e^{-2\pi\nu}} (\mathbf{ne})^2 do, \tag{56.11}$$

где $a = \hbar^2/(mZe^2) = a_0/Z$ (здесь и ниже — обычные единицы). Отметим, что угловое распределение фотоэлектронов определяется множителем $(\mathbf{ne})^2$. Он максимален в направлениях, параллельных направлению поляризации падающих фотонов, и обращается в нуль в перпендикулярных вектору $\mathbf{e}$ направлениях, в том числе в направлении падения. Для неполяризованных фотонов формула (56.11) должна быть усреднена по направлениям $\mathbf{e}$, что сводится к замене

$$(\mathbf{ne})^2 \to \frac{1}{2}[\mathbf{n}_0\mathbf{n}]^2,$$

где $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}/k$ (см. (45.4б)).

Интегрирование же формулы (56.11) по углам дает полное сечение фотоэффекта:

$$\sigma = \frac{2^9\pi^2}{3}\alpha a^2 \left(\frac{I}{\hbar\omega}\right)^4 \frac{e^{-4\nu \operatorname{arcctg} \nu}}{1 - e^{-2\pi\nu}} \tag{56.12}$$

(*M. Stobbe*, 1930).

Предельное значение σ при $\hbar\omega \to I$ (т. е. $\nu \to \infty$):

$$\sigma = \frac{2^9\pi^2}{3e^4}\alpha a^2 = \frac{2^9\pi^2}{3e^4}\frac{\alpha a_0^2}{Z^2} = 0{,}23\frac{a_0^2}{Z^2} \tag{56.13}$$

(в знаменателе $e = 2{,}71\ldots!$). Как и должно быть для реакции с образованием заряженных частиц (см. III, § 147), сечение фотоэффекта вблизи его порога стремится к постоянному пределу.

Случай же $\hbar\omega \gg I$ (причем по-прежнему $\hbar\omega \ll mc^2$) отвечает борновскому приближению ($\nu = Ze^2/(\hbar v) \ll 1$). Формула (56.12) принимает вид

$$\sigma = \frac{2^8\pi}{3}\alpha a_0^2 Z^5 \left(\frac{I_0}{\hbar\omega}\right)^{7/2} \tag{56.14}$$

($I_0 = e^4 m/(2\hbar^2)$ — энергия ионизации атома водорода).

Процессом, обратным фотоэффекту, является радиационная рекомбинация электрона с неподвижным ионом. Сечение этого процесса ($\sigma_{\text{рек}}$) можно найти по сечению фотоэффекта ($\sigma_{\text{ф}}$) с помощью принципа детального равновесия (III, § 144). Согласно этому принципу сечения процессов $i \to f$ и $f \to i$ (с двумя частицами в каждом из состояний i и f) связаны соотношением

$$g_i p_i^2 \sigma_{i\to f} = g_f p_f^2 \sigma_{f\to i},$$

где p_i, p_f — импульсы относительного движения частиц, а g_i, g_f — спиновые статистические веса состояний i и f. Учитывая также, что для фотона $g = 2$ (два направления поляризации), а статистический вес свободного электрона и иона равен статистическому весу основного состояния атома водорода, получаем для этого состояния

$$\sigma_{\text{рек}} = \sigma_{\text{ф}} \frac{2\mathbf{k}^2}{\mathbf{p}^2} \tag{56.15}$$

($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс падающего электрона, $\mathbf{k}$ — импульс испускаемого фотона).

Задачи

1. Получить формулу (56.14) путем прямого использования борновского приближения в нерелятивистском случае.

Решение. В борновском приближении в качестве ψ' в формуле (56.5) надо писать просто плоскую волну $\psi' = e^{i\mathbf{pr}}$, а ψ — по-прежнему функция (56.6). Тогда

$$\mathbf{v}_{fi} = \mathbf{v}_{if} = \frac{1}{m}\int \psi\hat{\mathbf{p}}\psi' d^3x = \frac{\mathbf{p}}{m}\frac{(Ze^2m)^{3/2}}{\sqrt{\pi}}(e^{-Ze^2mr})_{\mathbf{p}}.$$

Фурье-компонента дается формулой (57.6б), так что

$$\mathbf{v}_{fi} \approx 8\sqrt{\pi}p^{-3}m^{3/2}(Ze^2)^{5/2}\mathbf{n}.$$

Подставив в (56.5) и проинтегрировав по do, получим (56.14) (при этом, с достаточной точностью, $p^2/(2m) \approx \omega$).

2. Определить полное сечение радиационной рекомбинации быстрого нерелятивистского электрона ($I \ll mv^2 \ll mc^2$) с ядром (заряд $Z \ll 137$).

Р е ш е н и е. Сечение захвата на K-оболочку (главное квантовое число $n = 1$) получается подстановкой (56.14) в (56.15):

$$\sigma_1^{\text{рек}} = \frac{2^7\pi}{3} Z^5 \alpha^3 a_0^2 \left(\frac{I_0}{\varepsilon}\right)^{5/2}$$

($\varepsilon = mv^2/2$ — энергия падающего электрона; $\hbar\omega \approx \varepsilon$). Из других состояний образующегося атома существенны лишь s-состояния: при вычислении матричного элемента в борновском приближении существенны значения волновой функции связанного состояния при малых r (как это будет видно из вычислений в § 57), а при $l > 0$ эти значения малы по сравнению со значениями функций с $l = 0$; при этом достаточно учитывать два первых члена разложения ψ по степеням r. Для состояний с $l = 0$ и произвольным n эти члены

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi} a^{3/2} n^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{a}\right),$$

т. е. содержат n лишь в виде общего множителя $n^{-3/2}$ (написанное выражение получается разложением функции (36.13) (см. III)). Поэтому полное сечение рекомбинации

$$\sigma^{\text{рек}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{\text{рек}} = \sigma_1^{\text{рек}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)\sigma_1^{\text{рек}}$$

(значение ζ-функции: $\zeta(3) = 1{,}202$).

§ 57. Фотоэффект. Релятивистский случай

Обратимся к случаю

$$\omega \gg I. \tag{57.1}$$

При этом также $\varepsilon = \omega - I \gg I$, и потому влияние кулонова поля ядра на волновую функцию фотоэлектрона (ψ') может быть учтено с помощью теории возмущений. Пишем ψ' в виде

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} (u' e^{i\mathbf{pr}} + \psi^{(1)}). \tag{57.2}$$

Фотоэлектрон может быть релятивистским; поэтому невозмущенная функция в (57.2) написана в виде релятивистской плоской волны (23.1).

Хотя в начальном состоянии электрон нерелятивистский, в его волновой функций ψ тем не менее должна быть (по выясняющимся ниже причинам) учтена релятивистская поправка ($\sim Ze^2$). Такая функция дается формулой (см. задачу к § 39)

$$\psi = \left(1 - \frac{i}{2m}\gamma^0 \boldsymbol{\gamma}\nabla\right) \frac{u}{\sqrt{2m}} \psi_{\text{нр}}. \tag{57.3}$$

где $\psi_{\text{нр}}$ — нерелятивистская функция связанного состояния (56.6), а u — биспинорная амплитуда покоящегося электрона, нормированная принятым нами условием $\overline{u}u = 2m$.

Подставим функции (57.2), (57.3) в матричный элемент (56.2) [1]):

$$M_{fi}=\frac{1}{2\sqrt{m\varepsilon}}\int\Big\{\overline{u}'(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{e})\Big[\Big(1-\frac{i}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\nabla\Big)u\psi_{\text{нр}}\Big]e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\mathbf{r}}+ \\ +\overline{\psi}^{(1)}(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{e})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}u\psi_{\text{нр}}\Big\}d^3x. \quad (57.4)$$

Имея в виду получить первый член разложения этой величины по Ze^2, мы можем во втором члене в фигурных скобках заменить $\psi_{\text{нр}}$ просто постоянной $(Ze^2m)^{3/2}/\sqrt{\pi}$. Первый же член в результате такой замены обратился бы (при $\mathbf{p}-\mathbf{k}\neq 0$) в нуль (именно поэтому в ψ необходимо учитывать также и первую релятивистскую поправку, пропорциональную Ze^2; при $v\sim 1$ эта поправка дает вклад в сечение того же порядка, что и следующий член разложения $\psi_{\text{нр}}$ по Ze^2).

В первом члене в (57.4) производим интегрирование по частям, переводя действие оператора ∇ с $\psi_{\text{нр}}$ на экспоненциальный множитель. В результате получим

$$M_{fi}=\frac{(Ze^2m)^{3/2}}{2(\pi m\varepsilon)^{1/2}}\Big\{\overline{u}'(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{e})\Big[1+\frac{1}{2m}\gamma^0\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\Big]u\left(e^{-Ze^2mr}\right)_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}+ \\ +\overline{\psi}^{(1)}_{-\mathbf{k}}(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{e})u\Big\}, \quad (57.5)$$

где векторный индекс означает пространственную компоненту Фурье. С точностью до члена $\sim Ze^2$ [2])

$$(e^{-Ze^2mr})_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}=\frac{8\pi Ze^2m}{(\mathbf{p}-\mathbf{k})^4}. \quad (57.6)$$

---

[1]) Функция (57.3) была получена для расстояний $r\sim 1/(mZe^2)$, на которых поправочный член в ней относительного порядка величины Ze^2. Но для основного состояния (а также и для всех вообще s-состояний) формула (57.3) пригодна для любых r, поскольку производная от чисто экспоненциальной функции (56.6) (а с нею и поправочный член в (57.3)) всегда пропорциональна Ze^2. Это обстоятельство позволяет воспользоваться формулой (57.3) в рассматриваемой задаче, в которой существенны малые r. (При $v\sim 1$ существенны $r\sim 1/m$.)

[2]) Взяв компоненту Фурье от обеих сторон равенства

$$(\Delta-\lambda^2)\frac{e^{-\lambda r}}{r}=-4\pi\delta(\mathbf{r}),$$

получим

$$\left(\frac{e^{-\lambda r}}{r}\right)_{\mathbf{q}}=\frac{4\pi}{\mathbf{q}^2+\lambda^2}. \quad (57.6\text{а})$$

Дифференцирование этого выражения по параметру λ дает

$$(e^{-\lambda r})_{\mathbf{q}}=\frac{8\pi\lambda}{(\mathbf{q}^2+\lambda^2)^2}. \quad (57.6\text{б})$$

Для вычисления же компоненты Фурье $\psi^{(1)}_{\mathbf{k}}$ пишем уравнение, которому удовлетворяет функция $\psi^{(1)}$:

$$(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - m)\psi^{(1)} = e(\gamma^\mu A_\mu)u' e^{i\mathbf{pr}} = -\frac{Ze^2}{r}\gamma^0 u' e^{i\mathbf{pr}}$$

(оно получается подстановкой (57.2) в (32.1)). Применив к обеим сторонам этого уравнения оператор $(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla + m)$, получим

$$(\Delta + \mathbf{p}^2)\psi^{(1)} = -Ze^2(\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla + m)(\gamma^0 u')\frac{1}{r}e^{i\mathbf{pr}}.$$

Умножим это уравнение на $e^{-i\mathbf{kr}}$ и проинтегрируем по d^3x, причем в членах с Δ и ∇ производим обычным образом интегрирование по частям:

$$(\mathbf{p}^2 - \mathbf{k}^2)\psi^{(1)}_{\mathbf{k}} = -Ze^2(\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{k} + m)(\gamma^0 u')\left(\frac{1}{r}\right)_{\mathbf{k}-\mathbf{p}} =$$
$$= -Ze^2(2\varepsilon\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}-\mathbf{p}))(\gamma^0 u')\frac{4\pi}{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}.$$

В последней строке учтено, что амплитуда u' удовлетворяет уравнению

$$(\varepsilon\gamma^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - m)u' = 0, \quad \text{или} \quad (\varepsilon\gamma^0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} - m)\gamma^0 u' = 0.$$

Отсюда находим

$$\overline{\psi}^{(1)}_{-\mathbf{k}} = \psi^{(1)*}_{\mathbf{k}}\gamma^0 = 4\pi Ze^2\overline{u}'\frac{2\varepsilon\gamma^0 + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{k}-\mathbf{p})}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2)(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}\gamma^0. \qquad (57.7)$$

Подставив (57.6), (57.7) в матричный элемент (57.5), представим его в виде

$$M_{fi} = \frac{4\pi^{1/2}(Ze^2m)^{5/2}}{(\varepsilon m)^{1/2}(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}\overline{u}' A u,$$

где

$$A = a(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{e}) + (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{e})\gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{b}) + (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{c})\gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{e}),$$
$$a = \frac{1}{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2} + \frac{\varepsilon}{m}\frac{1}{\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2}, \quad \mathbf{b} = -\frac{\mathbf{k}-\mathbf{p}}{2m(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2}, \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{k}-\mathbf{p}}{2m(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2)}.$$

Сечение

$$d\sigma = \frac{8e^2(Ze^2m)^5|\mathbf{p}|}{\omega(\mathbf{k}-\mathbf{p})^4 m}(\overline{u}' A u)(\overline{u}\overline{A}u')do,$$

где $\overline{A} = \gamma^0 A^+ \gamma^0$ (см. § 65). Это выражение надо еще просуммировать по конечным и усреднить по начальным направлениям спина электрона. Эти действия производятся по описанным ниже, в § 65, правилам с помощью поляризационных матриц плотности начального и конечного состояний:

$$\rho = \frac{m}{2}(\gamma^0 + 1), \quad \rho' = \frac{1}{2}(\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + m)$$

(в начальном состоянии $\mathbf{p} = 0$, $\varepsilon = m$). Они приводят к выражению

$$d\sigma = \frac{16e^2(Ze^2m)^5|\mathbf{p}|}{m\omega(\mathbf{k}-\mathbf{p})^4}\,\mathrm{Sp}\,(\rho' A\rho\overline{A})do.$$

Вычисление следа (с использованием формул (22.22)) представляет собой чисто алгебраическую операцию и приводит к следующему результату:

$$\mathrm{Sp}\,(\rho' A\rho\overline{A}) = \frac{m}{\varepsilon+m}[a\mathbf{p} - (\mathbf{b}-\mathbf{c})(\varepsilon+m)]^2 + \\ + 4m(\mathbf{be})[(\varepsilon+m)(\mathbf{ce}) + a(\mathbf{pe})]$$

(вектор $\mathbf{e}$ предполагается вещественным — линейная поляризация фотона).

Придадим формуле сечения фотоэффекта окончательный вид, введя полярный угол θ и азимут φ направления $\mathbf{p}$ относительно направления $\mathbf{k}$ в качестве оси z и плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}$ в качестве плоскости xz (так что $\mathbf{pe} = |\mathbf{p}|\cos\varphi\sin\theta$). При $\omega \gg I$ сохранение энергии можно записать в виде $\varepsilon - m = \omega$ (вместо $\varepsilon - m = \omega - I$). Легко проверить, что тогда

$$\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2 = -2m(\varepsilon - m), \quad (\mathbf{k}-\mathbf{p})^2 = 2\varepsilon(\varepsilon-m)(1 - v\cos\theta),$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\varepsilon$ — скорость фотоэлектрона. После простых преобразований получим окончательно

$$d\sigma = Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{v^3(1-v^2)^3\sin^2\theta}{(1-\sqrt{1-v^2})^5(1-v\cos\theta)^4} \times \\ \times \left\{ \frac{(1-\sqrt{1-v^2})^2}{2(1-v^2)^{3/2}}(1 - v\cos\theta) + \right. \\ \left. + \left[2 - \frac{(1-\sqrt{1-v^2})(1-v\cos\theta)}{1-v^2}\right]\cos^2\varphi\right\} do, \quad (57.8)$$

где $r_e = e^2/m$.

В ультрарелятивистском случае ($\varepsilon \gg m$) сечение фотоэффекта имеет резкий максимум при малых углах ($\theta \sim \sqrt{1-v^2}$), т. е. электроны испускаются преимущественно в направлении падения фотона. Вблизи максимума пишем

$$1 - v\cos\theta \approx \frac{1}{2}[(1-v^2) + \theta^2],$$

и главные члены в (57.8) дают

$$d\sigma \approx 4Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{(1-v^2)^{3/2}}{(1-v^2+\theta^2)^3}\, d\theta\, d\varphi. \quad (57.9)$$

Элементарное, хотя и довольно длинное интегрирование выражения (57.8) по углам приводит к следующей формуле для

полного сечения (*F. Sauter*, 1931):

$$\sigma = 2\pi Z^5\alpha^4 r_e^2 \frac{(\gamma^2-1)^{3/2}}{(\gamma-1)^5} \times$$
$$\times \left\{\frac{3}{4} + \frac{\gamma(\gamma-2)}{\gamma+1}\left(1 - \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma^2-1}} \ln\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}}\right)\right\}, \quad (57.10)$$

где для краткости введен «лоренцев множитель»

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\varepsilon}{m} \approx \frac{m+\omega}{m}. \quad (57.11)$$

В ультрарелятивистском случае эта формула сводится к простому выражению

$$\sigma = 2\pi Z^5\alpha^4 r_e^2/\gamma. \quad (57.12)$$

В случае же $I \ll \omega \ll m$ переход в (57.10) к пределу малых $\gamma - 1$ приводит к известному уже нам результату (56.14).

§ 58. Фоторасщепление дейтрона

Характерной особенностью дейтрона является малость его энергии связи (по сравнению с глубиной потенциальной ямы). Это обстоятельство позволяет описывать происходящие с участием дейтрона реакции без детального знания хода ядерных сил, с помощью одной лишь энергии связи (см. III, § 133). При этом предполагается, что длины волн сталкивающихся частиц велики по сравнению с радиусом действия ядерных сил a.

Это относится и к расщеплению дейтрона γ-квантами, для которых $ka \ll 1$. Предполагается также, что и $pa \ll 1$, где $\mathbf{p}$ — импульс относительного движения освободившихся нейтрона и протона (это условие более сильное, чем предыдущее [1]).

Исходим из нерелятивистской формулы для сечения фотоэффекта (56.5), проинтегрировав ее по направлениям:

$$\sigma = \frac{e^2 p}{2\pi\omega}\frac{M}{2}\frac{4\pi}{3}|(\mathbf{v}_p)_{fi}|^2.$$

Здесь $\mathbf{p}$ — импульс относительного движения протона и нейтрона [2], а m в (56.5) заменено их приведенной массой $M/2$ (где M — масса нуклона). Матричный элемент берется от скорости протона $\mathbf{v}_p$, поскольку лишь протон взаимодействует с фотоном. Выразив $\mathbf{v}_p$ через импульс $\mathbf{p}(\mathbf{v}_p = \mathbf{v}/2 = \mathbf{p}/M)$, получим

$$\sigma^{(э)} = \frac{e^2 p}{3M\omega}|\mathbf{p}_{fi}|^2. \quad (58.1)$$

---

[1] Энергия фотона, при которой $pa \approx 1$ ($a = 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ см), составляет 15 МэВ.

[2] В этом параграфе p обозначает $|\mathbf{p}|$.

Индекс (э) указывает, что эта формула соответствует электрически-дипольным переходам: $e\mathbf{p}/M = e\mathbf{v}_p = \mathbf{d}$, так что $e\mathbf{p}_{fi}/M = i\omega\mathbf{d}_{fi}$.

Нормированная волновая функция начального (основного) состояния дейтрона:

$$\psi = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\frac{e^{-\varkappa r}}{r}, \quad \varkappa = \sqrt{MI}, \tag{58.2}$$

где $I = 2{,}23$ МэВ — энергия связи (см. III, § 133) [1]. В качестве же волновой функции конечного состояния можно взять функцию свободного движения, т. е. плоскую волну

$$\psi' = e^{i\mathbf{pr}}. \tag{58.3}$$

Причина заключается в том, что в рассматриваемой теории «размер дейтрона» $1/\varkappa$ считается большим по сравнению с эффективным радиусом взаимодействия a. Поэтому взаимодействие между протоном и нейтроном надо учитывать лишь в S-состояниях, пренебрегая им в состояниях с $l \neq 0$, волновые функции которых малы на малых расстояниях. Между тем, согласно правилам отбора, электрические дипольные переходы между двумя S-состояниями (основным состоянием и S-состоянием непрерывного спектра) запрещены. Это и дает возможность в данном случае пренебречь взаимодействием нуклонов в конечном состоянии.

Путем интегрирования по частям находим для матричного элемента

$$\mathbf{p}_{fi} = -i\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\int e^{-i\mathbf{pr}}\nabla\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\,d^3x = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\mathbf{p}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right)_{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\frac{4\pi\mathbf{p}}{p^2+\varkappa^2}$$

(см. примеч. на с. 246).

Заметив также равенство

$$\frac{1}{M}(\varkappa^2+\mathbf{p}^2) = I + \frac{\mathbf{p}^2}{M} = \omega,$$

[1]) Эта функция может быть уточнена введением поправки, связанной с конечностью a. Это достигается заменой нормировочного коэффициента в (58.2) коэффициентом

$$\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi(1-a\varkappa)}}$$

(см. III, (133.13)). Соответственно появится множитель $1/(1-a\varkappa)$ и в формулах для сечения. Фактически эта поправка не так мала: для основного состояния дейтрона $a\varkappa \approx 0{,}4$.

Основное состояние дейтрона является состоянием $^3S_1$ с малой «примесью» состояния $^3D_1$, связанной с действием тензорных ядерных сил (см. III, § 117). Этой примесью, а тем самым и тензорными силами мы будем пренебрегать.

выражающее сохранение энергии, получим окончательно сечение фоторасщепления в виде (в обычных единицах)

$$\sigma^{(\text{э})} = \frac{8\pi}{3}\alpha\frac{\hbar^2}{M}\frac{\sqrt{I}(\hbar\omega - I)^{3/2}}{(\hbar\omega)^3} \tag{58.4}$$

(*H. A. Bethe, R. Peierls*, 1935). Оно имеет максимум при $\hbar\omega = 2I$ и обращается в нуль при $\hbar\omega \to I$ и при $\hbar\omega \to \infty$.

Описываемое формулой (58.4) электрически-дипольное поглощение фотона не дает, однако, главного вклада в сечение вблизи порога фотоэффекта ($\hbar\omega$ близкие к I). Дело в том, что в этой области главный эффект должен происходить от переходов в S-состояние, которых в электрически-дипольном поглощении нет. Их нет также и в электрически-квадрупольном поглощении: хотя они не противоречат в этом случае правилу отбора по четности, но запрещены правилом отбора по орбитальному моменту (напомним, что мы пренебрегаем тензорными силами, без которых $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$ сохраняются по отдельности). Для вычисления сечения фоторасщепления вблизи порога надо поэтому рассмотреть магнитно-дипольное поглощение, для которого правила отбора допускают переходы между S-состояниями (*E. Fermi*, 1935).

Заменяя в формуле (58.1) электрический момент магнитным, имеем

$$\sigma^{(\text{м})} = \frac{1}{3}\omega M p|\boldsymbol{\mu}_{fi}|^2. \tag{58.5}$$

Магнитный момент орбитального движения не дает вклада в $\boldsymbol{\mu}_{fi}$, так как орбитальный момент $\mathbf{L}$ не имеет матричных элементов для переходов между S-состояниями. Спиновый магнитный момент

$$\boldsymbol{\mu} = 2\mu_p\mathbf{s}_p + 2\mu_n\mathbf{s}_n = 2(\mu_p - \mu_n)\mathbf{s}_p + 2\mu_n\mathbf{S},$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_n$, а μ_p, μ_n — магнитные моменты протона и нейтрона. В пренебрежении тензорными ядерными силами полный спин сохраняется, так что его оператор не дает переходов. Поэтому

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = 2(\mathbf{s}_p)_{fi}(\mu_p - \mu_n).$$

В том же приближении (без тензорных сил) спиновые и координатные переменные разделяются. Вместе с волновыми функциями представится в виде произведения спиновой и координатной частей также и матричный элемент

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = 2(\mu_p - \mu_n)\langle s_pS'M'|\mathbf{s}_p|s_pSM\rangle \int \psi'^*(r)\psi(r)d^3x.$$

Но наличие спин-спиновых ядерных сил приводит к тому, что волновое уравнение для координатных функций $\psi(r)$ содержит

в качестве параметра значение спина S. Если $S' = S$, то $\psi'(r)$ и $\psi(r)$ — собственные функции одного и того же оператора и поэтому ортогональны. Таким образом, из начального состояния ^3S фоторасщепление будет происходить лишь в состояние непрерывного спектра ^1S.

Квадрат $|\boldsymbol{\mu}_{fi}|^2$ в (58.5) должен быть, конечно, усреднен по проекциям M спина $\mathbf{S}$ в начальном состоянии. Таким образом, задача сводится к вычислению величины

$$\frac{1}{2S+1}\sum_M |\langle s_p S' M'|\mathbf{s}_p|s_p S M\rangle|^2,$$

причем $s_p = s_n = 1/2$, $S = 1$, $S' = 0$. По общим формулам для матричных элементов при сложении моментов эта величина равна

$$\frac{1}{(2S+1)(2S'+1)}|\langle s_p S'\|s_p\|s_p S\rangle|^2 =$$
$$= \begin{Bmatrix} s_p & S' & s_n \\ S & s_p & 1 \end{Bmatrix}^2 |\langle s_p\|s_p\|s_p\rangle|^2 = \frac{1}{6}|\langle s_p\|s_p\|s_p\rangle|^2$$

(использованы формулы III, (107.11), (109.3)). Приведенный матричный элемент

$$\langle s_p\|s_p\|s_p\rangle = \sqrt{s_p(s_p+1)(2s_p+1)} = \sqrt{3/2}.$$

Формула (58.5) принимает в результате вид

$$\sigma^{(\text{м})} = \frac{1}{3}\omega M p(\mu_p - \mu_n)^2 \left|\int \psi'^*\psi\, d^3x\right|^2. \tag{58.6}$$

Начальная функция ψ дается формулой (58.2). Конечная же функция

$$\psi' = \frac{1}{2p}R_{p0}(r).$$

Это — первый ($l = 0$) член разложения (56.7) функции, содержащей асимптотически плоскую и сходящуюся сферическую волны; опущен несущественный фазовый множитель. Поскольку интегрирование производится по области вне радиуса действия ядерных сил, радиальная функция

$$R_{p0}(r) = 2\frac{\sin(pr+\delta)}{r}.$$

Фаза δ связана с энергией виртуального уровня ($I_1 = 0{,}067$ МэВ) системы «протон+нейтрон» при $S = 0$:

$$\operatorname{ctg}\delta = \frac{\varkappa_1}{p}, \quad \varkappa_1 = \sqrt{MI_1}$$

(см. III, § 133). Теперь

$$\int \psi'^{*}\psi d^3x = (2\pi)^{3/2}\frac{\sqrt{\varkappa}}{p\pi}\,\mathrm{Im}\int e^{-\varkappa r+ipr}e^{i\delta}dr = (2\pi)^{3/2}\frac{\sqrt{\varkappa}}{p\pi}\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{i\delta}}{\varkappa - ip}.$$

После простых алгебраических преобразований получим следующее выражение для сечения фоторасщепления (в обычных единицах):

$$\sigma^{(\text{м})} = \frac{8\pi}{3\hbar c}(\mu_p - \mu_n)^2\frac{\sqrt{I(\hbar\omega - I)}(\sqrt{I} + \sqrt{I_1})^2}{\hbar\omega(\hbar\omega - I + I_1)}. \tag{58.7}$$

При $\hbar\omega \to I$ это сечение обращается в нуль как $\sqrt{\hbar\omega - I}$ — в соответствии с общими свойствами поведения сечений вблизи порога реакции (см. III, § 147).

Процессом, обратным фоторасщеплению, является радиационный захват протона нейтроном. Сечение захвата ($\sigma_\text{з}$) получается из сечения фотоэффекта ($\sigma_\text{ф}$) с помощью принципа детального равновесия (ср. вывод (56.15)). Спиновый статистический вес нейтрона и протона равен $2 \cdot 2 = 4$. Статистический же вес дейтрона (в состоянии с $S = 1$) и фотона равен $3 \cdot 2 = 6$. Поэтому

$$\sigma_\text{з} = \frac{3}{2}\frac{(\hbar\omega)^2}{c^2p^2}\sigma_\text{ф} = \frac{3(\hbar\omega)^2}{2Mc^2(\hbar\omega - I)}\sigma_\text{ф}. \tag{58.8}$$

Г Л А В А VI

РАССЕЯНИЕ СВЕТА

§ 59. Тензор рассеяния

Рассеяние фотона электронной системой (будем для определенности говорить об атоме) представляет собой поглощение начального фотона **k** с одновременным испусканием другого фотона **k**$'$. При этом атом может остаться либо на начальном, либо на каком-то другом дискретном уровне энергии. В первом случае частота фотона не меняется (*рэлеевское*, или *несмещенное рассеяние*), а во втором — меняется на величину

$$\omega' - \omega = E_1 - E_2, \tag{59.1}$$

где E_1, E_2 — начальная и конечная энергии атома (*комбинационное*, или *смещенное рассеяние*) [1]. Если начальное состояние атома является основным, то при комбинационном рассеянии $E_2 > E_1$, так что $\omega' < \omega$ — рассеяние происходит с уменьшением частоты (так называемый *стоксов* случай). При рассеянии же на возбужденном атоме возможен как стоксов, так и *антистоксов* ($\omega' > \omega$) случай.

Поскольку оператор электромагнитного возмущения не имеет матричных элементов для переходов с одновременным изменением двух фотонных чисел заполнения, эффект рассеяния появляется лишь во втором приближении теории возмущений. Его надо рассматривать как происходящий через определенные промежуточные состояния, которые могут быть двух типов:

I. Фотон **k** поглощается, атом переходит в одно из своих возможных состояний E_n; при последующем переходе в конечное состояние испускается фотон **k**$'$.

II. Испускается фотон **k**$'$, атом переходит в состояние E_n; при переходе в конечное состояние поглощается фотон **k**.

Роль матричного элемента для рассматриваемого процесса играет сумма (см. III, (43.7))

$$V_{21} = \sum_n{}' \left(\frac{V'_{2n} V_{n1}}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_n^{\mathrm{I}}} + \frac{V_{2n} V'_{n1}}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_n^{\mathrm{II}}} \right), \tag{59.2}$$

---

[1]) В этой главе величины, относящиеся к начальному и конечному состояниям рассеивающей системы, отмечены индексами 1 и 2.

где начальная энергия системы «атом+фотоны» $\mathcal{E}_1 = E_1 + \omega$, а энергии промежуточных состояний

$$\mathcal{E}_n^{\mathrm{I}} = E_n, \quad \mathcal{E}_n^{\mathrm{II}} = E_n + \omega + \omega',$$

$V_{..}$ — матричные элементы поглощения фотона $\mathbf{k}$, $V'_{..}$ — матричные элементы испускания фотона $\mathbf{k}'$; начальное состояние из суммирования по n исключается (что отмечено штрихом у знака суммы). Сечение рассеяния

$$d\sigma = 2\pi |V_{21}|^2 \frac{\omega'^2 do'}{(2\pi)^3}, \tag{59.3}$$

где do' — элемент телесного угла для направлений $\mathbf{k}'$. Энергия света dI', рассеянного (в 1 с) в телесный угол do', выражается через интенсивность I (плотность потока энергии) падающего света формулой

$$dI' = I\frac{\omega'}{\omega} d\sigma.$$

Будем считать, что длины волн начального и конечного фотонов велики по сравнению с размерами a рассеивающей системы. Соответственно этому рассматриваем все переходы в дипольном приближении. Если описывать состояния фотонов плоскими волнами, то этому приближению отвечает замена множителей $e^{i\mathbf{kr}}$ единицей. Тогда волновые функции фотонов (в трехмерно поперечной калибровке)

$$\mathbf{A}_{\mathbf{e}\omega} = \sqrt{4\pi}\frac{\mathbf{e}}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{A}_{\mathbf{e}'\omega'} = \sqrt{4\pi}\frac{\mathbf{e}'}{\sqrt{2\omega'}} e^{-i\omega' t}.$$

В рассматриваемых условиях оператор электромагнитного взаимодействия может быть написан в виде

$$\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{E}}, \tag{59.4}$$

где $\hat{\mathbf{E}} = -\hat{\dot{\mathbf{A}}}$ — оператор напряженности поля, $\hat{\mathbf{d}}$ — оператор дипольного момента атома (аналогично классическому выражению энергии системы малых размеров в электрическом поле — см. II, § 42). Его матричные элементы:

$$V_{n1} = -i\sqrt{2\pi\omega}\,(\mathbf{e}\mathbf{d}_{n1}), \quad V'_{2n} = i\sqrt{2\pi\omega'}\,(\mathbf{e}'^*\mathbf{d}_{2n}).$$

Подставив эти выражения в (59.2), (59.3), получим сечение рассеяния (пишем его в обычных единицах) [1]:

$$d\sigma = \left| \sum_n \left\{ \frac{(\mathbf{d}_{2n}\mathbf{e}'^*)(\mathbf{d}_{n1}\mathbf{e})}{\omega_{n1} - \omega - i0} + \frac{(\mathbf{d}_{2n}\mathbf{e})(\mathbf{d}_{n1}\mathbf{e}'^*)}{\omega_{n1} + \omega - i0} \right\} \right|^2 \frac{\omega\omega'^3}{\hbar^2 c^4} do', \tag{59.5}$$

$$\hbar\omega_{n1} = E_n - E_1, \quad \omega' - \omega = \omega_{12}.$$

[1] Эта формула была впервые получена *Крамерсом* и *Гейзенбергом* (*H. A. Kramers*, *W. Heisenberg*, 1925) еще до создания квантовой механики.

Суммирование производится по всем возможным состояниям атома, включая состояния непрерывного спектра (при этом состояния 1 и 2 автоматически выпадают из суммирования, поскольку диагональные матричные элементы $\mathbf{d}_{11} = \mathbf{d}_{22} = 0$). Бесконечно малые мнимые добавки в знаменателях соответствуют обычному правилу обхода полюса в теории возмущений (см. III, § 43): к энергиям промежуточных состояний E_n, по которым происходит суммирование, добавляется бесконечно малая отрицательная мнимая часть. Правило обхода существенно, когда полюсы выражения (59.5) по переменной E_n попадают в область непрерывного спектра (так, если состояние 1 — основное состояние атома, то для этого $\hbar\omega$ должно превышать порог ионизации атома) [1].

Введем обозначение (обычные единицы) [2]

$$(c_{ik})_{21} = \frac{1}{\hbar}\sum_n \left[\frac{(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega - i0} + \frac{(d_k)_{2n}(d_i)_{n1}}{\omega_{n1} + \omega' - i0}\right] \tag{59.6}$$

($i, k = x, y, z$ — трехмерные векторные индексы). С его помощью формула (59.5) перепишется в виде

$$d\sigma = \frac{\omega(\omega+\omega_{12})^3}{c^4}|(c_{ik})_{21}e_i'^* e_k|^2 do'. \tag{59.7}$$

Обозначение (59.6) оправдано тем, что эту сумму действительно можно представить как матричный элемент некоторого тензора. В этом проще всего убедиться, введя векторную величину $\mathbf{b}$, оператор которой удовлетворяет уравнению

$$i\hat{\dot{\mathbf{b}}} + \omega\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{d}}.$$

Ее матричные элементы

$$\mathbf{b}_{n1} = \frac{\mathbf{d}_{n1}}{\omega - \omega_{n1}}, \quad \mathbf{b}_{2n} = \frac{\mathbf{d}_{2n}}{\omega + \omega_{n2}},$$

так что

$$(c_{ik})_{21} = (b_k d_i - d_i b_k)_{21}. \tag{59.8}$$

Матричные элементы $(c_{ik})_{21}$ будем называть *тензором рассеяния* света.

Из сказанного следует, что правила отбора для рассеяния совпадают с правилами отбора для матричных элементов произвольного тензора второго ранга. Сразу же отметим, что если система имеет центр симметрии (так что ее состояния могут

[1]) Для молекулы роль порога ионизации в данном аспекте играет порог диссоциации на атомы.

[2]) Большинство результатов, излагаемых в § 59–61, принадлежит *Плачеку* (*G. Placzek*, 1931–1933).

классифицироваться по четности), то переходы возможны лишь между состояниями одинаковой четности (в том числе без изменения состояния). Это правило противоположно правилу отбора по четности при излучении (электрически-дипольном), так что имеет место альтернативный запрет: переходы, разрешенные в излучении, запрещены в рассеянии, а разрешенные в рассеянии — запрещены в излучении.

Разложим тензор c_{ik} на неприводимые части:

$$c_{ik} = c^0\delta_{ik} + c^s_{ik} + c^a_{ik}, \tag{59.9}$$

где

$$c^0 = \frac{1}{3}c_{ii}, \quad c^s_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik} + c_{ki}) - c^0\delta_{ik}, \quad c^a_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik} - c_{ki}) \tag{59.10}$$

— соответственно скаляр, симметричный тензор (с равным нулю следом) и антисимметричный тензор. Их матричные элементы:

$$(c^0)_{21} = \frac{1}{3}\sum_n \frac{\omega_{n1} + \omega_{n2}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)}(d_i)_{2n}(d_i)_{n1}, \tag{59.11}$$

$$(c^s_{ik})_{21} = \frac{1}{2}\sum_n \frac{\omega_{n1} + \omega_{n2}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)}[(d_i)_{2n}(d_k)_{n1} + (d_k)_{2n}(d_i)_{n1}] - (c^0)_{21}\delta_{ik}, \tag{59.12}$$

$$(c^a_{ik})_{21} = \frac{2\omega + \omega_{12}}{2}\sum_n \frac{(d_i)_{2n}(d_k)_{n1} - (d_k)_{2n}(d_i)_{n1}}{(\omega_{n1} - \omega)(\omega_{n2} + \omega)} \tag{59.13}$$

(знаки обхода полюсов для краткости опускаем).

Рассмотрим некоторые свойства тензора рассеяния в предельных случаях малых и больших частот фотона [1].

Для несмещенного рассеяния ($\omega_{12} = 0$) антисимметричная часть тензора при $\omega \to 0$ обращается в нуль (из-за множителя ω перед суммой в (59.13)). Скалярная же и симметричная части тензора рассеяния стремятся при $\omega \to 0$ к конечным пределам. Соответственно сечение при малых ω пропорционально ω^4.

В обратном случае, когда частота ω велика по сравнению со всеми существенными в (59.6) частотами ω_{n1}, ω_{n2} (но, конечно, по-прежнему длина волны $\gg a$), мы должны вернуться к формулам классической теории. Первый член разложения тензора рассеяния по степеням $1/\omega$ равен

$$\frac{1}{\omega}\sum_n [(d_k)_{2n}(d_i)_{n1} - (d_i)_{2n}(d_k)_{n1}] = \frac{1}{\omega}(d_k d_i - d_i d_k)_{21}$$

[1]) Случай резонанса (когда ω близко к одной из частот ω_{n1} или ω_{2n}) будет рассмотрен в § 63.

и обращается в нуль в силу коммутативности $\widehat{d}_i$, $\widehat{d}_k$. Следующий член разложения

$$(c_{ik})_{21} = \frac{1}{\omega^2}\sum_n [\omega_{2n}(d_k)_{2n}(d_i)_{n1} - (d_i)_{2n}\omega_{n1}(d_k)_{n1}] =$$

$$= \frac{1}{i\omega^2}(\dot{d}_k d_i - d_i\dot{d}_k)_{21}.$$

Используя определение $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$ (сумма по всем электронам в атоме) и правила коммутации между импульсами и координатами, получаем

$$(c_{ik})_{11} = -\frac{Ze^2}{m\omega^2}\delta_{ik}, \quad (c_{ik})_{21} = 0, \tag{59.14}$$

где Z — общее число электронов в системе, m — масса электрона. Таким образом, в пределе больших частот в тензоре рассеяния остается лишь скалярная часть, причем рассеяние происходит без изменения состояния системы (т. е. рассеяние целиком когерентно — см. ниже). Сечение рассеяния в этом случае

$$d\sigma = r_e^2 Z^2 |\mathbf{e}'^*\mathbf{e}|^2 do', \tag{59.15}$$

где $r_e = e^2/m$. После суммирования по поляризациям конечного фотона получим формулу

$$d\sigma = r_e^2 Z^2\{1 - (\mathbf{en}')^2\}do' = r_e^2 Z^2 \sin^2\theta \cdot do', \tag{59.16}$$

действительно совпадающую с классической формулой Томсона (см. II, (80.7); θ — угол между направлением рассеяния и вектором поляризации падающего фотона).

Рассмотрим рассеяние света совокупностью N одинаковых атомов, расположенных в объеме, размеры которого малы по сравнению с длиной волны. Тензор рассеяния такой совокупностью будет равен сумме тензоров рассеяния каждым из атомов. При этом, однако, надо учесть, что волновые функции (с помощью которых вычисляются матричные элементы дипольного момента) для нескольких одинаковых атомов, рассматриваемых одновременно, нельзя считать просто одинаковыми. Волновые функции по самому своему существу определены лишь с точностью до произвольного фазового множителя, и эти множители у каждого атома свои. Сечение рассеяния должно быть усреднено по фазовым множителям каждого атома независимо.

Тензор рассеяния $(c_{ik})_{21}$ каждого атома содержит множитель $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$, где φ_1, φ_2 — фазы волновых функций начального и конечного состояний. Для смещенного рассеяния состояния 1 и 2 различны, и этот множитель отличен от единицы. В квадрате модуля

$$|e_i'^* e_k \sum (c_{ik})_{21}|^2$$

(сумма — по всем N атомам) произведения членов суммы, относящихся к различным атомам, будут содержать фазовые множители, которые обратятся в нуль при независимом усреднении по фазам атомов; останутся лишь квадраты модулей каждого из членов. Это значит, что полное сечение рассеяния N атомами получится умножением на N сечения рассеяния на одном атоме (рассеяние некогерентно).

Если же начальное и конечное состояния атома совпадают, то множители $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = 1$. Множителем N будет отличаться в этом случае амплитуда рассеяния совокупностью атомов от амплитуды рассеяния на одном атоме, сечение же рассеяния — соответственно множителем N^2 (рассеяние когерентно) [1]. Если уровень энергии атома не вырожден, то несмещенное рассеяние будет, таким образом, полностью когерентным. Если же уровень энергии вырожден, то будет иметься также некогерентное несмещенное рассеяние, происходящее от переходов атома между различными взаимно вырожденными состояниями. Отметим, что последнее представляет собой чисто квантовый эффект: в классической теории рассеяние без изменения частоты всегда когерентно.

Тензор когерентного рассеяния дается диагональным матричным элементом $(c_{ik})_{11}$; обозначим его через α_{ik} (опустив для упрощения обозначений индекс, который должен был бы указывать состояние атома). Согласно (59.6)

$$\alpha_{ik}(\omega) \equiv (c_{ik})_{11} = \sum_n \left[\frac{(d_i)_{1n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega - i0} + \frac{(d_k)_{1n}(d_i)_{n1}}{\omega_{n1} + \omega - i0}\right]. \qquad (59.17)$$

Это выражение можно представить также в виде

$$\alpha_{ik}(\omega) = \frac{e^2}{m\omega^2}\left\{-Z\delta_{ik} + \frac{1}{m}\sum_n \left[\frac{(p_i)_{1n}(p_k)_{n1}}{\omega_{n1} - \omega - i0} + \frac{(p_k)_{1n}(p_i)_{n1}}{\omega_{n1} + \omega - i0}\right]\right\}, \qquad (59.18)$$

где выделено предельное выражение (59.14). Здесь $\mathbf{p}$ — суммарный импульс электронов атома; в эквивалентности этих формул легко убедиться, заметив, что матричные элементы импульса и дипольного момента связаны друг с другом соотношениями

$$e\mathbf{p}_{1n}/m = i\omega_{1n}\mathbf{d}_{1n},$$

и учтя соотношения, использованные при выводе (59.14).

Если сумма или разность $E_1 \pm \omega$ не совпадают ни с одним из уровней энергии атома E_n (в том числе в области непрерывного

[1]) Заметим, что множитель Z^2 в формулах (59.15), (59.16) имеет ту же природу: сечение когерентного рассеяния на Z электронах одного атома в Z^2 раз больше сечения рассеяния на одном электроне.

спектра), можно опустить члены $i0$ в знаменателях. Заметив, что $p_{1n}^* = p_{n1}$, найдем тогда, что тензор α_{ik} эрмитов [1]:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}^*. \tag{59.19}$$

Это означает, что его скалярная и симметричная части вещественны, а антисимметричная — мнима. Отметим, что антисимметричная часть заведомо обращается в нуль, если атом находится в невырожденном состоянии; волновая функция такого состояния вещественна, а тем самым вещественны и диагональные матричные элементы.

Тензор α_{ik} связан с поляризуемостью атома во внешнем электрическом поле. Чтобы установить эту связь, вычислим поправку к среднему значению дипольного момента системы, если система помещена во внешнее электрическое поле

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E}e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^* e^{i\omega t}). \tag{59.20}$$

Это можно сделать, воспользовавшись известной формулой теории возмущений (см. III, § 40): если на систему действует возмущение

$$\widehat{V} = \widehat{F}e^{-i\omega t} + \widehat{F}^+ e^{i\omega t},$$

то поправка первого порядка к диагональным матричным элементам некоторой величины f равна

$$f_{11}^{(1)}(t) = -\sum_n \left\{ \left[\frac{f_{1n}^{(0)} F_{n1}}{\omega_{n1} - \omega - i0} + \frac{f_{n1}^{(0)} F_{1n}}{\omega_{n1} + \omega + i0} \right] e^{-i\omega t} + \right. \\ \left. + \left[\frac{f_{1n}^{(0)} F_{1n}^*}{\omega_{n1} + \omega - i0} + \frac{f_{n1}^{(0)} F_{n1}^*}{\omega_{n1} - \omega + i0} \right] e^{i\omega t} \right\}$$

(возмущение $\widehat{V}$ должно рассматриваться как бесконечно медленно включающееся от $t = -\infty$, так что в первом члене ω должно пониматься как $\omega + i0$, а во втором — как $\omega - i0$; в соответствии с этим и написаны мнимые добавки в знаменателях).

В данном случае $\widehat{F} = -\mathbf{d}\mathbf{E}/2$ и поправка к диагональному матричному элементу дипольного момента оказывается равной

$$\mathbf{d}_{11}^{(1)} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{d}}e^{-i\omega t} + \overline{\mathbf{d}}^* e^{i\omega t}), \tag{59.21}$$

где $\overline{\mathbf{d}}$ — вектор с компонентами

$$\overline{d}_i = \alpha_{ik}^{(\text{п})} E_k, \tag{59.22}$$

[1]) Этот результат связан с пренебрежением естественной шириной линии, а тем самым и с возможностью поглощения падающего света (см. § 62).

причем выражение для тензора $\alpha_{ik}^{(\text{п})}(\omega)$ отличается от выражения (59.17) для α_{ik} обратным знаком мнимой добавки в знаменателе второго члена. По определению, $\alpha_{ik}^{(\text{п})}(\omega)$ есть тензор поляризуемости атома в поле с частотой ω. Для частот, при которых мнимые добавки в знаменателях могут быть опущены и тензор α_{ik} эрмитов, тензоры α_{ik} и $\alpha_{ik}^{(\text{п})}$ просто совпадают друг с другом. В частности, при $\omega = 0$ формула (59.22) переходит в формулу (76.4) (см. III), причем выражение для тензора статической поляризуемости (76.5) (см. III) совпадает с $\alpha_{ik}(0)$ из (59.17). Отметим также, что если состояние 1 — основное [1]), то все $\omega_{n1} > 0$ и правило обхода в первом члене в (59.17) существенно только при $\omega > 0$, а во втором — при $\omega < 0$. В таком случае

$$\alpha_{ik}(\omega) = \alpha_{ik}^{(\text{п})}(|\omega|). \tag{59.23}$$

По смыслу формул теории рассеяния в них подразумевается, что $\omega > 0$; тогда тензор α_{ik} совпадает с тензором поляризуемости.

В дальнейшем нам понадобится наряду с сечением еще и амплитуда рассеяния фотона f. Как обычно в теории возмущений, она совпадает, с точностью до нормировочного множителя, со взятым с обратным знаком матричным элементом (59.2). Подобрав этот множитель так, чтобы представить сечение (59.7) в виде $d\sigma = |f|^2 do'$, найдем для амплитуды упругого рассеяния

$$f = \omega^2 \alpha_{ik} e_i'^* e_k. \tag{59.24}$$

Согласно оптической теореме (см. ниже формулу (71.10)) мнимая часть амплитуды рассеяния вперед (т. е. без изменения импульса и поляризации) определяет полное сечение σ_t всех возможных упругих и неупругих процессов для данного начального состояния фотона:

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{\omega}\,\mathrm{Im}(\omega^2 \alpha_{ik} e_i^* e_k) = 4\pi\omega \frac{\alpha_{ik} - \alpha_{ki}^*}{2i} e_i^* e_k. \tag{59.25}$$

Таким образом, полное сечение определяется антиэрмитовой частью тензора рассеяния.

Формула (59.25) имеет простой классический смысл. Электрическое поле $\mathbf{E}$ производит в единицу времени над системой зарядов работу, равную $\sum e\mathbf{vE} = \mathbf{E}\dot{\mathbf{d}}$. Представив поле в виде (59.20), а дипольный момент в виде (59.21), (59.22) и усреднив эту работу по времени,получим

$$\frac{1}{2}\omega |E|^2 e_i^* e_k \frac{\alpha_{ik} - \alpha_{ki}^*}{2i}$$

[1]) Только такой случай (который мы и будем иметь в виду в последующих рассуждениях) допускает вполне строгое рассмотрение из-за конечности времени жизни возбужденных состояний (см. § 62).

($\mathbf{E} = \mathbf{e}E$). С другой стороны, если $\mathbf{E}$ — поле падающего света, то средняя плотность потока энергии в нем равна $|E|^2/(8\pi)$, а поглощаемая атомом энергия равна

$$\frac{1}{8\pi}|E|^2\sigma_t.$$

Приравняв друг другу полученные выражения, получим формулу (59.25).

Если момент J основного состояния атома равен нулю, то в силу сферической симметрии $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$. Тогда

$$\sigma_t = 4\pi\omega \operatorname{Im}\alpha. \tag{59.26}$$

Для системы с моментом такое же соотношение верно для величин, усредненных по его направлениям в пространстве (см. § 60).

Для энергий фотона выше порога ионизации атома главный вклад в полное сечение σ_t вносит процесс ионизации — поглощение фотона при фотоэффекте. Сечение же рассеяния является величиной более высокого порядка по e^2 (ср., например, (56.13) с (59.16)).

Если же энергия фотона лежит ниже порога ионизации (но не близко к резонансу, т. е. к какой-либо из дискретных частот возбуждения атома), то сечение, сводящееся в этом случае к сечению рассеяния, а вместе с ним и мнимая часть амплитуды, оказывается более высокого порядка малости, чем ее вещественная часть. Пренебрегая мнимой частью, мы снова получаем (59.19). Положение дел меняется вблизи резонанса, где сечение возрастает; эта ситуация будет рассмотрена в § 63.

Наряду с рассеянием, к двухфотонным процессам, появляющимся во втором порядке теории возмущений, относится также и *двойное испускание* — одновременное испускание атомом двух квантов.

Выражение для вероятности этого процесса отличается от формулы (59.5) только заменой $\omega \to -\omega$, $\mathbf{e} \to \mathbf{e}^*$ (испускание фотона ω вместо поглощения) и лишним множителем

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{\omega^2 d\omega do}{(2\pi)^3}$$

— числом квантовых состояний испускаемого фотона в заданных интервалах частоты ω и направлений $\mathbf{k}$; частота же второго фотона определяется по ω равенством $\omega + \omega' = \omega_{12}$. Таким образом, вероятность излучения (в единицу времени) [1]

$$dw = |(b_{ik})_{21} e_i'^* e_k^*|^2 \frac{\omega^3 \omega'^3}{(2\pi)^3 c^6 \hbar^2} do\, do'\, d\omega, \tag{59.27}$$

[1]) Здесь и ниже в этом параграфе — обычные единицы.

где

$$(b_{ik})_{21} = \sum_n \left[\frac{(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1} + \omega - i0} + \frac{(d_k)_{2n}(d_i)_{n1}}{\omega_{n1} + \omega' - i0} \right]$$

отличается от $(c_{ik})_{21}$ (59.6) лишь знаком перед ω. Просуммировав это выражение по поляризациям фотонов и проинтегрировав по направлениям их вылета [1]), получим

$$dw = \frac{8\omega^3\omega'^3}{9\pi\hbar^2c^6}|(b_{ik})_{21}|^2 d\omega. \tag{59.28}$$

Вероятность испускания двух фотонов ω и ω' обычно очень мала по сравнению с вероятностью испускания одного фотона с частотой $\omega + \omega'$. Исключение составляют случаи, когда правила отбора, запрещая второй процесс, допускают первый. Таковы, например, переходы между двумя состояниями с $J = 0$, для которых всякие процессы излучения одного фотона запрещены строго. Другим примером является переход из первого возбужденного состояния атома водорода ($2s_{1/2}$) в основное состояние ($1s_{1/2}$), запрещенный как для $E1$-, так и для $M1$-излучения (см. задачу 2, § 52) [2]).

Если атом находится в поле падающего на него потока фотонов ω, $\mathbf{k}$, то наряду со спонтанным двойным испусканием, вероятность которого есть (59.27), существует также и вынужденное двойное испускание: под влиянием поля испускается еще один такой же фотон и с ним фотон ω', $\mathbf{k}'$. Вероятность этого процесса отличается от вероятности спонтанного испускания множителем $N_{\mathbf{ke}}$ — плотностью числа фотонов падающего света с заданными $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}$. Плотность потока падающих фотонов есть

$$dI = cN_{\mathbf{ke}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} = N_{\mathbf{ke}}\frac{\omega^2}{8\pi^3c^2}d\omega do.$$

Выразив отсюда $N_{\mathbf{ke}}$ через dI и разделив на dI вероятность процесса, получим его сечение

$$d\sigma = \frac{\omega\omega'^3}{\hbar^2c^4}|(b_{ik})_{12}e_i'^*e_k^*|^2 do'. \tag{59.29}$$

Аналогичным образом, если атом находится в поле фотонов ω', $\mathbf{k}'$, то при падении на него фотона ω, $\mathbf{k}$ происходит *вынужденное комбинационное рассеяние*, сечение которого пропорционально плотности числа фотонов ω', $\mathbf{k}'$.

---

[1]) Эта операция сводится к полному усреднению по направлениям $\mathbf{e}$ согласно $\overline{e_ie_k^*} = \delta_{ik}/3$ и последующему умножению на $2 \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 4\pi$.

[2]) Время жизни уровня $2s_{1/2}$, обусловленное двойным испусканием, составляет 0,15 с.

Вычисление тензоров $(c_{ik})_{12}$ или $(b_{ik})_{12}$ для конкретных атомов требует вычисления сумм вида

$$(M_{ik}^{(2)})_{21} = \sum_n \frac{(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}}{E_n - E - i0}, \tag{59.30}$$

причем E принимает значения $E_1 \pm \hbar\omega$ или $E_1 \pm \hbar\omega'$. Пусть, для упрощения записи, речь идет об атоме водорода. Запишем сумму (59.30) в виде интеграла

$$(M_{ik}^{(2)})_{21} = \int \psi_2^*(\mathbf{r}) d_i G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) d_k' \psi_1(r')\, d^3x\, d^3x', \tag{59.31}$$

где

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r})\psi_n^*(r')}{E_n - E - i0}. \tag{59.32}$$

Подействуем на функцию G оператором $\widehat{H} - E$, где $\widehat{H}$ — гамильтониан атома. Поскольку $\widehat{H}\psi_n = E_n\psi_n$, получим

$$(\widehat{H} - E)G = \sum_n \psi_n(\mathbf{r})\psi_n^*(\mathbf{r}').$$

Но стоящая здесь сумма есть, в силу полноты системы функций ψ_n, δ-функция $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Таким образом, функция G удовлетворяет уравнению

$$(\widehat{H} - E)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{59.33}$$

т. е. является функцией Грина уравнения Шредингера (правило обхода в (59.32) определяет, какое из решений этого уравнения следует выбрать). Тем самым задача о вычислении суммы (59.30) сводится к нахождению функции Грина атома. Точное решение уравнения (59.33) возможно, однако, лишь если известны точные решения однородного уравнения Шредингера, т. е. фактически — лишь для атома водорода [1]).

З а д а ч а

Вычислить вероятность упругого рассеяния электрона (нерелятивистского) на почти монохроматической стоячей световой волне (*П. Л. Капица, П. А. М. Дирак*, 1933).

Р е ш е н и е. Стоячую волну можно рассматривать как совокупность фотонов с импульсами $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$ (и одинаковыми поляризациями). Рассеяние же электрона — как поглощение фотона с импульсом $\mathbf{k}$ и вынужденное испускание фотона с импульсом $-\mathbf{k}$, в результате чего импульс $\mathbf{p}$ электрона получает приращение $2\hbar\mathbf{k}$, поворачиваясь (без изменения величины) на

[1]) См. *Hostler L.*//J. Math. Phys. — 1964. — Vol. 5. — P. 591. Применение этой функции Грина к вычислению амплитуды рассеяния на атоме водорода — см. *Грановский Я. И.*//ЖЭТФ. — 1969. — Т. 56. — С. 605.

угол θ: $|\mathbf{p}|\sin(\theta/2) = \hbar\omega/c$. Вероятность этого процесса можно получить из сечения томсоновского рассеяния (59.15)

$$d\sigma = r_e^2|\mathbf{e}'^*\mathbf{e}|^2 do' = r_e^2 do'$$

путем умножения на плотность потока фотонов с импульсом $\mathbf{k}$ и число фотонов с импульсом $-\mathbf{k}$.

Плотность потока фотонов с частотами в интервале $d\omega$ равна

$$cU_\omega d\omega/(2\hbar\omega),$$

где $U_\omega d\omega$ — плотность энергии в стоячей волне в спектральном интервале $d\omega$ (множитель $1/2$ учитывает, что энергия волны разделена поровну между фотонами противоположных направлений). Импульсы $\mathbf{k}$ всех фотонов, образующих стоячую волну, параллельны определенному направлению $\mathbf{n}$ («направление» стоячей волны). Другими словами, плотность энергии как функция частоты и направления фотонов $\mathbf{n}'$: $U_{\omega\mathbf{n}'} = U_\omega \delta^{(2)}(\mathbf{n}' - \mathbf{n})$. Соответственно этому число фотонов с импульсом $-\mathbf{k}$ равно (ср. (44.8)):

$$\int N_{-\mathbf{k}} do' = \frac{8\pi^3 c^3}{\hbar\omega^3}\frac{U_\omega}{2}.$$

В результате получаем для вероятности рассеяния электрона (в 1 с)

$$w = \frac{2\pi^3 e^4}{m^2\hbar^2\omega^4}\int U_\omega^2\, d\omega.$$

Множитель ω^{-4} вынесен за знак интеграла, поскольку степень немонохроматичности $\Delta\omega$ предполагается малой. Значение интеграла обратно пропорционально $\Delta\omega$ (при заданной полной интенсивности).

§ 60. Рассеяние свободно ориентирующимися системами

Если уровень энергии атома не вырожден, то поляризуемость и интенсивность когерентного рассеяния определяются одним и тем же тензором $\alpha_{ik} \equiv (c_{ik})_{11}$. Если же уровень вырожден, то наблюдаемые значения указанных величин получаются усреднением по всем состояниям, относящимся к данному уровню. Поляризуемость должна быть определена как среднее значение

$$\alpha_{ik} = \overline{(c_{ik})_{11}}.$$

Наблюдаемая же интенсивность рассеяния определяется средними значениями произведений

$$\overline{(c_{ik})_{11}(c_{lm})_{11}}.$$

Поэтому связь между поляризуемостью и рассеянием становится менее прямой.

Отметим, что хотя каждая из величин $(c_{ik})_{11}$ может быть комплексной, их средние значения вещественны (предполагается, что поглощение отсутствует и α_{ik} — эрмитов тензор). Действительно, при усреднении можно произвольным образом выбрать совокупность независимых волновых функций (отвечающих данному вырожденному уровню), а при этом можно всегда добиться того, чтобы все функции были вещественными.

Для свободных (не находящихся во внешнем поле) атомов или молекул вырождение уровней связано обычно со свободно ориентирующимся в пространстве моментом. Пусть начальное состояние при рассеянии имеет момент J_1, а конечное J_2. Как обычно, сечение рассеяния должно быть усреднено по всем значениям проекции M_1 и просуммировано по значениям M_2. После первого усреднения сечение перестает зависеть от M_2, так что дальнейшее суммирование сводится к умножению на $(2J_2+1)$. Таким образом, усредненное сечение рассеяния

$$d\overline{\sigma} = \omega\omega'^3 c^{(21)}_{iklm} e'^*_i e_k e'_l e^*_m do', \tag{60.1}$$

где

$$c^{(21)}_{iklm} = \frac{1}{2J_1+1}\sum_{M_1M_2}(c_{ik})_{21}(c_{lm})^*_{21} = (2J_2+1)\overline{(c_{ik})_{21}(c_{lm})^*_{21}}^{\,1}, \tag{60.2}$$

а черта с индексом 1 означает усреднение по M_1.

Для несмещенного рассеяния состояния 1 и 2 относятся к одному и тому же уровню энергии ($\omega_{12}=0$). Если речь идет лишь о когерентном рассеянии, то состояния 1 и 2 должны совпадать полностью, т. е. должно быть: $M_1 = M_2$. Суммирование по M_2, а с ним и множитель $2J_2+1$ в (60.2) при этом отпадают:

$$c^{(\text{ког})}_{iklm} = \overline{(c_{ik})_{11}(c_{lm})^*_{11}}^{\,1}. \tag{60.3}$$

Результат усреднения можно написать без особых вычислений, если учесть, что усреднение по M_1 эквивалентно усреднению по всем ориентациям системы, после чего среднее значение может выражаться только через единичный тензор δ_{ik}. При этом могут оказаться отличными от нуля только средние значения произведений компонент скалярной, симметричной и антисимметричной частей тензора рассеяния в отдельности; ясно, что с помощью единичного тензора нельзя составить выражения, которые по своим свойствам симметрии могли бы соответствовать перекрестным произведениям. Таким образом,

$$c^{(21)}_{iklm} = G^0_{21}\delta_{ik}\delta_{lm} + c^{(21)\,s}_{iklm} + c^{(21)\,a}_{iklm}, \tag{60.4}$$

где

$$\begin{aligned} G^0_{21} &= (2J_2+1)\overline{(c^0)_{21}}^{\,1}, \\ c^{(21)\,s}_{iklm} &= (2J_2+1)\overline{(c^s_{ik})_{21}(c^s_{lm})^*_{21}}^{\,1}, \\ c^{(21)\,a}_{iklm} &= (2J_2+1)\overline{(c^a_{ik})_{21}(c^a_{lm})^*_{21}}^{\,1}. \end{aligned} \tag{60.5}$$

Другими словами, сечение (а с ним интенсивность) рассеяния свободно ориентирующейся системой распадается на сумму трех

независимых частей, о которых мы будем говорить как о *скалярном*, *симметричном* и *антисимметричном рассеянии*.

Каждый из трех членов в (60.4) выражается всего через одну независимую величину. Скалярное рассеяние — через величину G^0_{21}, а для симметричного и антисимметричного рассеяния имеем

$$\begin{aligned} c^{(21)\,s}_{iklm} &= \frac{1}{10}G^s_{21}(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{lm}),\\ G^s_{21} &= (2J_2+1)\overline{(c^s_{ik})_{21}(c^s_{ik})_{21}}^{\,1};\\ c^{(21)\,a}_{iklm} &= \frac{1}{6}G^a_{21}(\delta_{il}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kl}),\\ G^a_{21} &= (2J_2+1)\overline{(c^a_{ik})_{21}(c^a_{ik})_{21}}^{\,1} \end{aligned} \tag{60.6}$$

(комбинация единичных тензоров составляется по свойствам симметрии, после чего общий коэффициент находится свертыванием по парам индексов il и km).

Подстановка формул (60.4)–(60.6) в (60.1) приводит к следующему выражению для сечения рассеяния:

$$d\overline{\sigma} = \omega\omega'^3\Big\{G^0_{21}|\mathbf{e}'^*\mathbf{e}|^2+\frac{1}{10}G^s_{21}\Big(1+|\mathbf{e}'\mathbf{e}|^2-\frac{2}{3}|\mathbf{e}'^*\mathbf{e}|^2\Big)+ \\ +\frac{1}{6}G^a_{21}(1-|\mathbf{e}'\mathbf{e}|^2)\Big\}do'. \tag{60.7}$$

Эта формула определяет в явном виде угловые зависимости и поляризационные свойства рассеяния.

Полное сечение рассеяния по всем направлениям, просуммированное по поляризациям конечного фотона и усредненное по поляризациям и направлениям падения начального фотона, легко получить прямо из (60.1). Для этого замечаем, что

$$\overline{e^*_i e_k} = \delta_{ik}/3,$$

если усреднение производится как по поляризациям, так и по направлениям распространения фотона (суммирование же по ним соответственно даст результат в $2\cdot 4\pi$ раз больший). В результате получим

$$\overline{\sigma} = \frac{8\pi}{9}\omega\omega'^3 c^{(21)}_{ikik} = \frac{8\pi}{9}\omega\omega'^3(3G^0_{21}+G^s_{21}+G^a_{21}). \tag{60.8}$$

Выше уже было указано, что правила отбора для рассеяния совпадают с правилами отбора для матричных элементов произвольного тензора второго ранга. В связи с разложением интенсивности рассеяния на три независимые части целесообразно сформулировать эти правила для каждой из частей в отдельности.

Правила отбора для симметричного рассеяния совпадают с правилами отбора для электрически-квадрупольного излучения, поскольку последнее тоже определяется неприводимым симметричным тензором (тензором квадрупольных моментов). Для антисимметричного рассеяния правила отбора совпадают с таковыми для магнитно-дипольного излучения, поскольку оба определяются аксиальным вектором (напомним, что антисимметричный тензор эквивалентен (дуален) аксиальному вектору) [1]. При этом, однако, имеется отличие в том, что диагональные матричные элементы, которые в излучательном случае дают средние значения электрических или магнитных моментов (и не соответствуют излучательным переходам), в случае рассеяния существенны — они относятся к когерентному рассеянию.

Для скалярного рассеяния правила отбора совпадают с таковыми для матричных элементов скалярной величины. Это значит, что возможны переходы лишь между состояниями одинаковой симметрии. В частности, должны быть одинаковыми значения полного момента J и его проекции M (причем диагональные по M матричные элементы от числа M не зависят — см. III, (29.3)). Для несмещенного рассеяния, тем самым, состояния 1 и 2 должны совпадать полностью (не только по энергии, но и по M), так что несмещенное скалярное рассеяние полностью когерентно. Обратно, поскольку в скалярном рассеянии все состояния во всяком случае комбинируют сами с собой, то в когерентном рассеянии всегда имеется скалярная часть.

Аналогично произведенному выше усреднению сечения рассеяния, для свободно ориентирующейся в пространстве системы должен быть усреднен по направлениям момента J_1 также и тензор поляризуемости. Усреднение производится совсем просто: очевидно,что

$$\alpha_{ik} \equiv \overline{(c_{ik})_{11}}^{1} = \overline{(c^0)_{11}}^{1}\delta_{ik}.$$

Симметричная и антисимметричная части тензора рассеяния при усреднении выпадают: δ_{ik} есть единственный изотропный тензор второго ранга.

Выше было отмечено, что диагональные матричные элементы скаляра не зависят от числа M_1. Поэтому знак усреднения над $(c^0)_{11}$ можно вообще опустить (и вычислять $(c^0)_{11}$ при любом значении M_1), так что поляризуемость

$$\alpha_{ik} \equiv (c^0)_{11}\delta_{ik}. \tag{60.9}$$

---

[1]) Речь идет, конечно, о тех правилах отбора, которые связаны с симметрией, а не с конкретным видом аксиального вектора в случае излучения: вектор магнитного момента содержит спиновую часть, между тем как при рассеянии рассматриваются матричные элементы от величин орбитальной (координатной) природы.

По той же причине знак усреднения можно опустить и в величине G_{11}^0, определяющей скалярную часть когерентного рассеяния:

$$G_{11}^0 = \overline{|(c^0)_{11}|^2}^1 = (c^0)_{11}^2 \tag{60.10}$$

(множитель $2J_2 + 1$ опущен в соответствия с (60.3)). Таким образом, имеется простая связь между средней поляризуемостью и скалярной частью когерентного рассеяния. То и другое определяется величиной

$$(c^0)_{11} = \frac{2}{3} \sum_n \frac{\omega_{n1}}{\omega_{n1}^2 - \omega^2} |\mathbf{d}_{n1}|^2. \tag{60.11}$$

Задачи

1. Найти угловое распределение и степень деполяризации при рассеянии линейно поляризованного света.

Решение. Пусть θ — угол между направлением рассеяния $\mathbf{n}'$ и направлением поляризации падающего света $\mathbf{e}$. Рассеянный свет содержит две независимые компоненты, поляризованные в плоскости $\mathbf{n}'\,\mathbf{e}$ (интенсивность I_1) и перпендикулярно ей (интенсивность I_2); степень деполяризации дается отношением I_2/I_1. Интенсивности I_1 и I_2 определяются по формуле (60.7) с соответствующим образом направленными $\mathbf{e}'$.

При скалярном рассеянии свет остается полностью поляризованным в той же плоскости ($I_2 = 0$), а угловое распределение интенсивности

$$I = \frac{3}{2} \sin^2 \theta.$$

(Здесь и ниже выражения для $I = I_1 + I_2$ нормированы так, чтобы давать 1 при усреднении по направлениям.) При симметричном рассеянии

$$I = \frac{3}{20}(6 + \sin^2 \theta), \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{3 + \sin^2 \theta}.$$

При антисимметричном рассеянии

$$I = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta), \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

2. То же для рассеяния естественного света.

Решение. Переход в формуле (60.7) к естественному (неполяризованному) падающему свету осуществляется заменой

$$e_i e_k^* \to \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_i n_k),$$

отвечающей усреднению по направлениям поляризации $\mathbf{e}$ при заданном направлении падения $\mathbf{n}$. Рассеянный свет будет частично поляризован, и из соображений симметрии очевидно, что его две независимые компоненты будут линейно поляризованы в плоскости рассеяния $\mathbf{n}\,\mathbf{n}'$ (интенсивность $I_{\|}$) и перпендикулярно ей (интенсивность $I_{\perp}$). Угол рассеяния (угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$) обозначим через θ.

Для скалярного рассеяния

$$I = I_{\perp} + I_{\|} = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta), \qquad \frac{I_{\|}}{I_{\perp}} = \cos^2 \theta;$$

для симметричного рассеяния

$$I = \frac{3}{40}(13 + \cos^2\theta), \quad \frac{I_\parallel}{I_\perp} = \frac{6 + \cos^2\theta}{7};$$

для антисимметричного рассеяния

$$I = \frac{3}{8}(2 + \sin^2\theta), \quad \frac{I_\parallel}{I_\perp} = 1 + \sin^2\theta.$$

3. Для рассеяния циркулярно поляризованного света определить коэффициент обращения (отношение интенсивности компоненты, поляризованной по кругу в «обращенном» направлении, к интенсивности компоненты, поляризованной в «правильном» направлении).

Решение. При циркулярно поляризованном падающем свете угловое распределение и степень, деполяризации (отношение $I_\parallel/I_\perp$) — такие же, как при рассеянии естественного света.

Пусть вектор $\mathbf{e}$ падающего света имеет компоненты $\mathbf{e} = (1, i, 0)/\sqrt{2}$ (в системе координат с плоскостью xz, совпадающей с плоскостью рассеяния, и осью z вдоль направления $\mathbf{n}$). Тогда для «обращенной» и «правильной» циркулярно поляризованных компонент рассеянного света векторы поляризации равны

$$\mathbf{e}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, -i, -\sin\theta) \quad \text{и} \quad \mathbf{e}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, i, -\sin\theta).$$

Вычисляя интенсивность с помощью (60.7), находим коэффициенты обращения P для всех трех типов рассеяния:

$$P^0 = \operatorname{tg}^4\frac{\theta}{2}, \quad P^s = \frac{13 + \cos^2\theta + 10\cos\theta}{13 + \cos^2\theta - 10\cos\theta}, \quad P^a = \frac{1 - \cos^4(\theta/2)}{1 - \sin^4(\theta/2)}$$

(θ — угол рассеяния),

4. Вычислить сечение рассеяния фотона малой частоты на атоме водорода в основном состоянии.

Решение. Фотон малой частоты может рассеиваться только упруго. Поскольку в основном состоянии атома водорода орбитальный момент $L = 0$, согласно правилам отбора в пренебрежении спин-орбитальной связью имеется только скалярное рассеяние. Статическая поляризуемость атома (в обычных единицах)

$$\alpha = \frac{9}{2}\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)^3$$

(см. III, § 76, задача 4). Подставив в (60.8), получим искомое сечение:

$$\sigma_t = 54\pi\left(\frac{\omega}{c}\right)^4\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)^6.$$

5. Вычислить сечение упругого рассеяния γ-излучения дейтроном (*H. A. Bethe*, *R. Peierls*, 1935).

Решение. Волновые функции основного состояния дейтрона и его состояний непрерывного спектра (диссоциированный дейтрон)

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\frac{e^{-\varkappa r}}{r}, \quad \psi_{\mathbf{p}} = e^{i\mathbf{pr}}, \quad \varkappa = \sqrt{MI}$$

(см. (58.2), (58.3)). Матричный элемент дипольного момента $\mathbf{d}_{\mathbf{p}0} = -ie\mathbf{p}_{\mathbf{p}0}/(M\omega_{\mathbf{p}0})$ вычислен в § 58:

$$\mathbf{d}_{\mathbf{p}0} = -\frac{4\pi ie}{M\omega_{\mathbf{p}0}}\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\frac{\mathbf{p}}{\varkappa^2 + \mathbf{p}^2},$$

причем частоты $\omega_{\mathbf{p}0} = (\mathbf{p}^2 + \varkappa^2)/M$. Тензор поляризуемости

$$\alpha_{ik} = \left\{ \frac{2}{3} \int \frac{\omega_{\mathbf{p}0}}{\omega_{\mathbf{p}0}^2 - \omega^2} |\mathbf{d}_{0\mathbf{p}}|^2 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} - \frac{e^2}{2M\omega^2} \right\} \delta_{ik}.$$

Первый член связан с виртуальным возбуждением внутренних степеней свободы дейтрона; он написан в виде (60.11). Второй член связан с воздействием поля волны на поступательное движение дейтрона в целом. Поскольку это движение квазиклассично, соответствующая часть тензора рассеяния дается формулой (59.14) (с массой дейтрона $2M$ в качестве m).

Вычисление α_{ik} сводится к взятию интеграла

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^4 dz}{(z^2+1)^3[(z^2+1)^2 - \gamma^2]}, \quad z = \frac{p}{\varkappa}, \quad \gamma = \frac{M\omega}{\varkappa^2} = \frac{\omega}{I}.$$

Имеем

$$J = \frac{1}{8} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{dJ_0}{d\lambda} \right) \bigg|_{\lambda=1}, \quad J_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^4 dz}{(z^2+\lambda^2)[(z^2+1)^2 - \gamma^2]}.$$

При $\gamma < 1$ подынтегральное выражение имеет в верхней полуплоскости комплексной переменной z полюсы в точках $i\lambda$, $i\sqrt{1+\gamma}$, $i\sqrt{1-\gamma}$; интеграл J_0 вычисляется по вычетам в этих полюсах. В результате получим

$$J = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{(1+\gamma)^{3/2}}{2\gamma^4} + \frac{(1-\gamma)^{3/2}}{2\gamma^4} - \left(\frac{3}{8\gamma^2} + \frac{1}{\gamma^4} \right) \right\}.$$

Полное сечение рассеяния выражается через α_{ik} согласно (60.8), (60.10) и равно (в обычных единицах)

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{Mc^2} \right)^2 \left| -1 - \frac{4}{3\gamma^2} + \frac{2}{3\gamma^2} [(1+\gamma)^{3/2} + (1-\gamma)^{3/2}] \right|^2 \text{при } \gamma = \frac{\hbar\omega}{I} < 1.$$

Амплитуда рассеяния при $\gamma > 1$ (выше порога диссоциации дейтрона) получается из амплитуды при $\gamma < 1$ аналитическим продолжением, причем у нее появляется мнимая часть, которая должна быть положительна (в соответствии с правилом обхода в (59.17)):

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{Mc^2} \right)^2 \left| -1 - \frac{4}{3\gamma^2} + \frac{2}{3\gamma^2} (\gamma+1)^{3/2} + i \frac{2}{3\gamma^2} (\gamma-1)^{3/2} \right|^2 \text{при } \gamma > 1.$$

При $\gamma \gg 1$ получается $\sigma = (8\pi/3)(e^2/Mc^2)^2$, что соответствует, как и следовало ожидать, нерелятивистскому рассеянию на свободном протоне.

Угловое распределение излучения

$$d\sigma = \sigma \frac{3}{4} (1 + \cos^2\theta) \frac{do}{4\pi},$$

где θ — угол рассеяния. Определив амплитуду рассеяния согласно (59.24), будем иметь

$$\operatorname{Im} f(0) = \frac{2e^2}{3Mc^2} \frac{(\gamma-1)^{3/2}}{\gamma^2}, \quad \gamma > 1.$$

Согласно оптической теореме (59.26) эта величина совпадает с $\omega\sigma_t/(4\pi)$, где σ_t — полное сечение фотодиссоциации (58.4). Напомним, что сечение упругого рассеяния — более высокого порядка ($\sim e^4$), чем сечение диссоциации ($\sim e^2$, см. (58.4)), так что σ_t совпадает с сечением диссоциации. По той же причине в рассмотренном приближении амплитуда рассеяния при $\gamma < 1$ (ниже порога диссоциации) оказалась вещественной.

§ 61. Рассеяние на молекулах

Специфика молекулярного рассеяния связана с теми же свойствами молекул, которые лежат вообще в основе теории их спектров, — с возможностью раздельного рассмотрения электронного состояния при неподвижных ядрах и движения ядер в заданном эффективном поле электронов.

Пусть частота падающего света ω меньше энергии ω_e первого электронного возбуждения. Тогда при рассеянии электронные термы не могут возбудиться. Рассеяние будет либо несмещенным, либо смещенным за счет возбуждения вращательных или колебательных уровней.

Предположим далее, что основной электронный терм молекулы не вырожден (и не имеет тонкой структуры). Другими словами, предполагается, что равны нулю полный спин электронов и проекция их полного орбитального момента на ось молекулы (для молекул типа симметричного волчка). Так, для двухатомных молекул это значит, что основной электронный терм должен быть $^1\Sigma$. Как известно, эти условия выполняются для основных состояний большинства молекул [1].

Наконец, будем предполагать частоту ω большой по сравнению с интервалами ядерной (вращательной и колебательной) структуры основного терма, а разность $\omega_e - \omega$ находящейся в таком же отношении к ядерной структуре возбужденного электронного терма. Другими словами, частота падающего света должна быть достаточно далека от резонансов. Именно эти условия позволяют при вычислении тензора рассеяния отвлечься сначала от движения ядер, рассматривая задачу при заданной ядерной конфигурации.

В такой задаче тензор рассеяния совпадает с тензором поляризуемости $\alpha_{ik} \equiv (c_{ik})_{11}$ и вычисляется в принципе по общей формуле (59.17), в которой суммирование производится по всем возбужденным электронным термам. Полученные таким образом величины α_{ik} будут функциями координат q ядерной конфигурации (от которых как от параметров зависят энергии и волновые функции электронных термов). Ввиду невырожденности состояния тензор $\alpha_{ik}(q)$ будет вещественным, а потому и симметричным.

---

[1] Излагаемые ниже результаты могут, однако, быть справедливы (с определенной точностью) также и в случаях, когда вырождение основного электронного терма связано с отличным от нуля спином, а спин-орбитальное взаимодействие мало (так что вызываемой им тонкой структурой можно пренебречь). В этом приближении состояния с различными направлениями спина не комбинируют и в этом смысле ведут себя как невырожденные. Таков, например, случай молекулы O_2 с основным термом $^3\Sigma$.

Тензор $\alpha_{ik}(q)$ представляет собой электронную поляризуемость заданной ядерной конфигурации молекулы. Для решения реальной задачи о рассеянии надо еще учесть движение ядер в начальном и конечном состояниях. Пусть $\psi_{s_1}(q)$ и $\psi_{s_2}(q)$ — ядерные волновые функции этих состояний (так что s_1, s_2 — наборы колебательных и вращательных квантовых чисел). Искомый тензор рассеяния представляет собой матричный элемент тензора $\alpha_{ik}(q)$, вычисленный по этим функциям:

$$\langle s_2|\alpha_{ik}|s_1\rangle = \int \psi^*_{s_2}(q)\alpha_{ik}\psi_{s_1}dq. \qquad (61.1)$$

Ввиду симметричности тензора $\alpha_{ik}(q)$ будет симметричным (как при совпадающих, так и при различных s_1, s_2) также и тензор (61.1). Таким образом, мы приходим к выводу, что в рассматриваемых условиях антисимметричная часть будет отсутствовать как в несмещенном, так и и в смещенном рассеянии. Рассеяние будет содержать в себе лишь скалярную и симметричную части.

Скалярная часть поляризуемости $\alpha^0(q)$ не зависит от ориентации молекулы, а зависит лишь от внутреннего расположения атомов в ней. Обозначим посредством v совокупность колебательных квантовых чисел молекулы, а r совокупность вращательных чисел, за исключением магнитного числа m. Тогда матричные элементы

$$\langle v_2r_2m_2|\alpha^0|v_1r_1m_1\rangle = \langle v_2|\alpha^0|v_1\rangle\delta_{r_1r_2}\delta_{m_1m_2}. \qquad (61.2)$$

Диагональность по числам r, m — общее свойство всякого скаляра. Специфическим в (61.2) является то, что матричные элементы в данном случае вообще не зависят от этих чисел. Таким образом, скалярное рассеяние имеется только для чисто колебательных переходов и не зависит от вращательного состояния.

Симметричное рассеяние определяется матричными элементами тензора α^s_{ik}. Его компоненты относительно неподвижной системы координат xyz выражаются через компоненты $\overline{\alpha}^s_{i'k'}$ в связанной с молекулой системе $\xi\eta\zeta$ согласно

$$\alpha^s_{ik} = \sum_{i'k'} \overline{\alpha}^s_{i'k'}D_{i'i}D_{k'k}, \qquad (61.3)$$

где $D_{i'i}$ — направляющие косинусы новых осей относительно старых. Величины $\overline{\alpha}^s_{i'k'}$ не зависят от ориентации молекулы, а $D_{i'i}$ не зависят от ее внутренних координат. Поэтому

$$\langle v_2r_2m_2|\alpha^s_{i'k'}|v_1r_1m_1\rangle = \sum_{i'k'}\langle v_2|\overline{\alpha}^s_{i'k'}|v_1\rangle\langle r_2m_2|D_{i'i}D_{k'k}|r_1m_1\rangle.$$

Сумма по r_2m_2, ik квадратов модулей этих величин равна, как легко убедиться [1]),

$$\sum_{r_2m_2}\sum_{ik}|\langle v_2r_2m_2|\alpha^s_{ik}|v_1r_1m_1\rangle|^2 = \sum_{i'k'}|\langle v_2|\overline{\alpha}^s_{i'k'}|v_1\rangle|^2. \tag{61.4}$$

Это значит, что полная интенсивность рассеяния с переходами с данного колебательно-вращательного уровня v_1r_1 на все вращательные уровни колебательного состояния v_2 не зависит от r_1.

Для молекул типа симметричного волчка можно пойти дальше и установить зависимость интенсивности рассеяния от вращательных квантовых чисел для каждого перехода $v_1r_1 \to v_2r_2$. Числами r являются в этом случае момент J и его проекция k на ось молекулы. Введем вместо декартовых компонент α^s_{ik} соответствующий сферический тензор второго ранга, компоненты которого обозначим $\alpha_\lambda (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2)$. Согласно формуле (110.7) (см. III) квадраты модулей его матричных элементов

$$|\langle v_2J_2k_2m_2|\alpha_\lambda|v_1J_1k_1m_1\rangle|^2 =$$
$$= (2J_1+1)(2J_2+1)\begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -m_2 & \lambda & m_1 \end{pmatrix}^2 |\langle v_2|\overline{\alpha}_{\lambda'}|v_1\rangle|^2,$$

где $\overline{\alpha}_{\lambda'}(q)$ — сферический тензор поляризации, отнесенный к связанным с молекулой осям, $\lambda' = k_2 - k_1$. Просуммировав по m_2 и $\lambda = m_2 - m_1$ (при заданном m), получим (ср. III, (110.8))

$$\sum_{m_2\lambda}|\langle v_2J_2k_2m_2|\alpha_\lambda|v_1J_1k_1m_1\rangle|^2 =$$
$$= (2J_2+1)\begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix} |\langle v_2|\overline{\alpha}_{\lambda'}|v_1\rangle|^2. \tag{61.5}$$

Этой величиной определяется интенсивность рассеяния с колебательно-вращательным переходом $v_1J_1k_1 \to v_2J_2k_2$. Поскольку матричные элементы $\langle v_2|\overline{\alpha}_{\lambda'}|v_1\rangle$ от вращения молекулы вообще не зависят, тем самым определяется зависимость интенсивности как от чисел J_1, J_2, так и от k_1, k_2. Отметим, что в правую сторону (61.5) входит всего одна сферическая компонента тензора поляризуемости.

[1]) При преобразовании суммы используется равенство, выражающее унитарность матрицы D_{ik}:

$$\sum_{ik}\sum_{r_2m_2}\langle r_1m_1|D_{il}D_{kg}|r_2m_2\rangle\langle r_2m_2|D_{il'}D_{kg'}|r_1m_1\rangle =$$
$$= \langle r_1m_1|\sum_{ik}D_{il}D_{kg}D_{il'}D_{kg'}|r_1m_1\rangle = \langle r_1m_1|\delta_{ll'}\delta_{gg'}|r_1m_1\rangle = \delta_{ll'}\delta_{gg'}.$$

Если просуммировать равенство (61.5) по J_2 и k_2, то получим [1])

$$\sum_{\lambda} \sum_{J_2 k_2 m_2} |\langle v_2 J_2 k_2 m_2 | \alpha_\lambda | v_1 J_1 k_1 m_1 \rangle|^2 = \sum_{\lambda'} |\langle v_2 | \overline{\alpha}_{\lambda'} | v_1 \rangle|^2,$$

т. е. мы возвращаемся к правилу сумм (61.4).

Особым случаем симметричного волчка является ротатор — линейная молекула (в частности, двухатомная). Проекция момента на ось такой молекулы равна нулю (в невырожденном электронном состоянии с равным нулю электронным орбитальным моментом) [2]) . Поэтому в (61.5) в этом случае надо положить $k_1 = k_2 = 0$.

Наконец, рассмотрим вопрос о правилах отбора в колебательном комбинационном рассеянии вместе с аналогичным вопросом для колебательных спектров испускания (или поглощения) молекулы [3]) .

Для рассеяния вопрос сводится к нахождению условий, при которых отличны от нуля матричные элементы тензора $\alpha_{ik}(q)$, вычисленные по колебательным волновым функциям $\psi_v(q)$; при этом следует рассматривать отдельно скаляр α^0 (для скалярного рассеяния) и неприводимый симметричный тензор α^s_{ik} (для симметричного рассеяния). Аналогичную роль в излучении (или поглощении) играют матричные элементы вектора $\mathbf{d}(q)$ — дипольного момента молекулы, усредненного по электронному состоянию при заданном положении ядер (для двухатомных молекул это было уже указано в § 54).

Колебания многоатомной молекулы классифицируются по типам симметрии — неприводимым представлениям соответствующей точечной группы: D_a, a — номер представления (см. III, § 100). По этим представлениям определяется также и симметрия волновых функций колебательных состояний молекулы (см. III, § 101). Симметрия волновых функций первого колебательного состояния (квантовое число $v_a = 1$) совпадает с симметрией D_a

---

[1]) При суммировании по J_2 при заданных k_1 и λ' (а потому и $k_2 = k_1 + \lambda'$) имеем

$$\sum_{J_2} (2J_2+1) \begin{pmatrix} J_2 & 2 & J_1 \\ -k_2 & \lambda' & k_1 \end{pmatrix}^2 = 1$$

в силу (106.13) (см. III). После этого производится суммирование по k_2 (или, что то же, по $\lambda' = k_2 - k_1$) при заданном k_1.

[2]) Мы не рассматриваем здесь эффектов, связанных со взаимодействием колебаний и вращения молекулы (см. III, § 104).

[3]) Эти спектры относятся к инфракрасной области и наблюдаются обычно в поглощении.

типа колебания. Симметрия же высших состояний ($v_a > 1$) дается представлением $[D_a^{v_a}]$ — симметричным произведением представления D_a само на себя v_a раз. Наконец, симметрия состояний с одновременно возбужденными различными колебаниями a и b дается прямым произведением $[D_a^{v_a}] \times [D_b^{v_b}]$ [1]. Способ нахождения правил отбора различных величин (скаляра, вектора, тензора) по типам симметрии изложен в т. III, § 97.

Правила отбора, основанные на свойствах симметрии молекулы, являются строгими. Наряду с ними существуют также и приближенные правила, связанные с предположением о гармоничности колебаний и с разложением функций $\alpha_{ik}(q)$ или $\mathbf{d}(q)$ по степеням колебательных координат q. Они возникают как следствие известного правила отбора для гармонического осциллятора, согласно которому матричные элементы его координаты q отличны от нуля лишь для переходов с изменением колебательного квантового числа $\Delta v = \pm 1$.

§ 62. Естественная ширина спектральных линий

До сих пор при изучении испускания и рассеяния света мы рассматривали все уровни системы (скажем, атома) как строго дискретные. Между тем возбужденные уровни, имея вероятность высветиться, обладают конечным временем жизни. Согласно общим принципам квантовой механики это приводит к тому, что уровни становятся квазидискретными, приобретая конечную (малую) ширину (см. III, § 134); они записываются в виде $E - i\Gamma/2$, где $\Gamma (= \Gamma/\hbar)$ — полная вероятность (в 1 с) всех возможных процессов «распада» данного состояния.

Рассмотрим вопрос о том, каким образом это обстоятельство сказывается на процессе излучения (*V. Weisskopf*, *E. Wigner*, 1930). Заранее ясно, что ввиду конечности ширины уровня испущенный свет окажется не строго монохроматическим: частоты будут разбросаны в интервале $\Delta\omega \sim \Gamma (= \Gamma/\hbar)$. При этом в силу конечности времени жизни начального состояния излучающей системы более естественной является постановка задачи о нахождении полной вероятности испускания фотона данной частоты, а не о вероятности в единицу времени. Вычислим эту вероятность прежде всего для случая перехода атома с некоторого возбужденного уровня

$$E_1 - \frac{i}{2}\Gamma_1$$

[1] Свойства симметрии колебательных волновых функций, разумеется, не зависят от конкретного вида колебательной потенциальной энергии; они не зависят, в частности, от сделанного в т. III, § 101 предположения о гармоничности колебаний.

на основной уровень E_2, обладающий бесконечным временем жизни и потому строго дискретный.

Пусть Ψ — волновая функция атома и фотонного поля, $\widehat{H} = \widehat{H}^{(0)} + \widehat{V}$ — гамильтониан этой системы, причем $\widehat{V}$ — оператор взаимодействия атома и фотонного поля. Будем искать решение уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\widehat{H}^{(0)} + \widehat{V})\Psi \tag{62.1}$$

в виде разложения по волновым функциям невозмущенных состояний системы

$$\Psi = \sum_{\nu} a_\nu(t)\Psi_\nu^{(0)} = \sum_{\nu} a_\nu(t)e^{-i\mathcal{E}_\nu t}\psi_\nu^{(0)}. \tag{62.2}$$

Для коэффициентов $a_\nu(t)$ получим систему уравнений

$$i\frac{\partial a_\nu}{\partial t} = \sum_{\nu'} \langle \nu|V|\nu'\rangle a_{\nu'} \exp\{i(\mathcal{E}_\nu - \mathcal{E}'_\nu)t\}. \tag{62.3}$$

Пусть $|\nu\rangle$ — состояние с энергией $\mathcal{E}_\nu = E_2 + \omega$, в котором атом находится на основном уровне E_2, и имеется один квант с определенной частотой ω; обозначим это состояние символом $|\omega 2\rangle$. В начальный момент времени система находится в состоянии $|1\rangle$, в котором атом возбужден на уровне E_1, а фотоны отсутствуют. Другими словами, при $t = 0$ должно быть

$$a_1 = 1, \ a_{\nu'} = 0 \text{ для } |\nu'\rangle \neq |1\rangle. \tag{62.4}$$

Найденное с этим начальным условием решение уравнения (62.3) даст (при надлежащей нормировке волновых функций) вероятность к моменту t перехода атома $1 \to 2$ с испусканием фотона в интервале частот $d\omega$:

$$|a_{\omega 2}(t)|^2 d\omega.$$

Нас будет интересовать вероятность при $t \to \infty$:

$$dw = |a_{\omega 2}(\infty)|^2 d\omega. \tag{62.5}$$

Для лучшего понимания постановки вопроса напомним, что при нахождении обычной вероятности излучения (в 1 с) с переходом $1 \to 2$ (без учета ширины уровня) уравнение (62.3) надо решать, заменив в первом приближении в его правой стороне все $a_{\nu'}(t)$ значениями (62.4). Полученное решение рассматривается затем при больших t (ср. III, § 42). Мы можем теперь уточнить смысл этой процедуры: она относится ко временам, малым по

сравнению с продолжительностью жизни возбужденного уровня; большие t означают при этом времена, большие по сравнению с периодом $1/(E_1 - E_2)$, но все же малые по сравнению с $1/\Gamma_1$.

В нашем же случае, когда рассматриваются времена, сравнимые с $1/\Gamma_1$, функция $a_1(t)$ убывает со временем по закону

$$a_1(t) = e^{-\Gamma_1 t/2}. \tag{62.6}$$

Функции же $a_{\nu'}(t)$ для состояний $|\nu'\rangle$, которые могут возникнуть при высвечивании атома, со временем возрастают. Если высвечивание с данного уровня E_1 возможно на различные (помимо E_2) уровни атома, то будет много возрастающих функций $a_{\nu'}(t)$; каждая из них отвечает состоянию, в котором атом находится на одном из своих уровней и имеется один фотон соответствующей энергии. Тем не менее в правой стороне уравнения (62.3) по-прежнему останется всего один член — для $|\nu'\rangle = |1\rangle$. Действительно, поскольку матричные элементы могут быть отличны от нуля лишь для переходов с изменением на 1 числа фотонов какой-либо одной энергии, они заведомо равны нулю для переходов между состояниями, содержащими по одному фотону различных энергий.

Таким образом, имеем для $a_{\omega 2}(t)$ уравнение

$$i\frac{da_{\omega 2}}{dt} = \langle\omega 2|V|1\rangle e^{i(E_2+\omega-E_1)t}a_1 = \\ = \langle\omega 2|V|1\rangle \exp\left\{i(\omega-\omega_{12})t - \frac{\Gamma_1}{2}t\right\}, \tag{62.7}$$

где $\omega_{12} = E_1 - E_2$. Интегрируя с условием $a_{\omega 2}(0) = 0$, находим

$$a_{\omega 2} = \langle\omega 2|V|1\rangle\frac{1-\exp\{i(\omega-\omega_{12})t - \Gamma_1 t/2\}}{\omega - \omega_{12} + i\Gamma_1/2}. \tag{62.8}$$

Отсюда вероятность dw (62.5):

$$dw = |\langle\omega 2|V|1\rangle|^2\frac{d\omega}{(\omega-\omega_{12})^2 + \Gamma_1^2/4.}$$

Поскольку ширина $\Gamma_1 \ll \omega_{12}$, в множителе $|\langle\omega 2|V|1\rangle|^2$ можно положить $\omega = \omega_{12}$. Тогда величина $2\pi|\langle\omega 2|V|1\rangle|^2$ есть обычная вероятность излучения (в 1 с) фотона, обладающего частотой ω_{12}, а также другими (кроме частоты) характеристиками (направление движения, поляризация), от существования которых мы до сих пор для упрощения отвлекались. Отметим, что зависимость вероятности от этих характеристик полностью определяется множителем $|\langle\omega 2|V|1\rangle|^2$. Другими словами, учет ширины уровня не меняет поляризационных свойств и углового распределения излучения.

Сумма

$$\Gamma_{1\to 2} = 2\pi \sum |\langle \omega 2|V|1\rangle|^2, \tag{62.9}$$

взятая по поляризациям и направлениям движения фотона, есть полная обычная вероятность излучения. Это есть в то же время та часть ширины уровня E_1 (парциальная ширина), которая связана с переходом $1 \to 2$, в отличие от полной ширины Γ_1, составленной из вкладов от всех возможных способов «распада» данного квазистационарного состояния [1]).

Произведя такое же суммирование вероятности dw, получим следующую окончательную формулу для частотного распределения испускаемого света:

$$dw = w_t \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{d\omega}{(\omega_{12} - \omega)^2 + \Gamma_1^2/4}, \tag{62.10}$$

где $w_t = \Gamma_{1\to 2}/\Gamma_1$ — полная относительная вероятность перехода $1 \to 2$. Это — распределение дисперсионного вида. Форма спектральной линии, описываемая формулой (62.10), свойственна изолированному неподвижному атому; ее называют *естественной* [2]).

Пусть теперь уровень E_2 атома — тоже возбужденный, с конечной шириной Γ_2. Для простоты будем предполагать, что эта ширина связана с переходом атома в основное состояние E_0 с испусканием одного фотона (окончательный ответ — формула (62.12) — от этого предположения не зависит). Тогда процесс распада состояния 1 можно рассматривать как процесс излучения двух фотонов, изучавшийся в § 59. Матричный элемент этого процесса — пока без учета конечности времени жизни состояния 2 — дается формулой

$$\langle \omega\omega' 0|V^{(2)}|1\rangle = \frac{\langle \omega\omega' 0|V|\omega 2\rangle\langle \omega 2|V|1\rangle}{E_0 - E_2 + \omega' + i0} \tag{62.11}$$

(в формуле (59.2) изменено обозначение состояния $2 \to 0$, а в сумме по n оставлен лишь тот из членов, отвечающих нахождению атома в состоянии 2, который резонансно велик при значении ω', близком к $E_2 - E_0$). Если теперь учесть конечное время

---

[1]) Формулы (62.6), (62.9) можно, разумеется, получить и решая аналогичное (62.7) уравнение для $a_1(t)$.

Отметим, что переходы в состояния непрерывного спектра, обусловливающие конечную ширину уровня, не обязательно связаны с испусканием фотонов. Сильно возбужденные (рентгеновские) уровни могут распасться с испусканием электрона и образованием положительного иона в основном состоянии (эффект Оже).

[2]) В отличие от уширения, связанного со взаимодействием атома с другими атомами (уширение столкновениями) или с наличием в источнике атомов, движущихся с различными скоростями (доплеровское уширение).

жизни состояния 2, то это приведет в (62.11) только к замене $E_2 \to E_2 - i\Gamma_2/2$, так что

$$\langle \omega\omega' 0|V^{(2)}|1\rangle = \frac{\langle \omega\omega' 0|V|\omega 2\rangle\langle \omega 2|V|1\rangle}{E_0 - E_2 + \omega' + i\Gamma_2/2}.$$

Подставив это значение матричного элемента в уравнение для $a_{\omega\omega' 2}(t)$ (отличающееся лишь обозначениями от (62.7)), получим после вывода, вполне аналогичного выводу (62.8):

$$a_{\omega\omega' 0}(\infty) = \frac{\langle \omega\omega' 0|V|\omega 2\rangle\langle \omega 2|V|1\rangle}{(\omega' - \omega_{20} + i\Gamma_2/2)(\omega + \omega' - \omega_{10} + i\Gamma_1/2)}.$$

Вероятность испускания фотонов ω и ω' равна

$$dw = |a_{\omega\omega' 0}(\infty)|^2 d\omega d\omega' = \\ = \frac{\Gamma_{1\to 2}}{2\pi}\frac{\Gamma_{2\to 0}}{2\pi}\frac{d\omega d\omega'}{[(\omega' - \omega_{20})^2 + \Gamma_2^2/4][(\omega + \omega' - \omega_{10})^2 + \Gamma_1^2/4]}. \quad (62.12)$$

Как и должно было быть, это выражение имеет резкие максимумы при $\omega' \approx \omega_{20}$ и $\omega \approx \omega_{12}$.

Искомая форма спектральной линии, отвечающей переходу $1 \to 2$, получится интегрированием (62.12) по $d\omega'$ (которое может быть распространено на всю область от $-\infty$ до $+\infty$). Интеграл вычисляется проще всего путем замыкания пути интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в верхней полуплоскости комплексной переменной ω' и определяется суммой вычетов подынтегрального выражения в полюсах

$$\omega' = \omega_{20} + i\Gamma_2/2 \text{ и } \omega' = \omega_{10} - \omega + i\Gamma_1/2.$$

В результате получим

$$dw = w_t \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi}\frac{d\omega}{(\omega - \omega_{12})^2 + (\Gamma_1 + \Gamma_2)^2/4}, \quad (62.13)$$

где $w_t = \Gamma_{1\to 2}\Gamma_{2\to 0}/(\Gamma_1\Gamma_2)$ — полная вероятность двойного перехода $1 \to 2 \to 0$ [1]).

Форма линии (62.13) отличается от (62.10) лишь заменой Γ_1 на $\Gamma_1 + \Gamma_2$ — ширина линии равна сумме ширин начального и конечного состояний.

Отметим, что ширина линии оказывается, вообще говоря, не равной вероятности $\Gamma_{1\to 2}$ самого перехода $1 \to 2$, т. е. не пропорциональной интенсивности линии (как это было бы в классической теории). Поскольку $\Gamma_1 + \Gamma_2 > \Gamma_{1\to 2}$, линия может иметь большую ширину при сравнительно малой интенсивности.

---

[1]) В более сложных случаях w_t — полная вероятность всех каскадов, начинающихся с перехода $1 \to 2$ и заканчивающихся на уровне 0.

§ 63. Резонансная флуоресценция

Учет конечной ширины уровней в задаче о рассеянии света существен в случаях, когда частота ω падающего света близка к одной из «промежуточных» частот ω_{n1} или ω_{2n} — так называемая *резонансная флуоресценция* (*V. Weisskopf*, 1931).

Рассмотрим несмещенное рассеяние системой (скажем, атомом) в основном состоянии, так что начальный и конечный уровни совпадают и строго дискретны. Пусть частота света близка к некоторой частоте ω_{n1}, где уровень n возбужденный, а потому квазидискретный.

Этот вопрос можно было бы решить методом, изложенным в предыдущем параграфе. В этом, однако, нет необходимости, поскольку задача полностью аналогична рассмотренной в т. III, § 134 задаче о нерелятивистском резонансном рассеянии на квазидискретном уровне. Согласно полученным там результатам амплитуда рассеяния должна содержать полюсный множитель

$$\left[\omega - \left(E_n - i\frac{\Gamma_n}{2} - E_1\right)\right]^{-1}.$$

С другой стороны, при $|\omega - \omega_{n1}| \gg \Gamma_n$ формула должна переходить в нерезонансную формулу (59.5). Отсюда ясно, что искомое сечение рассеяния получится просто заменой E_n на $E_n - i\Gamma_n/2$ в формуле (59.5), причем в сумме по n можно ограничиться лишь резонансными членами

$$d\sigma = \frac{\left|\sum_{M_n}(\mathbf{d}_{2n}\mathbf{e}'^*)(\mathbf{d}_{n1}\mathbf{e})\right|^2}{(\omega_{n1} - \omega)^2 + \Gamma_n^2/4}\omega^4 do'. \tag{63.1}$$

Суммирование производится по всем состояниям (с различными проекциями момента M_n), отвечающим резонансному уровню E_n; состояния 1 и 2 относятся к одному и тому же (основному) уровню, но могут различаться значениями M_1 и M_2.

Сечение (63.1) максимально при $\omega = \omega_{n1}$. По порядку величины его значение в максимуме равно $\sigma_{\max} \sim \omega^4 d^4/\Gamma_n^2$. Поскольку вероятность спонтанного перехода $n \to 1$, а с ним и ширина Γ_n имеют порядок $\omega^3 d^2$, это значение

$$\sigma_{\max} \sim \omega^{-2} \sim \lambda^2, \tag{63.2}$$

т. е. порядка квадрата длины волны света и не зависит от постоянной тонкой структуры — вместо типичных значений $\sim r_e^2$ вне области резонанса.

Подчеркнем, что поскольку атом до и после рассеяния находится на строго дискретном (основном) уровне, то и частоты первичного и вторичного фотонов строго совпадают. Поэтому при

облучении монохроматическим светом монохроматичным будет и рассеянный свет. Если же падающий свет имеет спектральное распределение интенсивности $I(\omega)$, причем функция $I(\omega)$ мало меняется на ширине Γ_n, то интенсивность рассеянного света будет пропорциональна

$$\frac{I(\omega_{n1})d\omega}{(\omega-\omega_{n1})^2+\Gamma_n^2/4}. \tag{63.3}$$

Другими словами, форма линии рассеяния будет совпадать с естественной формой линии при спонтанном испускании с уровня E_n.

Сечению (63.1) отвечает тензор рассеяния

$$(c_{ik})_{21}=\frac{\sum_{M_n}(d_i)_{2n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1}-\omega-i\Gamma_n/2}. \tag{63.4}$$

В частности, тензор поляризуемости

$$\alpha_{ik}=(c_{ik})_{11}=\frac{\sum_{M_n}(d_i)_{1n}(d_k)_{n1}}{\omega_{n1}-\omega-i\Gamma_n/2}. \tag{63.5}$$

Сразу же отметим, что прибавление мнимой части к уровням энергии промежуточных возбужденных состояний нарушает эрмитовость тензора поляризуемости и при частотах ниже порога ионизации. У него появляется мнимая часть, непосредственно связанная с поглощением света.

Поглотив квант, атом рано или поздно вновь перейдет в основное состояние с испусканием одного или нескольких фотонов. Поэтому с такой точки зрения сечение поглощения есть просто полное сечение σ_t всех возможных процессов рассеяния [1]). С другой стороны, согласно формуле (59.25), выражающей собой оптическую теорему, это сечение определяется антиэрмитовой частью тензора поляризуемости.

Подставив в (59.25) тензор α_{ik} из (63.5), найдем следующую формулу для сечения поглощения фотона частоты ω, близкой ω_{n1}:

$$\sigma^{(\text{погл})}=4\pi^2\sum_{M_n}|\mathbf{d}_{n1}\mathbf{e}|^2\omega\frac{\Gamma_n/2}{\pi[(\omega-\omega_{n1})^2+\Gamma_n^2/4]}. \tag{63.6}$$

В пределе $\Gamma_n\to 0$ последний множитель в этой формуле стремится к δ-функции $\delta(\omega-\omega_{n1})$, в соответствии с тем, что в этом случае может поглощаться лишь фотон строго определенной частоты. Пусть на атом падает свет со спектральной и угловой

[1]) Подчеркнем, что речь идет о поглощении системой, находящейся в стабильном, основном состоянии. Ввиду конечности времени опыта постановка вопроса для возбужденного состояния была бы другой.

плотностью потока энергии $I_{\mathbf{ke}}$ (ср. (44.7)). Тогда плотность потока числа фотонов равна $\frac{I_{\mathbf{ke}}}{\omega}\,d\omega\,do$, и вероятность поглощения

$$dw^{(\text{погл})} = \sigma^{(\text{погл})}\frac{I_{\mathbf{ke}}}{\omega}\,d\omega\,do. \tag{63.7}$$

Если функция $I_{\mathbf{ke}}(\omega)$ мало меняется на ширине Γ_n, то после интегрирования по частотам получим

$$dw^{(\text{погл})} = 4\pi^2\sum_{M_n}|\mathbf{d}_{n1}\mathbf{e}|^2 I_{\mathbf{ke}}(\omega_{n1})\,d\omega\,do.$$

Заметив, с другой стороны, что, согласно (45.5),

$$dw^{(\text{сп})} = \frac{\omega^3}{2\pi}\sum_{M_n}|\mathbf{d}_{1n}\mathbf{e}^*|^2 do = \frac{\omega^3}{2\pi}\sum_{M_n}|\mathbf{d}_{n1}\mathbf{e}|^2 do$$

есть вероятность спонтанного испускания фотона частоты ω_{n1}, мы вернемся к формуле (44.9).

ГЛАВА VII

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

§ 64. Амплитуда рассеяния

Общая постановка задачи о столкновениях состоит в том, чтобы по заданному начальному состоянию системы (некоторая совокупность свободных частиц) найти вероятности различных возможных конечных состояний (другие совокупности свободных частиц). Если символ $|i\rangle$ обозначает начальное состояние, то результат столкновения можно представить как суперпозицию

$$\sum_f |f\rangle\langle f|S|i\rangle, \tag{64.1}$$

где суммирование производится по различным возможным конечным состояниям $|f\rangle$. Коэффициенты этого разложения $\langle f|S|i\rangle$ (или в краткой записи S_{fi}) составляют *матрицу рассеяния*, или *S-матрицу* [1]). Квадраты $|S_{fi}|^2$ дают вероятности переходов в определенные состояния $|f\rangle$.

В отсутствие взаимодействия между частицами состояние системы не менялось бы, чему соответствовала бы единичная S-матрица (отсутствие рассеяния). Удобно всегда выделять эту единицу, представив матрицу рассеяния в виде

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)T_{fi}, \tag{64.2}$$

где T_{fi} — новая матрица. Во втором члене выделена четырехмерная δ-функция, выражающая закон сохранения 4-импульса (P_i и P_f — суммы 4-импульсов всех частиц в начальном и конечном состояниях); остальные множители введены для удобства в дальнейшем. В недиагональных матричных элементах первый член в (64.2) выпадает, так что для перехода $i \to f$ элементы матриц S и T связаны друг с другом соотношением

$$S_{fi} = i(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)T_{fi}. \tag{64.3}$$

Матричные элементы T_{fi}, остающиеся после выделения δ-функции, будем называть *амплитудами рассеяния.*

При возведении модулей $|S_{fi}|$ в квадрат появится квадрат δ-функции. Его надо понимать следующим образом. δ-функция

[1]) От английского слова scattering или немецкого Streuung.

возникает от интеграла

$$\delta^{(4)}(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(P_f - P_i)x} d^4x. \qquad (64.4)$$

Если же вычислять другой такой же интеграл при $P_f = P_i$ (в силу наличия уже одной δ-функции), причем распространить интегрирование по некоторому большому, но конечному объему V и интервалу времени t, то получится $Vt/(2\pi)^4$ [1]) . Поэтому можно написать

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)|T_{fi}|^2 Vt.$$

Разделив на t, получим вероятность перехода в единицу времени

$$w_{i\to f} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)|T_{fi}|^2 V. \qquad (64.5)$$

Каждая из свободных частиц (начальных и конечных) описывается своей волновой функцией — плоской волной с некоторой амплитудой u (для электрона это — биспинор, для фотона — 4-вектор и т. п.). Амплитуда рассеяния T_{fi} имеет структуру вида

$$T_{fi} = u_1^* u_2^* \ldots Q u_1 u_2 \ldots, \qquad (64.6)$$

где слева стоят амплитуды волновых функций конечных, а справа — начальных частиц; Q есть некоторая матрица (по отношению к индексам компонент амплитуд всех частиц).

Наиболее важны случаи, когда в начальном состоянии имеется всего одна или две частицы. В первом случае речь идет о распаде, во втором — о столкновении двух частиц.

Рассмотрим сначала распад частицы на произвольное число других частиц с импульсами $\mathbf{p}'_a$ в элементе импульсного пространства $\prod d^3p'_a$ (индекс a нумерует частицы в конечном состоянии, так что $\sum \mathbf{p}'_a = \mathbf{P}_f$). Число состояний, приходящихся на этот элемент (и на нормировочный объем V [2]) , есть

$$\prod_a \frac{Vd^3p'_a}{(2\pi)^3}.$$

На эту величину надо умножить выражение (64.5):

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)|T_{fi}|^2 V \prod_a \frac{Vd^3p'_a}{(2\pi)^3}. \qquad (64.7)$$

[1]) Это можно показать иначе, вычислив сначала интеграл по каждой из координат в (64.4) в конечных пределах и затем устремив пределы к бесконечности с помощью формулы (42.4) (см. III):

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{\sin^2 \alpha\xi}{\xi\alpha^2} = \pi\delta(\alpha).$$

[2]) Для большей наглядности вычислений в этом параграфе не будем полагать нормировочный объем равным единице.

При этом волновые функции всех частиц, используемые при вычислении матричного элемента, должны быть нормированы на одну частицу в объеме V. Так, для электрона — это плоская волна (23.1), для частицы со спином 1 — (14.12), для фотона — (4.3). Все эти функции содержат множитель $1/\sqrt{2\varepsilon V}$, где ε — энергия частицы. Однако в дальнейшем будет удобным условиться писать во всех вычислениях волновые функции частиц без этих множителей (которые включим в выражение для вероятности). Таким образом, электронная плоская волна будет

$$\psi = ue^{-ipx}, \quad \overline{u}u = 2m, \tag{64.8}$$

а фотонная волна

$$A = \sqrt{4\pi}ee^{-ikx}, \quad ee^* = -1, \; ek = 0. \tag{64.9}$$

Вычисленную с такими функциями амплитуду рассеяния обозначим (в отличие от T_{fi}) M_{fi}. Очевидно, что

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{(2\varepsilon_1 V \ldots 2\varepsilon_1' V \ldots)^{1/2}}; \tag{64.10}$$

в знаменателе стоит по одному множителю $\sqrt{2\varepsilon V}$ на каждую начальную или конечную частицу.

В частности, для вероятности распада получим вместо (64.7)

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)|M_{fi}|^2 \frac{1}{2\varepsilon} \prod_a \frac{d^3p_a'}{(2\pi)^3 2\varepsilon_a'}, \tag{64.11}$$

где ε — энергия распадающейся частицы; нормировочный объем, как и должно быть, из этой формулы выпал [1]).

Придадим формуле (64.11) более законченный вид (устранив в ней δ-функции) для случая, когда распад происходит на две частицы (с импульсами $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$ и энергиями ε_1', ε_2'). В системе покоя распадающейся частицы $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2' \equiv \mathbf{p}'$, $\varepsilon_1' + \varepsilon_2' = m$, так что имеем

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^2}|M_{fi}|^2 \frac{1}{2m} \frac{1}{4\varepsilon_1'\varepsilon_2'} \delta(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2') \delta(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' - m) d^3p_1' d^3p_2'.$$

Первая δ-функция устраняется интегрированием по d^3p_2'; дифференциал же d^3p_1' переписываем в виде

$$d^3p' = \mathbf{p}'^2 d|\mathbf{p}'| do = |\mathbf{p}'| do \frac{\varepsilon_1'\varepsilon_2' d(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')}{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'} \tag{64.12}$$

[1]) Если среди конечных частиц имеется N тождественных, то при интегрировании по их импульсам (с целью нахождения интегральной вероятности) должен быть введен множитель $1/N!$, учитывающий тождественность состояний, различающихся перестановкой частиц.

(в справедливости этой записи легко убедиться, заметив, что $\varepsilon_1'^2 - m_1'^2 = \varepsilon_2'^2 - m_2'^2 = \mathbf{p}'^2$). Интегрирование по $d(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')$ устраняет вторую δ-функцию, и получается

$$dw = \frac{1}{32\pi^2 m^2}|M_{fi}|^2 |\mathbf{p}'| do'. \tag{64.13}$$

Рассмотрим теперь столкновение двух частиц (с импульсами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ и энергиями ε_1 и ε_2) с превращением их в совокупность произвольного числа частиц с импульсами $\mathbf{p}_a'$. Вместо (64.11) получим теперь

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)|M_{fi}|^2 \frac{1}{4\varepsilon_1\varepsilon_2 V} \prod_a \frac{d^3 p_a'}{(2\pi)^3 2\varepsilon_a'}.$$

Интересующей нас величиной в этом случае является, однако, не вероятность, а сечение $d\sigma$. Инвариантное (относительно преобразований Лоренца) сечение получается из dw делением на величину

$$j = \frac{I}{V\varepsilon_1\varepsilon_2}, \tag{64.14}$$

где I обозначает 4-скаляр

$$I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \tag{64.15}$$

(см. II, § 12) [1]. В системе центра инерции ($\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$)

$$I = |\mathbf{p}|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \tag{64.16}$$

так что

$$j = \frac{|\mathbf{p}|}{V}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = \frac{v_1 + v_2}{V}, \tag{64.17}$$

что совпадает с обычным определением плотности потока сталкивающихся частиц (v_1, v_2 — их скорости) [2]. Таким образом, находим для сечения формулу

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)|M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \prod_a \frac{d^3 p_a'}{(2\pi)^3 2\varepsilon_a'}. \tag{64.18}$$

---

[1]) На будущее выпишем также выражение для I в виде

$$I^2 = {}^1\!/\!_4[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2], \tag{64.15a}$$

где $s = (p_1 + p_2)^2$.

[2]) В произвольной системе отсчета

$$j = (1/V)\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2]^2}.$$

Это выражение сводится к обычной плотности потока во всех случаях, когда $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$: $j = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|/V$.

Придадим этой формуле окончательный вид, исключив из нее δ-функцию для случая, когда в конечном состоянии тоже имеется всего две частицы. Будем рассматривать процесс в системе центра инерции. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1' + \varepsilon_2'$ — полная энергия; $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2' \equiv \mathbf{p}'$ — начальный и конечный импульсы. Устранение δ-функции производится так же, как и при выводе (64.13), и получается

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}|M_{fi}|^2\frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|\varepsilon^2}do' \tag{64.19}$$

(в частном случае упругого рассеяния, когда род частиц при столкновении не меняется, $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$).

Перепишем эту формулу еще и в другом виде, введя в нее инвариантную величину

$$t \equiv (p_1 - p_1')^2 = m_1^2 + m_1'^2 - 2(p_1p_1') = \\ = m_1^2 + m_1'^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_1' + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_1'|\cos\theta, \tag{64.20}$$

где θ — угол между $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_1'$. В системе центра инерции импульсы $|\mathbf{p}_1| \equiv |\mathbf{p}|$ и $|\mathbf{p}_1'| \equiv |\mathbf{p}'|$ определяются одной только полной энергией ε, и при заданном ε

$$dt = 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|d\cos\theta. \tag{64.21}$$

Поэтому в (64.19) можно заменить

$$do' = -d\varphi d\cos\theta = \frac{d\varphi d(-t)}{2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|},$$

где (φ — азимут $\mathbf{p}_1'$ относительно $\mathbf{p}_1$ [1]) . Таким образом,

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi}|M_{fi}|^2\frac{dt}{I^2}\frac{d\varphi}{2\pi} \tag{64.22}$$

(мы снова ввели инвариант I согласно (64.16)). Азимут φ, а с ним и сечение в форме (64.22) инвариантны относительно преобразований Лоренца, не меняющих направление относительного движения частиц. Если сечение не зависит от азимута, формула (64.22) принимает особенно простой вид

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi}|M_{fi}|^2\frac{dt}{I^2}. \tag{64.23}$$

Если одна из сталкивающихся частиц достаточно тяжела (и ее состояние в результате столкновения не меняется), то ее роль

[1]) Поскольку правильный знак дифференциала в подобных случаях очевиден, будем ниже для простоты писать dt вместо $d(-t)$ и т. п.

в процессе сводится к роли неподвижного источника постоянного поля, в котором рассеивается другая частица. В соответствии с тем, что в постоянном поле сохраняется энергия (но не импульс!) системы, при такой трактовке процесса столкновения представим элементы S-матрицы в виде

$$S_{fi} = i \cdot 2\pi\delta(E_f - E_i)T_{fi}. \tag{64.24}$$

В выражении для $|S_{fi}|^2$ квадрат одномерной δ-функции должен пониматься как

$$[\delta(E_f - E_i)]^2 \to \frac{1}{2\pi}\delta(E_f - E_i)t.$$

Перейдя затем (как и при выводе (64.11)) к амплитуде M_{fi} вместо T_{fi}, получим следующее выражение для вероятности процесса, в котором одна частица, рассеиваясь в постоянном поле, создает в конечном состоянии некоторое число других частиц:

$$dw = 2\pi\delta(E_f - \varepsilon)|M_{fi}|^2 \frac{1}{2\varepsilon V} \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}.$$

Здесь снова $\varepsilon(= E_i)$ — энергия начальной частицы, $\mathbf{p}'_a$ и ε'_a — импульсы и энергии конечных частиц. Сечение же рассеяния получится делением dw на плотность потока $j = v/V$, где $v = |\mathbf{p}|/\varepsilon$ — скорость рассеиваемой частицы. В результате нормировочный объем снова выпадает из ответа и получается

$$d\sigma = 2\pi\delta(E_f - \varepsilon)|M_{fi}|^2 \frac{1}{2|\mathbf{p}|} \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}. \tag{64.25}$$

В частном случае упругого рассеяния в конечном состоянии имеется тоже одна частица с тем же (по величине) импульсом и той же энергией. Заменив $d^3p' \to \mathbf{p}'^2 d|\mathbf{p}'|do' = |\mathbf{p}'|\varepsilon' d\varepsilon' do'$ и устранив $\delta(\varepsilon' - \varepsilon)$ интегрированием по $d\varepsilon'$, получим сечение в виде

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}|M_{fi}|^2 do'. \tag{64.26}$$

Наконец, если внешнее поле зависит от времени (скажем, поле системы частиц, совершающих заданное движение), то в S-матрице отсутствует также и δ-функция от энергии. Тогда $S_{fi} = iT_{fi}$ и после перехода от T_{fi} к M_{fi} согласно (64.10) вероятность, например, процесса, в котором поле рождает определенную совокупность частиц, будет даваться формулой

$$dw = |M_{fi}|^2 \prod_a \frac{d^3p'_a}{(2\pi)^3 2\varepsilon'_a}. \tag{64.27}$$

§ 65. Реакции с поляризованными частицами

В этом параграфе мы покажем на простых примерах, каким образом учитывается при вычислении сечения рассеяния поляризационное состояние участвующих в реакции частиц.

Пусть в начальном и в конечном состояниях имеется по одному электрону. Тогда амплитуда рассеяния имеет вид

$$M_{fi} = \overline{u}' A u (\equiv \overline{u}'_i A_{ik} u_k), \tag{65.1}$$

где u и u' — биспинорные амплитуды начального и конечного электронов, A — некоторая матрица (зависящая от импульсов и поляризаций остальных участвующих в реакции частиц, если таковые имеются).

Сечение рассеяния пропорционально $|M_{fi}|^2$. Имеем

$$(\overline{u}Au)^* = u'\gamma^{0*}A^*u^* = u^*A^+\gamma^{0+}u',$$

или

$$(\overline{u}'Au)^* = \overline{u}\overline{A}u', \tag{65.2}$$

где [1])

$$\overline{A} = \gamma^0 A^+ \gamma^0.$$

Таким образом,

$$|M_{fi}|^2 = (\overline{u}'Au)(\overline{u}\overline{A}u') \equiv u'_i\overline{u}'_k A_{kl} u_l \overline{u}_m \overline{A}_{mi}. \tag{65.3}$$

Если начальный электрон находился в смешанном (частично поляризованном) состоянии с матрицей плотности ρ и если нас интересует сечение процесса с образованием конечного электрона в определенном наперед заданном поляризационном состоянии ρ', то надо заменить произведения компонент биспинорных амплитуд

$$u'_i\overline{u}'_k \to \rho'_{ik}, \quad u_l\overline{u}_m \to \rho_{lm}.$$

Тогда

$$|M_{fi}|^2 = \mathrm{Sp}(\rho' A \rho \overline{A}). \tag{65.4}$$

Матрицы плотности ρ и ρ' даются формулой (29.13)

$$\rho = \frac{1}{2}(\gamma p + m)[1 - \gamma^5(\gamma a)] \tag{65.5}$$

(и аналогично для ρ').

Если начальный электрон не поляризован, то

$$\rho = \frac{1}{2}(\gamma p + m). \tag{65.6}$$

[1]) В связи с необходимостью образовывать матрицу $\overline{A}$ отметим для будущего следующие легко проверяемые равенства:

$$\overline{\gamma}^\mu = \gamma^\mu, \ \overline{\gamma^\mu\gamma^\nu\ldots\gamma^\rho} = \gamma^\rho\ldots\gamma^\nu\gamma^\mu, \ \overline{\gamma}^5 = -\gamma^5, \ \overline{\gamma^5\gamma^\mu} = \gamma^5\gamma^\mu. \tag{65.2a}$$

Подстановка этого выражения эквивалентна усреднению по поляризациям электрона. Если требуется определить сечение рассеяния с произвольной поляризацией конечного электрона, то надо положить также $\rho' = (\gamma p' + m)/2$ и удвоить результат; эта операция эквивалентна суммированию по поляризациям электрона. Таким образом, получим

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{поляр}} |M_{fi}|^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \{(\gamma p' + m) A (\gamma p + m) \overline{A}\}, \tag{65.7}$$

где $\sum_{\text{поляр}}$ означает суммирование по начальным и конечным поляризациям, а множитель $1/2$ превращает одно из суммирований в усреднение.

Матрица плотности ρ' в (65.4) — вспомогательное понятие, характеризующее, по существу, свойства детектора (выделяющего ту или иную поляризацию конечного электрона), а не процесса рассеяния как такового. Возникает вопрос о поляризационном состоянии электрона, в которое он приводится процессом рассеяния самим по себе. Если $\rho^{(f)}$ — матрица плотности этого состояния, то вероятность детектирования электрона в состоянии ρ' получится проецированием $\rho^{(f)}$ на ρ', т. е. образованием следа $\operatorname{Sp}(\rho^{(f)}\rho')$. Этой же величине будет пропорционально соответствующее сечение, т. е. квадрат $|M_{fi}|^2$. Сравнив с (65.4), мы делаем вывод, что

$$\rho^{(f)} \sim A \rho \overline{A}. \tag{65.8}$$

Поскольку заранее известно, что $\rho^{(f)}$ должно иметь вид (65.5) с некоторым 4-вектором $a^{(f)}$, дело сводится к определению последнего. Это можно было бы сделать по формуле (29.14), но еще проще поступить, как будет указано ниже.

Мы видели в § 29, что компоненты 4-вектора a выражаются через компоненты 3-вектора $\boldsymbol{\zeta}$ — среднего (удвоенного) значения спина электрона в его системе покоя. Поляризационные состояния электронов полностью определяются этими векторами, и целесообразно выражать через них также и сечение рассеяния. Очевидно, что квадрат $|M_{fi}|^2$ будет линеен по каждому из векторов $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\zeta}'$, относящихся к начальному и конечному электронам. Как функция от $\boldsymbol{\zeta}'$ он будет иметь вид

$$|M_{fi}|^2 = \alpha + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\zeta}', \tag{65.9}$$

где α и β сами — линейные функции $\boldsymbol{\zeta}$.

Вектор $\boldsymbol{\zeta}'$ в (65.9) — заданная поляризация конечного электрона, выделяемая детектором. Вектор же $\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$, отвечающий матрице плотности $\rho^{(f)}$, легко найти следующим образом. Согласно сказанному выше

$$|M_{fi}|^2 \sim \operatorname{Sp}(\rho' \rho^{(f)}).$$

Ввиду релятивистской инвариантности этой величины можно вычислять ее в любой системе отсчета. В системе покоя конечного электрона имеем согласно (29.20)

$$\rho'\rho^{(f)} \sim (1+\boldsymbol{\sigma\zeta}')(1+\boldsymbol{\sigma\zeta}^{(f)}).$$

Поэтому

$$|M_{fi}|^2 \sim 1+\boldsymbol{\zeta}'\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$$

и, сравнив с (65.9), находим, что

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \boldsymbol{\beta}/\alpha. \tag{65.10}$$

Таким образом, вычислив сечение как функцию параметра $\boldsymbol{\zeta}'$, мы тем самым определим и поляризацию $\boldsymbol{\zeta}^{(f)}$.

В более сложных случаях (более чем по одному начальному или конечному электрону) вычисления производятся аналогичным образом по изложенной схеме.

Так, если в начале и конце имеется по два электрона, амплитуда рассеяния приобретает вид

$$M_{fi} = (\overline{u}'_1 A u_1)(\overline{u}'_2 B u_2) + (\overline{u}'_2 C u_1)(\overline{u}'_1 D u_2),$$

где u_1, u_2 — биспинорные амплитуды начальных, а u'_1, u'_2 — конечных электронов. При образовании квадрата $|M_{fi}|^2$ появятся члены вида

$$|\overline{u}'_1 A u_1|^2 |\overline{u}'_2 B u_2|^2$$

и вида

$$(\overline{u}'_1 A u_1)(\overline{u}'_2 B u_2)(\overline{u}'_2 C u_1)^*(\overline{u}'_1 D u_2)^*.$$

Первые приводятся к произведениям двух следов вида (65.4), а вторые — к следам вида

$$\mathrm{Sp}\,(\rho'_1 A \rho_1 \overline{C} \rho'_2 B \rho_2 \overline{D}).$$

Позитроны описываются амплитудами «отрицательной частоты» $u(-p)$. Для реакций с участием позитронов отличие от изложенного выше сводится к тому, что в качестве матриц плотности надо пользоваться выражениями, отличающимися от (65.5), (65.6) лишь изменением знака перед m (ср. (29.16), (29.17)).

Обратимся к поляризационным состояниям участвующих в реакции фотонов.

Поляризация каждого начального фотона входит в амплитуду рассеяния линейно в виде 4-вектора e, а каждого конечного фотона — в виде e^*. В обоих случаях в сечение (т. е. квадрат $|M_{fi}^2|$ входит 4-тензор $e_\mu e_\nu^*$. Для перехода к случаю произвольного частично поляризованного состояния этот тензор должен

быть заменен четырехмерной матрицей плотности — 4-тензором $\rho_{\mu\nu}$:

$$e_\mu e_\nu^* \to \rho_{\mu\nu}. \tag{65.11}$$

В частности, для неполяризованного фотона, согласно (8.15),

$$\rho_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}/2. \tag{65.12}$$

Таким образом, усреднение по поляризациям фотона сводится к тензорному свертыванию в $|M_{fi}|^2$ по соответствующим двум тензорным индексам $\mu\nu$ [1]).

Если требуется произвести не усреднение, а суммирование по поляризациям фотона, то надо заменить $e_\mu e_\nu^*$ вдвое бóльшим выражением:

$$e_\mu e_\nu^* \to -g_{\mu\nu}. \tag{65.13}$$

Матрица плотности поляризованного фотона дается формулой (8.17). Выбор 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ фигурирующих в этом выражении, диктуется обычно конкретными условиями задачи. В одних случаях эти векторы могут быть связаны с определенными пространственными направлениями в некоторой системе отсчета. В других случаях более удобно связывать их с фигурирующими в условиях задачи характерными 4-векторами — 4-импульсами частиц.

В (8.17) поляризация фотона описывается параметрами Стокса, составляющими «вектор» $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Как и для электрона, необходимо отличать поляризацию $\boldsymbol{\xi}^{(f)}$ конечного фотона как такового от поляризации $\boldsymbol{\xi}'$, выделяемой детектором. Если известен квадрат амплитуды рассеяния как функция параметра $\boldsymbol{\xi}'$:

$$|M_{fi}|^2 = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta\xi}',$$

то поляризация $\boldsymbol{\xi}^{(f)} = \boldsymbol{\beta}/\alpha$, что аналогично формуле (65.10).

§ 66. Кинематические инварианты

Рассмотрим некоторые кинематические соотношения для процессов рассеяния, в которых как в начальном, так и в конечном состояниях имеется всего по две частицы. Мы имеем в виду соотношения, являющиеся следствием одних лишь общих законов сохранения и потому справедливые вне зависимости от природы частиц и от законов их взаимодействия.

---

[1]) Выражение (65.12) как бы сводит усреднение по двум реально возможным поляризациям фотона к усреднению по четырем независимым направлениям 4-вектора e.

Запишем закон сохранения 4-импульса в общем виде, не предрешающем, которые из импульсов относятся к начальным, а которые — к конечным частицам:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0. \tag{66.1}$$

Здесь $\pm q_a$ — 4-векторы импульсов, причем два из них отвечают падающим частицам, а два — рассеянным; для последних импульсами являются $-q_a$. Другими словами, у двух из q_a временная компонента $q_a^0 > 0$, а у двух $q_a^0 < 0$.

Наряду с сохранением 4-импульса должен соблюдаться закон сохранения заряда. При этом под зарядом можно понимать не только электрический заряд, но и другие сохраняющиеся величины, имеющие разный знак у частиц и античастиц.

При заданных видах участвующих в процессе частиц квадраты 4-векторов q_a являются заданными квадратами масс частиц ($q_a^2 = m_a^2$). В зависимости от значений, пробегаемых временными компонентами q_a^0, и от значений зарядов мы получим три разные реакции. Запишем эти три процесса так:

$$\begin{aligned} \text{I.}\ & 1 + 2 \to 3 + 4, \\ \text{II.}\ & 1 + \overline{3} \to \overline{2} + 4, \\ \text{III.}\ & 1 + \overline{4} \to \overline{2} + 3. \end{aligned} \tag{66.2}$$

Здесь цифра означает номер частицы, а черта над цифрой отличает античастицу от частицы. Переходу от одной из реакций к другой, т. е. перенесению частицы из одной стороны формулы в другую, отвечает изменение знака соответствующей временной компоненты q_a^0, а также знака заряда, т. е. замена частицы античастицей. (Наряду с процессами (66.2) возможны, конечно, и обратные реакции.)

О трех процессах (66.2) говорят как о трех *перекрестных* (или *кросс-*) *каналах* одной (обобщенной) реакции.

Приведем несколько примеров. Если частицы 1 и 3 — электроны, а 2 и 4 — фотоны, то канал I представляет собой рассеяние фотона электроном; ввиду истинной нейтральности фотона канал III — то же, что I. Канал же II есть превращение электрон-позитронной пары в два фотона. Если все четыре частицы — электроны, то канал I — рассеяние электрона на электроне, а каналы II и III — рассеяние позитрона на электроне. Если частицы 1 и 3 — электроны, а 2 и 4 — мюоны, то канал I — рассеяние e на μ, канал III — рассеяние e на $\overline{\mu}$, канал II — превращение пары $e\overline{e}$ в пару $\mu\overline{\mu}$.

При рассмотрении процессов рассеяния особую роль играют инвариантные величины, которые можно составить из 4-импульсов. Их функцией являются инвариантные амплитуды рассеяния (см. § 70).

Из четырех 4-импульсов можно составить две независимые инвариантные величины. Действительно, в силу (66.1) всего три 4-вектора q_a независимы; пусть это будут q_1, q_2, q_3. Из них можно составить шесть инвариантов: три квадрата q_1^2, q_2^2, q_3^2 и три произведения q_1q_2, q_1q_3, q_2q_3. Но первые три есть заданные квадраты масс, а вторые три связаны одним соотношением, следующим из равенства [1])

$$(q_1 + q_2 + q_3)^2 = q_4^2 = m_4^2.$$

Для достижения большей симметрии удобно, однако, рассматривать не два, а три инварианта, в качестве которых выберем следующие:

$$\begin{aligned} s &= (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2, \\ t &= (q_1 + q_3)^2 = (q_2 + q_4)^2, \\ u &= (q_1 + q_4)^2 = (q_2 + q_3)^2. \end{aligned} \tag{66.3}$$

Они связаны, как легко видеть, соотношением

$$s + t + u = h, \tag{66.4}$$

где

$$h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \tag{66.5}$$

В основном (I) канале инвариант s имеет простой физический смысл. Это есть квадрат полной энергии сталкивающихся частиц (1 и 2) в системе их центра инерции (при $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$: $s = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$). В канале II аналогичную роль играет инвариант t, а в канале III — инвариант u. В связи с этим каналы I, II, III часто называют s-, t- и u-каналами.

Не представляет труда выразить инварианты s, t, u через энергии и импульсы сталкивающихся частиц в каждом из каналов. Рассмотрим s-канал. В системе центра инерции частиц 1 и 2 временные и пространственные компоненты 4-векторов q_a задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 = (\varepsilon_1, \mathbf{p}_s), & q_2 &= p_2 = (\varepsilon_2, -\mathbf{p}_s), \\ q_3 &= -p_3 = (-\varepsilon_3, -\mathbf{p}'_s) & q_4 &= -p_4 = (-\varepsilon_4, \mathbf{p}'_s) \end{aligned} \tag{66.6}$$

[1]) В общем случае, когда в реакции участвуют $n \geqslant 4$ частиц, число функционально независимых инвариантных переменных равно $3n - 10$. Действительно, имеется всего $4n$ величин — компонент n 4-импульсов q_a. Между ними имеется n функциональных связей $q_a^2 = m_a^2$ и еще четыре, даваемых законом сохранения $\sum q_a = 0$. Произвольные значения могут быть приданы шести величинам — по числу параметров, определяющих общее преобразование Лоренца (общий четырехмерный поворот). Поэтому число независимых инвариантных переменных: $4n - n - 4 - 6 = 3n - 10$.

(индекс s у $\mathbf{p}_s$, $\mathbf{p}'_s$ напоминает о том, что эти импульсы относятся к реакции в s-канале). Тогда

$$s = \varepsilon_s^2, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4; \tag{66.7}$$

$$\begin{aligned} 4s\mathbf{p}_s^2 &= [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2], \\ 4s\mathbf{p}_s'^2 &= [s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2]; \end{aligned} \tag{66.8}$$

$$\begin{aligned} 2t &= h - s + 4\mathbf{p}_s\mathbf{p}'_s - \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2), \\ 2u &= h - s - 4\mathbf{p}_s\mathbf{p}'_s + \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2). \end{aligned} \tag{66.9}$$

В случае упругого рассеяния ($m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$) имеем $|\mathbf{p}_s| = |\mathbf{p}'_s|$, так что $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$. Вместо (66.9) при этом получаются более простые формулы

$$\begin{aligned} t &= -(\mathbf{p}_s - \mathbf{p}'_s)^2 = -2\mathbf{p}_s^2(1 - \cos\theta_s), \\ u &= -2\mathbf{p}_s^2(1 + \cos\theta_s) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2, \end{aligned} \tag{66.10}$$

где θ_s — угол между $\mathbf{p}_s$ и $\mathbf{p}'_s$. Отметим, что инвариант $-t$ представляет собой при этом квадрат переданного при столкновении (трехмерного) импульса.

Аналогичные формулы для других каналов получаются простым изменением обозначений. Для перехода к t-каналу надо произвести в (66.6)–(66.10) замену $s \leftrightarrow t$, $2 \leftrightarrow 3$; для перехода к u-каналу — замену $s \leftrightarrow u$, $2 \leftrightarrow 4$.

§ 67. Физические области

Рассматривая амплитуды рассеяния как функции независимых переменных s, t, u (связанных лишь соотношением $s+t+u = h$), мы сталкиваемся с необходимостью различать физически допустимые и недопустимые области их значений. Значения, которые могут отвечать физическому процессу рассеяния, должны удовлетворять определенным условиям, являющимся следствиями закона сохранения 4-импульса и того факта, что квадрат каждого из 4-векторов q_a есть заданная величина $q_a^2 = m_a^2$.

Произведение двух 4-импульсов

$$p_a p_b \geqslant m_a m_b. \tag{67.1}$$

Поэтому $\quad (q_a + q_b)^2 = (p_a + p_b)^2 \geqslant (m_a + m_b)^2$,

если $q_a = p_a$, $q_b = p_b$ (или $q_a = -p_a$, $q_b = -p_b$),

или же $\quad (q_a + q_b)^2 = (p_a - p_b)^2 \leqslant (m_a - m_b)^2$,

если $q_a = p_a$, $q_b = -p_b$.

Отсюда следует, что для реакции в s-канале:

$$\begin{aligned} &(m_1+m_2)^2 \leqslant s \geqslant (m_3+m_4)^2, \\ &(m_1-m_3)^2 \geqslant t \leqslant (m_2-m_4)^2, \\ &(m_1-m_4)^2 \geqslant u \leqslant (m_2-m_3)^2 \end{aligned} \tag{67.2}$$

(аналогичные неравенства — в t- и u-каналах).

Для нахождения остальных условий составим 4-вектор L, дуальный произведению каких-либо трех из 4-векторов q_a, скажем

$$L_\lambda = e_{\lambda\mu\nu\rho} q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho. \tag{67.3}$$

В системе покоя одной из частиц (например, частицы 1) $q_1 = (q_1^0, 0)$. При этом L имеет лишь пространственные компоненты: $L_i = e_{i0kl} q_1^0 q_2^k q_3^l$. Другими словами, L — пространственноподобный вектор, и во всякой системе отсчета $L^2 \leqslant 0$. Раскрыв квадрат L^2, получим условие

$$\begin{vmatrix} q_1^2 & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_2q_1 & q_2^2 & q_2q_3 \\ q_3q_1 & q_3q_2 & q_3^2 \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{67.4}$$

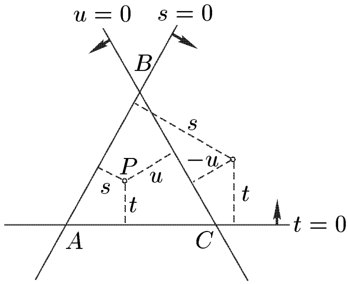


Рис. 5

Оно может быть выражено через инварианты s, t, u в едином для всех каналов виде

$$stu \geqslant as + bt + cu, \tag{67.5}$$

где

$$\begin{aligned} ah &= (m_1^2m_2^2 - m_3^2m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2), \\ bh &= (m_1^2m_3^2 - m_2^2m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2), \\ ch &= (m_1^2m_4^2 - m_2^2m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2) \end{aligned} \tag{67.6}$$

(*T. W. B. Kibble*, 1960).

Для графического изображения областей изменения переменных s, t, u удобно пользоваться так называемыми треугольными координатами на плоскости (плоскость Мандельстама; *S. Mandelstam*, 1958). Координатными осями в ней являются три прямые, образующие в пересечении равносторонний треугольник. Координаты s, t, u отсчитываются по направлениям, перпендикулярным этим трем прямым. (Считаем положительными направления внутрь треугольника, как указано на рис. 5 стрелками.) Другими словами, каждой точке плоскости отвечают значения s, t, u, изображающиеся (с соответствующими знаками)

длинами перпендикуляров, опущенных на три оси. Выполнение условия $s+t+u=h$ обеспечивается при этом известной геометрической теоремой (если высота равностороннего треугольника равна h) [1]).

Рассмотрим важный случай, когда основному (s) каналу отвечает упругое рассеяние; при этом массы частиц попарно одинаковы:

$$m_1 = m_3 \equiv m, \qquad m_2 = m_4 \equiv \mu. \tag{67.7}$$

Пусть $m > \mu$. В условии (67.5) имеем

$$h = 2(m^2+\mu^2), \quad a = c = 0, \quad b = (m^2-\mu^2)^2,$$

так что

$$sut \geqslant (m^2-\mu^2)^2 t. \tag{67.8}$$

Граница области, определяемой этим неравенством, состоит из прямой $t=0$ и гиперболы

$$su = (m^2-\mu^2)^2, \tag{67.9}$$

две ветви которой лежат в секторах $u<0$, $s<0$ и $s>0$, $u>0$; оси $s=0$ и $u=0$ являются асимптотами гиперболы. Вместо (67.8) можно написать

$$t>0,\ su > (m^2-\mu^2)^2$$

или

$$t<0,\ su < (m^2-\mu^2)^2.$$

Кроме того, из условий (67.2) надо дополнительно учесть неравенство $s > (m+\mu)^2$ в s-канале и $u > (m+\mu)^2$ в u-канале; остальные неравенства удовлетворяются после этого автоматически. В результате найдем, что каналам I, II, III (s, t, u) отвечают, как говорят, *физические области*, изображенные на рис. 6 штриховкой.

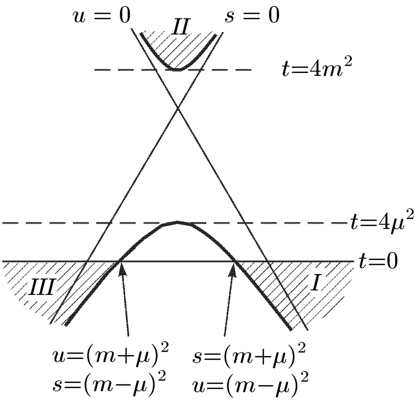


Рис. 6

Если $\mu=0$ (частицы 2, 4 — фотоны), то нижняя ветвь гиперболы касается оси $t=0$ и физические области выглядят, как показано на рис. 7.

[1]) Соединив, например, точку P (рис. 5) с тремя вершинами треугольника ABC, мы разобьем его на три треугольника с высотами s, t, u; приравняв сумму их площадей площади треугольника ABC, найдем требуемое равенство. Аналогичным образом оно доказывается и в случае, когда точка P лежит вне треугольника ABC.

Если же $m = \mu$, то границы области (67.8) вырождаются в координатные оси и физическими областями являются показанные на рис. 8 три сектора.

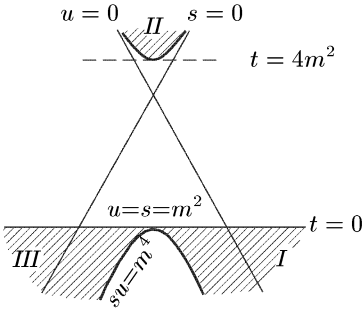


Рис. 7

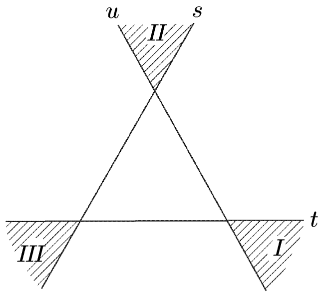


Рис. 8

В общем случае четырех различных масс уравнение

$$stu = as + bt + cu \tag{67.10}$$

определяет кривую третьего порядка, ветви которой ограничи-

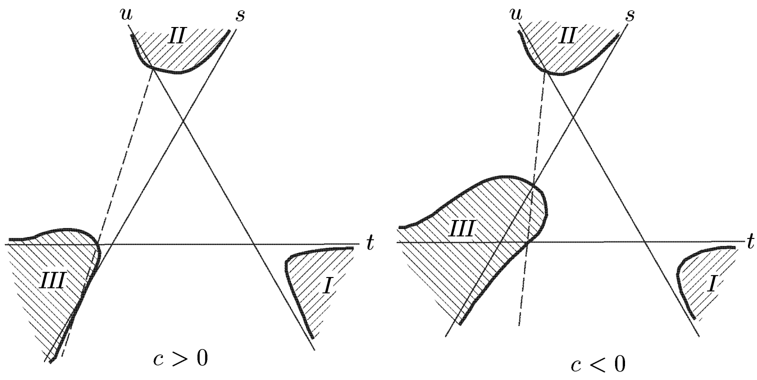


Рис. 9

вают физические области трех каналов, как показано на рис. 9. Пусть

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3 \geqslant m_4.$$

Тогда

$$a \geqslant b \geqslant c, \qquad a > 0, \quad b > 0.$$

Кривая (67.10) пересекает координатные оси в точках, лежащих на прямой

$$as + bt + cu = 0$$

(см. штриховые линии на рис. 9). В зависимости от знака c она проходит, как показано на рис. 9. При $c < 0$ физическая область

u-канала захватывает часть площади координатного треугольника; другими словами, в этом случае величины s, t, u могут быть одновременно положительными. Все три ветви граничной кривой имеют в качестве асимптот соответствующие координатные оси (в этом легко убедиться, исключив из уравнения (67.10) одну из переменных с помощью соотношения $s+t+u=h$ и устремив затем одну из оставшихся переменных к бесконечности). Условия (67.2) не вносят в общем случае ничего нового по сравнению с границами, устанавливаемыми уравнением (67.10). Прямые линии, соответствующие знакам равенства в (67.2), не пересекают заштрихованных на рис. 9 физических областей; некоторые из них касаются границ этих областей, отвечая экстремальным значениям переменных s, t или u в соответствующем канале.

В случае, когда масса одной из частиц больше суммы масс трех остальных ($m_1 > m_2+m_3+m_4$), наряду с каналами I, II, III возможен еще четвертый канал реакции, отвечающий распаду:

$$\text{IV}.\ 1 \to \overline{2}+3+4, \tag{67.11}$$

Для этого канала в системе покоя распадающейся частицы

$$q_1=(m_1,0),\ q_2=(-\varepsilon_2,-\mathbf{p}_2),\ q_3=(-\varepsilon_3,-\mathbf{p}_3),\ q_4=(-\varepsilon_4,-\mathbf{p}_4),$$
$$\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4=m_1,\quad \mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3+\mathbf{p}_4=0.$$

Инварианты:

$$\begin{aligned} s&=m_1^2+m_2^2-2m_1\varepsilon_2,\\ t&=m_1^2+m_3^2-2m_1\varepsilon_3,\\ u&=m_1^2+m_4^2-2m_1\varepsilon_4. \end{aligned} \tag{67.12}$$

Из (67.1) получим теперь:

$$\begin{aligned} (m_3+m_4)^2 &\leqslant s \leqslant (m_1-m_2)^2,\\ (m_2+m_4)^2 &\leqslant t \leqslant (m_1-m_3)^2,\\ (m_2+m_3)^2 &\leqslant u \leqslant (m_1-m_4)^2. \end{aligned} \tag{67.13}$$

Таким образом, все три инварианта положительны, т. е. физическая область канала распада находится внутри координатного треугольника.

Задачи

1. Найти физические области в случае трех одинаковых масс: $m_1\equiv m$, $m_2=m_3=m_4\equiv\mu$ (например, реакция $K+\pi\to\pi+\pi$).

Решение. Уравнение (67.10) принимает вид

$$stu=\mu^2(m^2-\mu^2)^2, \tag{1}$$

причем

$$s+t+u=3\mu^2+m^2.$$

Области I, II, III ограничены одинаковыми по форме кривыми (для I: $s > 0$, $t < 0$, $u < 0$, и аналогично для II и III). Если $m > 3\mu$, то (1) имеет также ветвь (замкнутую кривую) с $s > 0$, $t > 0$, $u > 0$ — границу области канала IV (рис. 10).

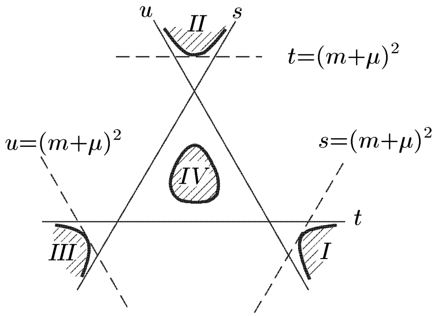


Рис. 10

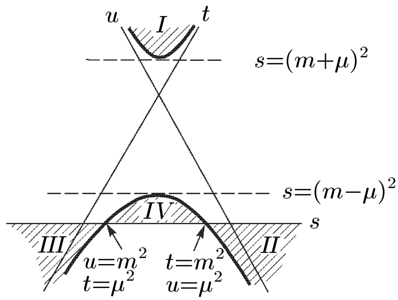


Рис. 11

2. То же в случае $m_1 \equiv m$, $m_2 \equiv \mu$, $m_3 = m_4 = 0$, $m > \mu$ (например, реакция $\mu + \nu \to e + \nu$).

Р е ш е н и е. Условие (67.5) принимает вид

$$stu \geqslant m^2\mu^2 s,$$

причем $s + t + u = m^2 + \mu^2$. Физические области ограничены осью $s = 0$ и двумя ветвями гиперболы $tu = m^2\mu^2$ (рис. 11).

3. То же в случае $m_1 = m_3 \equiv m$, $m_2 = 0$, $m_4 \equiv \mu$, причем $m > 2\mu$ (например, реакция $p + \gamma \to p + \pi^0$).

Р е ш е н и е. Уравнение границ (67.10) принимает вид

$$stu = a(s + u) + bt, \quad ah = m^2\mu^4,$$

$$bh = m^4(2m^2 - \mu^2), \quad h = 2m^2 + \mu^2.$$

Исключив u, получим

$$t^2 + \left(\frac{b-a}{s} + s - h\right)t + \frac{ah}{s} = 0.$$

При заданном s это — квадратное уравнение для t. При $s > (m+\mu)^2$ (область s-канала) каждому s отвечают два отрицательных значения t. При $s = (m+\mu)^2$ эти два корня квадратного уравнения сливаются в один: $t = -m\mu^2/(m+\mu)$.

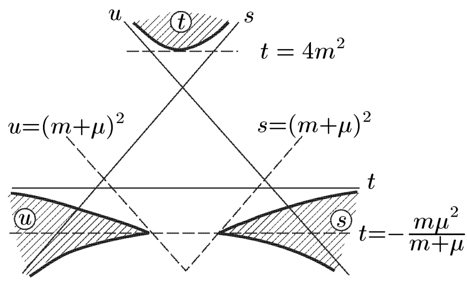


Рис. 12

Граница области s-канала имеет вид, показанный на рис. 12. Нижняя ветвь граничной кривой асимптотически приближается к оси $u = 0$, а верхняя пересекает эту ось в точке $t = \mu^4/(\mu^2 - m^2)$.

Область u-канала симметрична по отношению к области s-канала, а область t-канала расположена, как показано на рисунке.

§ 68. Разложение по парциальным амплитудам

Существенным этапом в анализе реакции вида

$$a + b \to c + d \tag{68.1}$$

является разложение амплитуды рассеяния по парциальным амплитудам, каждая из которых отвечает (при заданной полной энергии ε) определенному значению полного момента частиц J в системе их центра инерции [1]).

Эти парциальные амплитуды представляют собой, другими словами, элементы S-матрицы в моментном представлении:

$$\langle \varepsilon J' M' | S | \varepsilon J M \rangle.$$

Поскольку момент J и его проекция M на заданную ось z сохраняются, S-матрица диагональна по этим числам (как и по энергии ε). При этом в силу изотропии пространства диагональные элементы не зависят от значения M. При заданных J, M, ε матрица рассеяния остается еще матрицей по отношению к спиновым квантовым числам; элементы этой матрицы мы будем записывать более коротко в виде

$$\langle \varepsilon J M \lambda' | S | \varepsilon J M \lambda \equiv \langle \lambda' | S^J(\varepsilon) | \lambda \rangle, \tag{68.2}$$

где λ и λ' — совокупности спиновых квантовых чисел. В качестве последних наиболее естественно воспользоваться здесь спиральностями частиц. Напомним, что спиральность (в отличие от проекции спина на произвольную ось в пространстве) сохраняется для свободной частицы, а также что она коммутирует как с импульсом, так и с моментом частицы (см. § 16). Поэтому спиральностями можно пользоваться как в импульсном, так и в моментном представлениях матрицы рассеяния.

Элементы S-матрицы по индексам спиральностей мы будем называть *спиральными амплитудами* рассеяния и, таким образом, будем подразумевать под λ и λ' совокупности спиральностей начальных и конечных частиц: $\lambda = (\lambda_a, \lambda_b)$, $\lambda' = (\lambda_c, \lambda_d)$.

В импульсном представлении элементы матрицы рассеяния определяются по отношению к состояниям $|\varepsilon \mathbf{n} \lambda\rangle$ ($\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ — направление импульса относительного движения в системе центра инерции), а в моментном — по отношению к состояниям $|\varepsilon J M \lambda\rangle$. Они выражаются друг через друга в виде разложений

$$|J M \lambda\rangle = \int |\mathbf{n}\lambda\rangle\langle \mathbf{n}\lambda | J M \lambda\rangle \, do_{\mathbf{n}}, \tag{68.3}$$

[1]) Большая часть результатов, излагаемых в § 68, 69, принадлежит *Жакобу* и *Вику* (*M. Jacob*, *G. C. Wick*, 1959).

где интегрирование производится по направлениям $\mathbf{n}$ (энергию ε в символах состояний будем для краткости опускать). В силу унитарности этого преобразования (см. III, § 12) коэффициенты обратного преобразования

$$\langle JM\lambda|\mathbf{n}\lambda\rangle = \langle\mathbf{n}\lambda|JM\lambda\rangle^*. \tag{68.4}$$

По общему правилу преобразования матриц эти же коэффициенты определят связь между элементами S-матриц в обоих представлениях:

$$\langle\mathbf{n}'\lambda'|S|\mathbf{n}\lambda\rangle = \sum_{JM}\langle\mathbf{n}'\lambda'|JM\lambda'\rangle\langle JM\lambda'|S|JM\lambda\rangle\langle JM\lambda|\mathbf{n}\lambda\rangle. \tag{68.5}$$

Коэффициенты разложения (68.3) легко найти с помощью результатов § 16.

Пусть волновые функции всех состояний выражены в импульсном представлении, т. е. как функции направления импульса (при заданной энергии); это направление как независимую переменную обозначим $\boldsymbol{\nu}$ в отличие от направления $\mathbf{n}$ как квантового числа состояния. В этом представлении волновая функция имеет вид (16.2)

$$\psi_{\mathbf{n}\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = u^{(\lambda)}\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\mathbf{n}). \tag{68.6}$$

При подстановке (68.6) в разложение (68.3) последнее сводится к одному члену:

$$\psi_{JM\lambda} = \langle\boldsymbol{\nu}\lambda|JM\lambda\rangle u^{(\lambda)}. \tag{68.7}$$

Спиральность λ_a и λ_b каждой из двух частиц определяется как проекция ее спина на направление ее же импульса. Если импульсы частиц $\mathbf{p}_a \equiv \mathbf{p}$, $\mathbf{p}_b = -\mathbf{p}$, то для первой частицы это — направление $\mathbf{n}$, а для второй — направление $-\mathbf{n}$. Если рассматривать теперь систему как одну частицу со спиральностью Λ в направлении $\mathbf{n}$, то $\Lambda = \lambda_a - \lambda_b$. Ее волновая функция (в импульсном представлении) может быть представлена согласно (16.4) в виде

$$\psi_{JM\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = u^{(\lambda)}D^{(J)}_{\Lambda M}(\boldsymbol{\nu})\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}. \tag{68.8}$$

Сравнив выражения (68.7), (68.8) (и изменив обозначение переменной $\boldsymbol{\nu}$ на $\mathbf{n}$), получим для искомых коэффициентов

$$\langle\mathbf{n}\lambda|JM\lambda\rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}D^{(J)}_{\Lambda M}(\mathbf{n}). \tag{68.9}$$

Подстановка этих коэффициентов в (68.5) дает

$$\langle\mathbf{n}'\lambda'|S|\mathbf{n}\lambda\rangle = \sum_{JM}\frac{2J+1}{4\pi}D^{(J)}_{\Lambda' M}(\mathbf{n}')D^{(J)*}_{\Lambda M}(\mathbf{n})\langle\lambda'|S^J|\lambda\rangle, \tag{68.10}$$

$$\Lambda = \lambda_a - \lambda_b, \quad \Lambda' = \lambda_c - \lambda_d,$$

где использовано сокращенное обозначение (68.2). Выберем направление $\mathbf{n}$ в качестве оси z; тогда

$$D^{(J)}_{\Lambda M}(\mathbf{n}) = \delta_{\Lambda M}$$

и (68.10) принимает вид

$$\langle \mathbf{n}'\lambda'|S|\mathbf{n}\lambda\rangle = \sum_J \frac{2J+1}{4\pi} D^{(J)}_{\Lambda'\Lambda}(\mathbf{n}')\langle\lambda'|S^J|\lambda\rangle. \tag{68.11}$$

Мы видим, что разложение по парциальным амплитудам осуществляется с функциями $D^{(J)}_{\Lambda'\Lambda}$ в качестве коэффициентов. Для реакции вида (68.1) удобно определить амплитуду рассеяния f таким образом, чтобы сечение (в системе центра инерции) было

$$d\sigma = |\langle \mathbf{n}'\lambda'|f|\mathbf{n}\lambda\rangle|^2 do' \tag{68.12}$$

(сравнением с (64.19) можно связать эту амплитуду с матричным элементом M_{fi}). Ее разложение по парциальным амплитудам напишем в виде

$$\langle \mathbf{n}'\lambda'|f|\mathbf{n}\lambda\rangle = \sum_{JM}(2J+1)D^{(J)}_{\Lambda' M}(\mathbf{n}')D^{(J)*}_{\Lambda M}(\mathbf{n})\langle\lambda'|f^J|\lambda\rangle, \tag{68.13}$$

или, выбирая ось z вдоль направления $\mathbf{n}$:

$$\langle \mathbf{n}'\lambda'|f|\mathbf{n}\lambda\rangle = \sum_J (2J+1)D^{(J)}_{\Lambda'\Lambda}(\mathbf{n}')\langle\lambda'|f^J|\lambda\rangle. \tag{68.14}$$

Эта формула представляет собой обобщение обычного разложения по парциальным амплитудам для рассеяния бесспиновых частиц (см. III, (123.14)). Поскольку $D^{(L)}_{00} = P_L(\cos\theta)$, при равных нулю спинах (68.14) сводится к разложению по полиномам Лежандра

$$f(\theta) = \sum_L (2L+1) f_L P_L(\cos\theta).$$

Сечение (68.12) относится к случаю, когда все частицы имеют определенные спиральности. Если же частицы находятся в смешанных поляризационных состояниях, то сечение получается путем усреднения произведения

$$\langle\lambda_c\lambda_d|f|\lambda_a\lambda_b\rangle\langle\lambda'_c\lambda'_d|f|\lambda'_a\lambda'_b\rangle^*$$

по поляризационным матрицам плотности частиц

$$\langle\lambda_a|\rho^{(a)}|\lambda'_a\rangle\langle\lambda_b|\rho^{(b)}|\lambda'_b\rangle\langle\lambda'_c|\rho^{(c)}|\lambda_c\rangle\langle\lambda'_d|\rho^{(d)}|\lambda_d\rangle$$

(см. примеч. на с. 204). Так, для реакции между неполяризованными частицами a, b с образованием неполяризованных же

частиц c, d получим

$$d\sigma = \frac{do}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \sum_{(\lambda)} \sum_{JJ'} (2J+1)(2J'+1)\langle\lambda_c\lambda_d|f^J|\lambda_a\lambda_b\rangle \times \\ \times \langle\lambda_e\lambda_d|f^{J'}|\lambda_a\lambda_b\rangle^* D^{(J)}_{\Lambda'\Lambda}(\mathbf{n}') D^{(J')*}_{\Lambda'\Lambda}(\mathbf{n}') \quad (68.15)$$

(ось z направлена по $\mathbf{n}$, знак $\sum_{(\lambda)}$ означает суммирование по $\lambda_a\lambda_b\lambda_c\lambda_d$). Заменив функцию $D^{(J')*}_{\Lambda'\Lambda}$ согласно формуле (58.19) (см. III) и затем воспользовавшись разложением (110.2) (см. III), получим окончательно

$$d\sigma = \frac{do}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \sum_{(\lambda)JJ'} (-1)^{\Lambda-\Lambda'}(2J+1)(2J'+1) \times \\ \times \langle\lambda_c\lambda_d|f^J|\lambda_a\lambda_b\rangle\langle\lambda_c\lambda_d|f^{J'}|\lambda_a\lambda_b\rangle^* \sum_L (2L+1) \times \\ \times \begin{pmatrix} J & J' & L \\ \Lambda & -\Lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & J' & L \\ \Lambda' & -\Lambda' & 0 \end{pmatrix} P_L(\cos\theta) \quad (68.16)$$

(θ — угол между $\mathbf{n}'$ и осью z); суммирование по L производится по всем целым значениям, возникающим при векторном сложении $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}'$.

Разложение амплитуды рассеяния по парциальным амплитудам полностью учитывает все свойства углового распределения рассеяния, связанные с симметрией по отношению к пространственным вращениям. Оно, однако, не учитывает в явном виде свойства, связанные с симметрией по отношению к пространственной инверсии. P-инвариантность (если взаимодействие обладает ею) приводит к определенным связям между различными спиральными амплитудами (см. ниже, § 69).

§ 69. Симметрия спиральных амплитуд рассеяния

Требования, налагаемые симметрией по отношению к преобразованиям P, C, T (если, конечно, данный процесс взаимодействия частиц действительно обладает этой симметрией), приводят к появлению определенных связей между различными спиральными амплитудами рассеяния и тем самым уменьшают число независимых амплитуд [1]).

[1]) Само число независимых амплитуд не зависит, конечно, от конкретного представления матрицы S^J и остается одинаковым при любом выборе спиновых переменных.

Для установления этих связей выясним предварительно свойства симметрии спиральных состояний системы двух частиц.

Рассмотрим частицы в системе их центра инерции. Одна обладает импульсом $\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}$ и спиральностью λ_1 относительно направления $\mathbf{p}$, а другая — импульсом $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}$ и спиральностью λ_2 относительно направления $-\mathbf{p}$. Если же определять спиральности для обеих частиц относительно одного и того же направления $\mathbf{p}$, то они будут равны λ_1 и $-\lambda_2$. Соответственно они будут описываться плоскими волнами с амплитудами $u_{\mathbf{p}}^{(\lambda_1)}$ и $u_{\mathbf{p}}^{(-\lambda_2)}$. Система же обеих частиц описывается функцией (многокомпонентной) $u_{\mathbf{p}}^{(\lambda_1\lambda_2)}$, составленной из произведений амплитуд $u_{\mathbf{p}}^{(\lambda_1)}$ и $u_{\mathbf{p}}^{(-\lambda_2)}$.

Рассматривая теперь систему как одну частицу со спиральностью $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ в направлении $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, мы можем написать волновую функцию (в импульсном представлении, т. е. как функцию $\mathbf{n}$) для состояния с определенными значениями J, M, λ_1, λ_2 (а также полной энергии ε):

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = u_{\mathbf{p}}^{(\lambda_1\lambda_2)} D_{\Lambda M}^{(J)}(\mathbf{n}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}, \quad \Lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \tag{69.1}$$

(ср. (68.8)). Так как Λ есть проекция полного момента на $\mathbf{p}$, то должно быть

$$|\Lambda| \leqslant J. \tag{69.2}$$

Согласно (16.14) при инверсии

$$\widehat{P}u^{(\lambda_1\lambda_2)}(\mathbf{n}) = \eta_1\eta_2 u^{(\lambda_1\lambda_2)}(-\mathbf{n}) = \\ = \eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-\lambda_1+\lambda_2} u^{(-\lambda_1-\lambda_2)}(\mathbf{n}), \tag{69.3}$$

где η_1, η_2 — внутренние четности частиц. Использовав также (16.10), найдем закон преобразования функций (69.1):

$$\widehat{P}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = \eta_1\eta_2(-1)^{s_1+s_2-J}\psi_{JM-\lambda_1-\lambda_2}. \tag{69.4}$$

Если частицы тождественны, то возникает вопрос о симметрии по отношению к их перестановке. Перестановка частиц означает перестановку их импульсов и спинов. Для уяснения смысла этой операции в применении к функции (69.1) замечаем, что в ее определении имеется асимметрия, состоящая в том, что моменты обеих частиц проецируются на направление одного и того же вектора $\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}$ — импульса одной (первой) из частиц. После перестановки место этого вектора займет вектор $\mathbf{p}_2 \equiv -\mathbf{p}$; проекции моментов $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$ на этот вектор будут $-\lambda_1$ и λ_2 (вместо проекций λ_1 и $-\lambda_2$ на $\mathbf{p}$). Поэтому результат воздействия оператора перестановки частиц ($\widehat{P}_{12}$) на функцию (69.1) можно записать как

$$\widehat{P}_{12}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = u^{(-\lambda_1-\lambda_2)}(-\mathbf{n}) D_{\Lambda M}^{(J)}(-\mathbf{n}) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}},$$

где по-прежнему $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Использовав затем (69.3) и (16.10), найдем

$$\widehat{P}_{12}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{2s-J}\psi_{JM\lambda_2\lambda_1}, \tag{69.5}$$

где $s_1 = s_2 \equiv s$.

Для тождественных частиц допустимы состояния лишь симметричные (для бозонов) или лишь антисимметричные (для фермионов) относительно перестановки. Поскольку первый случай имеет место при целом, а второй при полуцелом спине частиц s, в обоих случаях допустимые спиральные состояния системы двух частиц можно записать в виде линейных комбинаций

$$[1 + (-1)^{2s}\widehat{P}_{12}]\psi_{JM\lambda_1\lambda_2},$$

или, согласно, (69.5)

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} + (-1)^J\psi_{JM\lambda_2\lambda_1}. \tag{69.6}$$

Замечательно, что эта комбинация имеет единый вид для бозонов и фермионов.

Для системы из частицы и античастицы результат перестановки выражается той же формулой (69.5). Однако, в отличие от случая тождественных частиц, здесь допустимы состояния обеих перестановочных симметрий, т. е. обе комбинации

$$\psi^{\pm} = \psi_{JM\lambda_1\lambda_2} \pm (-1)^J\psi_{JM\lambda_2\lambda_1}. \tag{69.7}$$

Эти состояния обладают определенными зарядовыми четностями C. Операцию зарядового сопряжения можно представить как результат полной перестановки всех переменных (спиновых и зарядовых) двух частиц с последующей обратной перестановкой спиновых переменных (спиральностей). Результат первой операции должен совпадать с результатом перестановки в системе двух тождественных частиц. Отсюда ясно, что при верхнем знаке в (69.7) (совпадающем со знаком в допустимом для тождественных частиц состоянии (69.6)) система будет зарядово-четна, а при нижнем знаке — зарядово-нечетна:

$$\widehat{C}\psi^{\pm} = \pm\psi^{\pm}.$$

Наконец, рассмотрим операцию обращения времени. Волновая функция покоящейся частицы со спином s и его проекцией σ преобразуется согласно

$$\widehat{T}\psi_{s\sigma} = (-1)^{s-\sigma}\psi_{s,-\sigma}$$

(см. III, (60.2)). Волновую функцию двух частиц в системе их центра инерции тоже можно рассматривать (в отношении трансформационных свойств) как волновую функцию «покоящейся частицы» с моментом J и его проекцией M. Что касается спиральностей λ_1, λ_2, то они не меняются: обращение времени меняет знак векторов импульса и момента, а потому произведения

jp не меняются. Таким образом,

$$\widehat{T}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = (-1)^{J-M}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2}. \tag{69.8}$$

Теперь можно сразу написать соотношения симметрии для спиральных амплитуд.

Если взаимодействие P-инвариантно, то для реакции

$$a + b \to c + d$$

должны совпадать (при заданных J и ε) амплитуды переходов

$$|\lambda_a\lambda_b\rangle \to |\lambda_c\lambda_d\rangle \text{ и } \widehat{P}|\lambda_a\lambda_b\rangle \to \widehat{P}|\lambda_c\lambda_d\rangle.$$

Использовав (69.4), найдем поэтому

$$\langle\lambda_c\lambda_d|S^J|\lambda_a\lambda_b\rangle = \\ = \frac{\eta_c\eta_d}{\eta_a\eta_b}(-1)^{s_c+s_d-s_a-s_b}\langle-\lambda_c,-\lambda_d|S^J|-\lambda_a,-\lambda_b\rangle. \tag{69.9}$$

Если же вместо состояний с определенными спиральностями выбрать состояния с определенными четностями, т. е. комбинации

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} \pm \widehat{P}\psi_{JM\lambda_1\lambda_2})$$

(где $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_a\lambda_b$ или $\lambda_c\lambda_d$), то обратятся в нуль амплитуды переходов, не сохраняющих четность.

Обращение времени преобразует каждое состояние согласно (69.8) и, кроме того, переставляет начальные и конечные состояния. Поэтому T-инвариантность приводит к соотношениям

$$\langle\lambda_c\lambda_d|S^J(\varepsilon)|\lambda_a\lambda_b\rangle = \langle\lambda_a\lambda_b|S^J(\varepsilon)|\lambda_c\lambda_d\rangle. \tag{69.10}$$

Эти две амплитуды, однако, относятся к различным процессам (прямая и обратная реакции). Лишь в случае упругого рассеяния оба процесса по существу совпадают, и тогда (69.10) представляет собой определенную связь между спиральными амплитудами одной и той же реакции.

При упругом рассеянии двух тождественных частиц число различных амплитуд уменьшается еще и в силу перестановочной симметрии. Мы видели, что при заданном J осуществляются либо только симметричные, либо только антисимметричные по λ_1, λ_2 состояния. Тем самым сохранение момента автоматически означает сохранение также и симметрии по отношению к перестановке спиральностей.

Аналогичная ситуация имеет место при упругом рассеянии частицы на античастице (или при превращении такой пары в другую пару, т. е. при реакции вида $a + \overline{a} \to b + \overline{b}$). При заданном J существуют как симметричные, так и антисимметричные по λ_1, λ_2 состояния, но этим состояниям отвечают разные

значения зарядовой четности системы. Отсюда следует, что если взаимодействие частиц C-инвариантно, так что зарядовая четность сохраняется, то переходы между состояниями различной симметрии по λ_1, λ_2 запрещены [1]. Подчеркнем, однако, отличие от случая тождественных частиц, когда при каждом заданном J состояния одной из симметрий вообще отсутствуют. В случае же «частица — античастица» запрещены лишь переходы между состояниями различной симметрии, хотя сами эти состояния (для каждого J) существуют.

В силу универсальной CPT-инвариантности существование T-инвариантности означает также и CP-инвариантность. Последняя приводит к равенству амплитуд двух реакций, из которых одна получается из другой заменой всех частиц античастицами (и изменением знака спиральностей), причем $\lambda_{\overline{a}} = -\lambda_a, \ldots$ [2]:

$$\langle \lambda_c \lambda_d | S^J | \lambda_a \lambda_b \rangle = \langle \lambda_{\overline{c}} \lambda_{\overline{d}} | S^J | \lambda_{\overline{a}} \lambda_{\overline{b}} \rangle. \tag{69.11}$$

Число независимых амплитуд одинаково для всех кросс-каналов одной и той же обобщенной реакции; поэтому для определения этого числа можно рассматривать любой из каналов. Так, одинаковым числом независимых амплитуд описываются упругое рассеяние $a + b \to a + b$ и аннигиляция $a + \overline{a} \to b + \overline{b}$. При этом ограничения, налагаемые в первом случае T-инвариантностью, эквивалентны ограничениям, налагаемым во втором случае C-инвариантностью.

Остановимся еще на реакции распада одной частицы на две: $a \to b + c$. В системе центра инерции (система покоя частицы a) имеем $\mathbf{p}_b = -\mathbf{p}_c$. Умножив на $\mathbf{p}_b$ равенство $\mathbf{j}_a = \mathbf{j}_b + \mathbf{j}_c$, получим

$$\lambda_a = \lambda_b - \lambda_c \tag{69.12}$$

(спиральность λ_a первичной частицы определена как проекция ее спина на направление импульса одной из вторичных частиц). Это соотношение является, можно сказать, следствием дополнительной симметрии, которой обладает данный процесс: аксиальной симметрии вокруг направления $\mathbf{p}_b$ и $\mathbf{p}_c$. Если спин первичной частицы $s_a < s_b + s_c$, то соотношение (69.12) уменьшает число допустимых наборов значений λ_a, λ_b, λ_c и тем самым число независимых спиральных амплитуд распада. Полный момент J в данном случае совпадает со спином первичной частицы s_a, так что является фиксированной величиной.

---

[1]) Аналогичный запрет может возникнуть и как следствие изотопической инвариантности взаимодействия нетождественных частиц. Так, с точностью до этой инвариантности запрещены переходы между состояниями различной симметрии по λ_1, λ_2 при рассеянии нейтрона протоном.

[2]) Поскольку эти две амплитуды относятся к различным реакциям, интерференция между которыми тем самым невозможна, фазовый множитель в (69.11) вообще не имеет смысла и его можно положить равным 1. Реальным смыслом обладает лишь следующее из (69.11) равенство сечений.

P-инвариантность при распаде выражается соотношением

$$\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle = \frac{\eta_b \eta_c}{\eta_a} (-1)^{s_a - s_b - s_c} \langle -\lambda_b, -\lambda_c | S^J | -\lambda_a \rangle \qquad (69.13)$$

(здесь использован наряду с (69.4) также и закон преобразования волновой функции одной частицы (16.16)).

Когда первичная частица истинно нейтральна, дальнейшие ограничения возникают, если сохраняется C-четность. Здесь надо различать три случая. Если продукты распада тоже истинно нейтральны, то должно быть $C_a = C_b C_c$; это условие либо запрещает распад вовсе, либо удовлетворяется, не приводя к новым ограничениям. Если частицы b и c вообще различны, то C-инвариантность устанавливает соотношение между амплитудами различных процессов: $a \to b + c$ и $a \to \overline{b} + \overline{c}$. Наконец, для распада $a \to b + \overline{b}$ возникает ограничение, связанное с тем, что при заданной зарядовой четности C и заданном полном моменте $J = s_a$ система может находиться лишь в состояниях либо симметричных, либо антисимметричных по спиральностям — в зависимости от четности числа J и знака C.

CP-инвариантность приводит к равенству амплитуд распадов $a \to b + c$ и $\overline{a} \to \overline{b} + \overline{c}$:

$$\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle = \langle \lambda_{\overline{b}} \lambda_{\overline{c}} | S^J | \lambda_{\overline{a}} \rangle \qquad (69.14)$$

причем $\lambda_{\overline{a}} = -\lambda_a, \ \ldots$), т. е. к равенству вероятностей распада частицы и античастицы. Если частица может распадаться различными способами (по разным каналам), то это равенство относится к каждому из каналов. Подчеркнем, однако, что этот результат предполагает соблюдение CP-инвариантности, не являющейся универсальным свойством природы. Универсальный характер имеет лишь CPT-инвариантность; это требование само по себе привело бы лишь к равенству

$$\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle = \langle \lambda_{\overline{a}} | S^J | \lambda_{\overline{b}} \lambda_{\overline{c}} \rangle,$$

в котором правая сторона относится к процессу, обратному распаду. Мы увидим ниже (см. § 71), что условие CPT-инвариантности вместе с требованиями унитарности все же приводит к некоторому, хотя и более ограниченному соотношению для вероятностей распада частицы и античастицы.

Задачи

1. С помощью (69.6) получить классификацию возможных состояний системы двух фотонов.

Решение. В этом случае $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 1$. При четных J ($J > 0$), согласно (69.6), допускаются три симметричных по $\lambda_1 \lambda_2$ состояния:

$$\text{а) } \psi_{JM11} \quad \text{б) } \psi_{JM-1-1'} \quad \text{в) } \psi_{JM1-1} + \psi_{JM-11}.$$

При нечетных J $(J > 1)$ допускается одно антисимметричное состояние:

$$\text{г)}\ \psi_{JM1-1} - \psi_{JM-11}.$$

Состояния в) и г) обладают в то же время определенной (+1) четностью: согласно (69.4)

$$\widehat{P}(\psi_{JM1-1} \pm \psi_{JM-11}) = \pm(-1)^J(\psi_{JM1-1} \pm \psi_{JM-11});$$

множитель $\pm(-1)^J = 1$, так как верхний знак относится к четным, а нижний — к нечетным значениям J. Состояния же а) и б) сами по себе не обладают определенной четностью, но, составив из них комбинации

$$\text{а}')\psi_{JM11} + \psi_{JM-1-1}, \quad \text{б}')\psi_{JM11} - \psi_{JM-1-1},$$

мы получим четные и нечетные состояния. При $J = 0$ допускаются (в связи с условием $|\lambda_1 - \lambda_2| \leqslant J$) лишь $\lambda_1 = \lambda_2$, так что состояние в) выпадает, и остаются лишь одно четное и одно нечетное состояния а$'$) и б$'$). Наконец, при $J = 1$ единственное допустимое при нечетных J состояние г) запрещено, так как для него $\lambda = 2 > J$. Таким образом, мы приходим к таблице допустимых состояний (9.5).

2. В нерелятивистском приближении полный момент системы J есть результат сложения спина S и орбитального момента L. Для системы двух частиц найти связь между состояниями $|JLSM\rangle$ и $|JM\lambda_1\lambda_2\rangle$.

Р е ш е н и е. Согласно правилу составления волновых функций при сложении моментов имеем

$$\psi_{JLSM} = \sum\{\psi_{s_1\sigma_1}\psi_{s_2\sigma_2}\langle\sigma_1\sigma_2|SM_S\rangle\}\psi_{LM_L}\langle M_LM_S|JM\rangle. \tag{1}$$

Здесь $\psi_{s\sigma}$ — собственные функции спина s с проекцией σ (на фиксированную ось z), ψ_{LM_L} — то же для орбитального момента L с проекцией M_L; выражение в скобках отвечает сложению s_1 и s_2 в S, после чего S складывается с L в J; суммирование — по всем m-индексам. Выразим все функции в импульсном представлении как функции направления $\mathbf{n}$ (импульса $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1$), причем функции $\psi_{s\sigma}$ выразим с помощью формулы (58.7) (см. III) через функции спиральных состояний $\psi_{\mathbf{n}\lambda}$:

$$\psi_{s_1\sigma_1} = \sum_{\lambda_1} D^{(s_1)}_{\lambda_1\sigma_1}(\mathbf{n})\psi_{\mathbf{n}\lambda_1},$$

$$\psi_{s_2\sigma_2} = \sum_{\lambda_2} D^{(s_2)}_{-\lambda_2\sigma_2}(\mathbf{n})\psi_{\mathbf{n}-\lambda_2}.$$

Для функции же ψ_{LM_L} имеем

$$\psi_{LM_L} = Y_{LM_L}(\mathbf{n}) = i^L\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}D^{(L)}_{0M_L}(\mathbf{n})$$

(использованы формула (58.25) (см. III) и определение (16.5)). Подставив эти функции в (1), воспользуемся дважды разложением (110.1) (см. III), а также свойством ортогональности коэффициентов Клебша—Гордана (см. III, (106.13)). В результате получим ψ_{JLSM} в виде разложения

$$\psi_{JLSM} = \sum_{\lambda_1\lambda_2} \psi_{JM\lambda_1\lambda_2}\langle JM\lambda_1\lambda_2|JLSM\rangle, \tag{2}$$

где

$$\psi_{JM\lambda_1\lambda_2} = \psi_{\mathbf{n}\lambda_1}\psi_{\mathbf{n},-\lambda_2}D^{(J)}_{\Lambda M}(\mathbf{n})\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}, \quad \Lambda = \lambda_1 - \lambda_2,$$

а коэффициенты

$$\langle JM\lambda_1\lambda_2|JLSM\rangle =$$
$$= (-i)^L(-1)^{s_1-s_2+S}\sqrt{(2L+1)(2S+1)}\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & S \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & -\Lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & S & J \\ 0 & \Lambda & -\Lambda \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В силу унитарности преобразования (2)

$$\langle JLSM|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \langle JM\lambda_1\lambda_2|JLSM\rangle^*.$$

§ 70. Инвариантные амплитуды

В спиральных амплитудах используется определенная система отсчета — система центра инерции. Между тем при вычислении амплитуд рассеяния с помощью инвариантной теории возмущений (а также для исследования их общих аналитических свойств) удобно записывать амплитуды в явно инвариантной форме.

Если частицы, участвующие в реакции, не имеют спина, то амплитуда рассеяния зависит только от инвариантных произведений 4-импульсов частиц. Для реакции вида

$$a + b \to c + d \tag{70.1}$$

в качестве этих инвариантов можно выбрать какие-либо две из определенных в § 66 величин s, t, u. Тогда амплитуда рассеяния сводится к одной функции $M_{fi} = f(s,t)$.

Если же частицы обладают спинами, то, помимо кинематических инвариантов s, t, u, существуют также инварианты, которые можно составить из волновых амплитуд частиц (биспиноров, 4-тензоров и т. п.). Амплитуды рассеяния должны тогда иметь вид

$$M_{fi} = \sum_n f_n(s,t)F_n, \tag{70.2}$$

где F_n — инварианты, линейно зависящие от волновых амплитуд всех участвующих частиц (а также от их 4-импульсов). Коэффициенты $f_n(s,t)$ называют *инвариантными амплитудами.*

Выбрав волновые амплитуды так, чтобы они отвечали частицам с определенными спиральностями, мы получим определенные значения инвариантов $F_n = F_n(\lambda_i, \lambda_f)$. Тогда спиральные амплитуды рассеяния представятся в виде линейных однородных комбинаций инвариантных амплитуд f_n. Отсюда видно, что число независимых функций $f_n(s,t)$ совпадает с числом независимых спиральных амплитуд. Поскольку число последних определяется легко (как было объяснено в § 69), тем самым облегчается задача построения инвариантов F_n, — мы заранее знаем, сколько их должно быть.

Рассмотрим некоторые примеры. Во всех примерах будем считать, что взаимодействие T- и P-инвариантно; последнее

свойство означает, что инварианты F_n должны быть истинными (а не псевдо) скалярами.

Рассеяние частицы со спином 0 на частице со спином $^1\!/_2$. Для подсчета числа инвариантов — или, что то же, числа независимых спиральных амплитуд — замечаем, что полное число элементов матрицы S^J (т. е. число различных наборов чисел λ_1, λ_2, λ'_1, λ'_2) в данном случае равно 4 ($\lambda_1 = \lambda'_1 = 0$, $\lambda_2, \lambda'_2 = \pm{}^1\!/_2$) С учетом P-инвариантности число независимых элементов сводится к двум, после чего учет T-инвариантности уже не меняет этого числа.

В качестве двух независимых инвариантов можно выбрать

$$F_1 = \overline{u}'u, \quad F_2 = \overline{u}'(\gamma K)u. \tag{70.3}$$

Здесь $u = u(p)$, $u' = u(p')$ — биспинорные амплитуды начального и конечного фермионов; $K = k + k'$, где k и k' — 4-импульсы начального и конечного бозонов [1]).

T-инвариантность величин (70.3) станет очевидной, если заметить, что произведения $\overline{u}'u$ и $\overline{u}'\gamma^\mu u$ преобразуются при обращении времени по тому же закону (28.6), что и операторы $\widehat{\overline{\psi}}\widehat{\psi}$ и $\widehat{\overline{\psi}}\gamma^\mu\widehat{\psi}$, матричными элементами которых они являются: произведение $\overline{u}'u$ инвариантно само по себе, а 4-вектор $\overline{u}'\gamma u$ преобразуется по закону

$$\overline{u}'\gamma^0 u \to \overline{u}'\gamma^0 u, \quad \overline{u}'\boldsymbol{\gamma} u \to -\overline{u}'\boldsymbol{\gamma} u.$$

Таким же образом преобразуются 4-импульсы $(K^0, \mathbf{K}) \to$ $\to (k^0, -\mathbf{K})$, и скалярное произведение $F_2 = K_\mu(\overline{u}'\gamma^\mu u)$, следовательно, инвариантно.

Упругое рассеяние двух тождественных частиц со спином $^1\!/_2$. Для подсчета числа независимых спиральных амплитуд удобно исходить из линейных комбинаций спиральных состояний:

$$\psi_{1g} = \psi_{++} + \psi_{--}, \quad \psi_{2g} = \psi_{++} - \psi_{--},$$
$$\psi_{3g} = \psi_{+-} + \psi_{-+}, \quad \psi_u = \psi_{+-} - \psi_{-+},$$

где индексы «+», «−» указывают значения спиральностей ($\pm{}^1\!/_2$) двух частиц. Состояния $1g$, $2g$, $3g$ четны, а состояние u нечетно по отношению к перестановке частиц. Поэтому переходы $g \leftrightarrow u$ запрещены, так что с учетом перестановочной симметрии остается $16 - 6 = 10$ матричных элементов. По отношению к инверсии

---

[1]) На первый взгляд можно было бы составить еще инвариант вида $\overline{u}'\sigma_{\mu\nu}k^\mu k'^\nu u$ (матрицы $\sigma_{\mu\nu}$, определены в (28.2)). Легко, однако, убедиться в его сводимости к инвариантам (70.3), если учесть закон сохранения $k' = p + k - p'$ и уравнения

$$(\gamma p)u = mu, \quad \overline{u}'(\gamma p') = m\overline{u}',$$

которым удовлетворяют биспинорные амплитуды.

P функции ψ_{1g}, ψ_{3g} и ψ_{2g} имеют противоположные четности; запрещение переходов между ними уменьшает число независимых амплитуд до шести. Наконец, T-инвариантность приводит к совпадению амплитуд переходов $1g \to 3g$ и $3g \to 1g$, так что остается всего пять независимых амплитуд. В качестве пяти независимых инвариантов можно выбрать

$$\begin{gathered} F_1 = (\overline{u}_1' u_1)(\overline{u}_2' u_2), \qquad F_2 = (\overline{u}_1' \gamma^5 u_1)(\overline{u}_2' \gamma^5 u_2), \\ F_3 = (\overline{u}_1' \gamma^\mu u_1)(\overline{u}_2' \gamma_\mu u_2), \quad F_4 = (\overline{u}_1' \gamma^\mu \gamma^5 u_1)(\overline{u}_2' \gamma_\mu \gamma^5 u_2) \\ F_5 = (\overline{u}_1' \sigma^{\mu\nu} u_1)(\overline{u}_2' \sigma_{\mu\nu} u_2), \end{gathered} \tag{70.4}$$

где u_1, u_2 — биспинорные амплитуды начальных, а u_1', u_2' — конечных частиц. Перестановка начальных (или конечных) частиц не приводит к новым инвариантам: новые инварианты выражаются через старые (см. задачу к § 28). Но выражение (70.2) с F_n из (70.4) не учитывает в явном виде требования, согласно которому перестановка двух тождественных фермионов должна менять знак амплитуды рассеяния. Удовлетворяющее этому требованию выражение можно записать в виде

$$M_{fi} = [(\overline{u}_1' u_1)(\overline{u}_2' u_2) f_1(t,u) - (\overline{u}_2' u_1)(\overline{u}_1' u_2) f_1(u,t)] + \ldots \tag{70.5}$$

При перестановке p_1' и p_2' (или p_1 и p_2) кинематические инварианты: $s \to s$, $t \to u$, $u \to t$, так что указанное требование выполняется автоматически.

Упругое рассеяние фотона на частицах со спином 0 и $^1/_2$. Амплитуду этих процессов целесообразно выразить с помощью единичных пространственноподобных 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &e^{(1)\,2} = e^{(2)\,2} = -1, \quad e^{(1)} e^{(2)} = 0, \\ &e^{(1)} k = e^{(2)} k = 0, \qquad e^{(1)} k' = e^{(2)} k' = 0 \end{aligned} \tag{70.6}$$

(для каждого из двух фотонов эти 4-векторы могут служить теми 4-ортами, с помощью которых осуществляется инвариантное описание их поляризационных свойств — см. § 8).

Пусть k и k' — начальный и конечный 4-импульсы фотона, а p и p' — то же для рассеивающей частицы. Рассмотрим 4-векторы

$$P^\lambda = p^\lambda + p'^\lambda - K^\lambda \frac{pK + p'K}{K^2}, \quad N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu q_\nu K_\rho, \tag{70.7}$$

где

$$K = k + k', \quad q = p - p' = k' - k.$$

Они очевидным образом взаимно ортогональны. Они ортогональны также 4-векторам K, q, а следовательно, и k, k'. Будучи ортогональны времениподобному 4-вектору K ($K^2 = 2kk' > 0$), они сами пространственноподобны (действительно, в системе отсчета, в которой $\mathbf{K} = 0$, из $KP = 0$ следует, что $P_0 = 0$, а потому

$P^2 < 0$). Пронормировав P и N, т. е. образовав

$$e^{(1)\lambda} = \frac{N^\lambda}{\sqrt{-N^2}}, \quad e^{(2)\lambda} = \frac{P^\lambda}{\sqrt{-P^2}}, \tag{70.8}$$

мы получим пару 4-векторов, обладающих всеми требуемыми свойствами. Отметим, что $e^{(2)}$ — истинный, а $e^{(1)}$ — псевдовектор. Представим амплитуду рассеяния фотона в виде

$$M_{fi} = F^{\lambda\mu} e'^*_\lambda e_\mu, \tag{70.9}$$

выделив в ней 4-векторы поляризации e и e' начального и конечного фотонов.

Спиральность фотона пробегает всего два значения (±1). Поэтому для рассеяния фотона на частице со спином 0 число независимых спиральных амплитуд такое же, как для взаимного рассеяния частиц со спином 0 и $1/2$, т. е. равно 2. Тензор $F^{\lambda\mu}$ в (70.9) должен быть построен только из 4-импульсов частиц. Его можно представить в виде

$$F^{\lambda\mu} = f_1 e^{(1)\lambda} e^{(1)\mu} + f_2 e^{(2)\lambda} e^{(2)\mu}, \tag{70.10}$$

где f_1, f_2 — инвариантные амплитуды. Обратим внимание на то, что в $F^{\lambda\mu}$ не может быть члена с произведением $e^{(1)\lambda} e^{(2)\mu}$, так как это произведение — псевдотензор и при подстановке в (70.9) дало бы псевдоскаляр.

Наконец, рассмотрим рассеяние фотона на частице со спином $1/2$. Для подсчета числа независимых спиральных амплитуд замечаем, что полное число элементов матрицы S^J в этом случае есть 16 (спиральность каждой из двух начальных и двух конечных частиц пробегает по два значения). Требование P-инвариантности уменьшает это число до 8, после чего требование T-инвариантности доводит его до 6.

Представим тензор $F_{\lambda\mu}$ в этом случае в виде

$$\begin{aligned} F_{\lambda\mu} = G_0(e^{(1)}_\lambda e^{(1)}_\mu + e^{(2)}_\lambda e^{(2)}_\mu) + G_1(e^{(1)}_\lambda e^{(2)}_\mu + e^{(2)}_\lambda e^{(1)}_\mu) +{}\\ + G_2(e^{(1)}_\lambda e^{(2)}_\mu - e^{(2)}_\lambda e^{(1)}_\mu) + G_3(e^{(1)}_\lambda e^{(1)}_\mu - e^{(2)}_\lambda e^{(2)}_\mu), \end{aligned} \tag{70.11}$$

где G_0, G_3 — истинные, а G_1, G_2 — псевдоскаляры. Те и другие билинейны относительно биспинорных амплитуд фермионов $\overline{u}(p')$ и $u(p)$, т. е. имеют вид

$$G_n = \overline{u}(p') Q_n u(p). \tag{70.12}$$

Общий вид матриц (по биспинорным индексам) Q_n:

$$\begin{aligned} &Q_0 = f_1 + f_2(\gamma K), \qquad Q_1 = \gamma^5[f_3 + f_4(\gamma K)],\\ &Q_2 = \gamma^5[f_5 + f_6(\gamma K)], \quad Q_3 = f_7 + f_8(\gamma K), \end{aligned} \tag{70.13}$$

где $K = k + k'$. Коэффициенты $f_1, \ldots, f_8$ — инвариантные амплитуды, число которых получилось здесь равным 8 (вместо нужного 6) ввиду того, что еще не учтено требование T-инвариантности.

Обращение времени переставляет начальные и конечные 4-импульсы частиц, меняя также знаки их пространственных компонент:

$$(k_0, \mathbf{k}) \leftrightarrow (k'_0, -\mathbf{k}'), \quad (p_0, \mathbf{p}) \leftrightarrow (p'_0, -\mathbf{p}'); \tag{70.14}$$

4-векторы поляризации фотонов преобразуются согласно

$$(e_0, \mathbf{e}) \leftrightarrow (e'^*_0, -\mathbf{e}'^*) \tag{70.15}$$

(ср. (8.11a)), так что

$$(e'^*_0 e_0, e'^*_i e_0, e'^*_i e_k) \to (e'^*_0 e_0, -e'^*_0 e_i, e'^*_k e_i).$$

В силу последнего преобразования условие инвариантности амплитуды рассеяния (70.9) эквивалентно требованию

$$(F_{00}, F_{i0}, F_{ik}) \to (F_{00}, -F_{0i}, F_{ki}).$$

С другой стороны, как следствие замен (70.14), имеем

$$(K_0, \mathbf{K}) \to (K_0, -\mathbf{K}), \quad (q_0, \mathbf{q}) \to (-q_0, \mathbf{q}),$$
$$(P_0, \mathbf{P}) \to (P_0, -\mathbf{P}), \quad (N_0, \mathbf{N}) \to (N_0, -\mathbf{N}),$$

так что

$$(e_0^{(1,2)}, \mathbf{e}^{(1,2)}) \to (e_0^{(1,2)}, -\mathbf{e}^{(1,2)}). \tag{70.16}$$

Из выражения (70.11) следует поэтому, что должно быть

$$G_{0,1,3} \to G_{0,1,3} \quad G_2 \to -G_2.$$

Но при обращении времени

$$\overline{u}'\gamma^5 u \to -\overline{u}'\gamma^5 u, \quad \overline{u}'\gamma^5(\gamma K)u \to \overline{u}'\gamma^5(\gamma K)u,$$

как это ясно из законов преобразования псевдоскалярных и псевдовекторных билинейных форм в (28.6). Поэтому из выражений (70.12), (70.13) видно, что в силу T-инвариантности амплитуды рассеяния должно быть

$$f_3 = f_6 = 0. \tag{70.17}$$

§ 71. Условие унитарности

Матрица рассеяния должна быть унитарной: $\widehat{S}\widehat{S}^+ = 1$, или в матричных элементах:

$$(SS^+)_{fi} = \sum_n S_{fn} S^*_{in} = \delta_{fi}, \tag{71.1}$$

где индекс n нумерует все возможные промежуточные состояния [1]). Это — наиболее общее свойство S-матрицы, которым

[1]) Смысл символа δ_{fi} в (71.1) зависит, конечно, от конкретного выбора квантовых чисел и от нормировки волновых функций системы. Он должен быть определен так, чтобы было $\sum_f \delta_{if} = 1$.

обеспечивается сохранение нормировки и ортогональности состояний при реакции (ср. III, § 125, 144). В частности, диагональные элементы равенства (71.1) выражают просто тот факт, что сумма вероятностей перехода из данного начального в любое конечное состояние равна единице:

$$\sum_n |S_{ni}|^2 = 1.$$

Подставив в (71.1) матричные элементы в виде (64.2), получим

$$T_{fi} - T^*_{if} = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n) T_{fn} T^*_{in} = \\ = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n) T^*_{nf} T_{ni}. \quad (71.2)$$

Написанные здесь две эквивалентные формы правой стороны равенства получаются при записи условия унитарности соответственно в виде $\widehat{S}\widehat{S}^+ = 1$ или $\widehat{S}^+\widehat{S} = 1$, с разными порядками расположения множителей $\widehat{S}$ и $\widehat{S}^+$.

Обратим внимание на то, что левая сторона этого равенства линейна, а правая квадратична по матричным элементам T. Поэтому если взаимодействие (как, например, электромагнитное) содержит малый параметр, то левая сторона будет первого, а правая — второго порядка малости. В первом приближении последней можно, следовательно, пренебречь, и тогда

$$T_{fi} = T^*_{if}, \quad (71.3)$$

т. е. матрица T эрмитова.

Для придания условию унитарности (71.2) более конкретного вида надо уточнить, что́ именно подразумевается под суммированием по n. Сделаем это для столкновения двух частиц, причем будем считать, что законы сохранения допускают только упругое рассеяние; тогда и все промежуточные состояния в (71.2) — такие же «двухчастичные». Суммирование по ним означает интегрирование по промежуточным импульсам $\mathbf{p}''_1$, $\mathbf{p}''_2$ и суммирование по спиновым квантовым числам (например, спиральностям) обеих частиц, которые обозначим через λ'':

$$\sum_n \to \int \frac{V^2 d^3p''_1 d^3p''_2}{(2\pi)^6} \sum_{\lambda''}.$$

Исключив δ-функции тем же способом, как это делалось в § 64, получим «двухчастичное» условие унитарности в виде

$$T_{fi} - T^*_{if} = \frac{iV^2}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda''} \frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \int T_{fn} T^*_{in} \varepsilon''_1 \varepsilon''_2 \, do'',$$

где $\mathbf{p}$ — импульс, ε — полная энергия в системе центра инерции. Нормировочный объем исчезает из этого соотношения после перехода от амплитуд T_{fi} к амплитудам M_{fi}, согласно (64.10):

$$M_{fi} - M_{if}^* = \frac{i}{(4\pi)^2} \sum_{\lambda''} \frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \int M_{fn} M_{in}^* do''. \qquad (71.4)$$

Определим амплитуду упругого рассеяния так, чтобы было

$$d\sigma = |\langle \mathbf{n}'\lambda'|f|\mathbf{n}\lambda\rangle|^2 do' \qquad (71.5)$$

($\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ — направления начального и конечного импульсов; λ, λ' — начальные и конечные спиновые квантовые числа). Сравнение с (64.19) показывает, что

$$\langle \mathbf{n}'\lambda'|f|\mathbf{n}\lambda\rangle = \frac{1}{8\pi\varepsilon} M_{fi}, \qquad (71.6)$$

и условие унитарности (71.4) принимает вид

$$\langle \mathbf{n}'\lambda'|f|\mathbf{n}\lambda\rangle - \langle \mathbf{n}\lambda|f|\mathbf{n}'\lambda'\rangle^* =$$
$$= \frac{i|\mathbf{p}|}{2\pi} \sum_{\lambda''} \int \langle \mathbf{n}'\lambda'|f|\mathbf{n}''\lambda''\rangle \langle \mathbf{n}\lambda|f|\mathbf{n}''\lambda''\rangle^* do'', \qquad (71.7)$$

обобщающий известную формулу нерелятивистской теории (см. III, (125.8)).

Амплитудой упругого рассеяния на нулевой угол называют диагональный матричный элемент T_{ii}, в котором конечное состояние частиц совпадает с начальным [1]). Для этой амплитуды условие унитарности (71.2) принимает вид

$$2\,\mathrm{Im}\, T_{ii} = (2\pi)^4 \sum_n |T_{in}|^2 \delta^{(4)}(P_i - P_n). \qquad (71.8)$$

Правая сторона этого равенства лишь множителем отличается от полного сечения всех возможных процессов рассеяния из данного начального состояния i; обозначим это сечение посредством σ_t. Действительно, суммируя вероятность (64.5) по состояниям f и деля на плотность потока j, находим

$$\sigma_t = \frac{(2\pi)^4 V}{j} \sum_n |T_{in}|^2 \delta^{(4)}(P_i - P_n),$$

так что

$$\frac{2V}{j}\, \mathrm{Im}\, T_{ii} = \sigma_t.$$

Нормировочный объем исчезает отсюда после замены $T_{ii} = M_{ii}/(2\varepsilon_1 V \cdot 2\varepsilon_2 V)$ (ε_1, ε_2 — энергии частиц в системе центра инерции) и подстановки j из (64.17):

$$\mathrm{Im}\, M_{ii} = 2|\mathbf{p}|\varepsilon\sigma_t. \qquad (71.9)$$

[1]) Подчеркнем, что речь идет именно об элементах матрицы T, а не S, т. е. диагональный элемент берется после исключения из S единичной матрицы.

Эта формула составляет содержание так называемой *оптической теоремы*. Если ввести амплитуду упругого рассеяния (71.6), она примет свой обычный вид

$$\operatorname{Im}\langle\mathbf{n}\lambda|f|\mathbf{n}\lambda\rangle = \frac{|\mathbf{p}|}{4\pi}\sigma_t \tag{71.10}$$

(ср. III, (142.10)).

Если S-матрица дана в моментном представлении (парциальные амплитуды), то ввиду ее диагональности по J условие унитарности пишется для каждого значения J в отдельности.

Так, если возможно лишь упругое рассеяние, условие унитарности имеет вид

$$\sum_{\lambda''}\langle\lambda'|S^J|\lambda''\rangle\langle\lambda|S^J|\lambda''\rangle^* = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{71.11}$$

В силу T-инвариантности матрица упругого рассеяния симметрична (ср. (69.10)) и поэтому может быть приведена к диагональному виду. После этого условие унитарности требует равенства диагональных элементов по модулю единице; их принято в таком случае записывать в виде

$$S_n^J = \exp(2i\delta_{Jn}), \tag{71.12}$$

где δ_{Jn} — вещественные постоянные — функции энергии (индекс n нумерует при заданном J диагональные элементы). В общем случае, когда число N независимых амплитуд превышает ранг (квадратной) матрицы S^J, коэффициенты преобразования, осуществляющего диагонализацию S^J, зависят от J и E (в этих коэффициентах, наряду с главными значениями матрицы, заключены также независимые величины, эквивалентные исходным N величинам). Но если число N совпадает с рангом матрицы S^J (и тем самым с числом ее главных значений), то коэффициенты диагонализации универсальны. При этом диагонализирующие состояния — это состояния с определенными четностями (но, конечно, уже без определенных спиральностей).

Условие (71.11), выраженное с помощью парциальных амплитуд $\langle\lambda'|f^J|\lambda\rangle$, имеет вид

$$\langle\lambda'|f^J|\lambda\rangle - \langle\lambda|f^J|\lambda'\rangle^* = 2i|\mathbf{p}|\sum_{\lambda''}\langle\lambda'|f^J|\lambda''\rangle\lambda|f^J|\lambda''\rangle^*, \tag{71.13}$$

в чем легко убедиться, подставив в (71.7) разложение (68.13) и учтя ортонормированность D-функций. При T-инвариантности матрица $\langle\lambda'|f^J|\lambda\rangle$ симметрична, и (71.13) принимает вид

$$\operatorname{Im}\langle\lambda'|f^J|\lambda\rangle = |\mathbf{p}|\langle\lambda'|f^J f^{j+}|\lambda\rangle. \tag{71.14}$$

Если матрица диагонализована, то ее диагональные элементы

$$f_n^J = \frac{1}{2i|\mathbf{p}|}(\exp(2i\delta_{Jn}) - 1) = \frac{1}{|\mathbf{p}|}\exp(i\delta_{Jn})\sin\delta_{Jn}. \tag{71.15}$$

Наконец, укажем некоторые следствия, возникающие из условия унитарности вместе с требованием CPT-инвариантности. В силу последней

$$T_{fi} = T_{\overline{i}\overline{f}}, \tag{71.16}$$

где $\overline{i}$ и $\overline{f}$ — состояния, отличающиеся от i и f заменой всех частиц античастицами (а также изменением знака векторов момента при неизменных импульсах). В частности, для диагональных элементов

$$T_{ii} = T_{\overline{i}\overline{i}}.$$

Из (71.8) или (71.9) следует поэтому, что полное сечение всех возможных процессов (с заданным начальным состоянием) одинаково для реакций между частицами и античастицами.

В частности, одинаковы полные вероятности распада (т. е. времена жизни) частицы и античастицы. Эти результаты (наряду с равенством масс частицы и античастицы — § 11) — важнейшие следствия CPT-инвариантности взаимодействий. Напомним (см. конец § 69), что такое же утверждение для каждого из возможных каналов распада в отдельности требует также соблюдения CP-инвариантности.

Задача

Исходя из условия унитарности, найти связь между фазами парциальных амплитуд фоторождения пионов на нуклонах ($\gamma + N \to \pi + N$) и упругого рассеяния пионов на нуклонах ($\pi + N \to \pi + N$); при этом учитывается, что πN-рассеяние связано с сильными взаимодействиями, а фоторождение и γN-рассеяние — с электромагнитным взаимодействием.

Решение. Обозначим парциальные амплитуды:

$$\langle \pi N|S|\gamma N\rangle = S_{\pi\gamma}, \quad \langle \gamma N|S|\gamma N\rangle = S_{\gamma\gamma}, \quad \langle \pi N|S|\pi N\rangle = S_{\pi\pi}$$

(опущены индексы J и спиральностей). Фоторождение — процесс первого, а γN-рассеяние — второго порядка по заряду e; поэтому $S_{\pi\gamma} \sim e$, $S_{\gamma\gamma} - 1 \sim e^2$. Амплитуда же $S_{\pi\pi}$ малости не содержит. С точностью до членов $\sim e$ условия (71.1) дают

$$S_{\pi\gamma} S^*_{\gamma\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\gamma\pi} \approx S_{\pi\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\gamma\pi} = 0, \tag{1}$$

$$S_{\pi\gamma} S^*_{\pi\gamma} + S_{\pi\pi} S^*_{\pi\pi} \approx S_{\pi\pi} S^*_{\pi\pi} = 1 \tag{2}$$

(в правой стороне равенства (2) надо понимать 1 как единичную матрицу по спиновым переменным). В силу T-инвариантности матрица $S_{\pi\pi}$ симметрична, а $S_{\gamma\pi} = S_{\pi\gamma}$. Выберем матрицу $S_{\pi\pi}$ в диагональной форме, т. е. по отношению к состояниям пиона с определенными четностями; тогда из (2) следует, что диагональные элементы имеют вид $e^{2i\delta_\pi}$ с различными постоянными δ_π. После этого находим из (1) для каждого из элементов матрицы $S_{\pi\gamma}$:

$$S_{\pi\gamma}/S^*_{\pi\gamma} = -e^{2i\delta_\pi},$$

откуда

$$S_{\pi\gamma} = \pm |S_{\pi\gamma}| i e^{i\delta_\pi}.$$

Таким образом, фаза парциальной амплитуды фоторождения (в состояние с определенной четностью) определяется фазой упругого πN-рассеяния.

ГЛАВА VIII

ИНВАРИАНТНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 72. Хронологическое произведение

Вероятности различных процессов при столкновениях частиц, взаимодействие между которыми можно считать малым, вычисляются с помощью теории возмущений. В своей обычной (для нерелятивистской квантовой механики) форме аппарат этой теории обладает, однако, тем недостатком, что в нем не выявляются явным образом требования релятивистской инвариантности. Хотя при применении такого аппарата к релятивистским задачам окончательный результат и будет удовлетворять этим требованиям, но неинвариантная форма промежуточных формул существенно усложняет вычисления. Настоящая глава посвящена развитию свободной от этого недостатка последовательной релятивистской теории возмущений; она была построена *Фейнманом* (*R. P. Feynman*, 1948–1949).

Имея в виду вторично квантованное описание системы, обозначим через Φ ее волновую функцию в представлении чисел заполнения различных состояний свободных частиц. Гамильтониан системы $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}$, где $\widehat{V}$ — оператор взаимодействия. Пусть Φ_n — собственные функции невозмущенного гамильтониана; каждая из них отвечает некоторым определенным значениям всех чисел заполнения. Произвольная функция Φ представляется в виде разложения $\Phi = \sum C_n\Phi_n$. Тогда точное волновое уравнение

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} = (\widehat{H}_0 + \widehat{V})\Phi \tag{72.1}$$

представится в виде системы уравнений для коэффициентов C_n:

$$i\dot{C}_n = \sum_m V_{nm}\exp[i(E_n - E_m)t]C_m, \tag{72.2}$$

где V_{nm} — не зависящие от времени матричные элементы оператора $\widehat{V}$, а E_n — уровни энергии невозмущенной системы (ср. III, § 40).

По определению оператор $\widehat{V}$ не зависит явно от времени. Величины же

$$V_{nm}(t) = V_{nm}\exp[i(E_n - E_m)t] \tag{72.3}$$

можно рассматривать как матричные элементы зависящего от времени оператора

$$\widehat{V}(t) = \exp(i\widehat{H}_0 t)\widehat{V}\exp(-i\widehat{H}_0 t). \tag{72.4}$$

О нем говорят как об операторе в *представлении взаимодействия* (в отличие от исходного не зависящего от времени шредингеровского оператора $\widehat{V}$ [1])). Обозначив теперь прежней буквой Φ волновую функцию в этом новом представлении, запишем уравнения (72.2) в символическом виде

$$i\dot{\Phi} = \widehat{V}(t)\Phi. \tag{72.5}$$

Изменение волновой функции в этом представлении связано лишь с действием возмущения, т. е. отвечает процессам, происходящим благодаря взаимодействию частиц.

Если $\Phi(t)$ и $\Phi(t+\delta t)$ — значения Φ в два бесконечно близких момента времени, то в силу (72.5) они связаны друг с другом посредством

$$\Phi(t+\delta t) = [1 - i\delta t\widehat{V}(t)]\Phi(t) = \exp[-i\delta t\cdot\widehat{V}(t)]\Phi(t).$$

Соответственно значение Φ в произвольный момент t_f может быть выражено через значение в некоторый начальный момент t_i $(t_f > t_i)$ как

$$\Phi(t_f) = \left\{\prod_i^f \exp[-i\delta t_\alpha\cdot\widehat{V}(t_\alpha)]\right\}\Phi(t_i), \tag{72.6}$$

где знак $\prod$ означает предел произведения по всем бесконечно малым интервалам δt_α между t_i и t_f. Если бы $V(t)$ было обычной функцией, то этот предел сводился бы просто к

$$\exp\left\{-i\int_{t_i}^{t_f} V(t)dt\right\}.$$

Но такое сведение основано на коммутативности множителей (взятых в различные моменты времени), подразумевающейся при переходе от произведения в (72.6) к суммированию в экспоненте. Для оператора $\widehat{V}(t)$ такой коммутативности нет, и сведение к обычному интегралу невозможно.

---

[1]) Подчеркнем, что в определении (72.4) фигурирует невозмущенный гамильтониан $\widehat{H}_0$. Этим оно отличается от *гейзенберговского представления* операторов, в котором

$$\widehat{V}^H(t) = \exp(i\widehat{H}t)\widehat{V}\exp(-i\widehat{H}t)$$

(см. III, § 13 и ниже, § 102).

Напишем (72.6) в символическом виде

$$\Phi(t_f) = \mathrm{T}\exp\left\{-i\int\limits_{t_i}^{t_f}\widehat{V}(t)dt\right\}\Phi(t_i), \tag{72.7}$$

где T— символ *хронологизации*, означающий определенную («хронологическую») последовательность моментов времени в последовательных множителях произведения (72.6). В частности, положив $t_i \to -\infty$, $t_f \to +\infty$, получим

$$\Phi(+\infty) = \widehat{S}\Phi(-\infty), \tag{72.8}$$

где

$$\widehat{S} = \mathrm{T}\exp\left\{-i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{V}(t)\,dt\right\}. \tag{72.9}$$

Смысл записи (72.7)–(72.9) формально точного решения волнового уравнения состоит в том, что такая запись позволяет легко написать ряд, представляющий собой разложение по степеням возмущения:

$$\widehat{S}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^k}{k!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt_2\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt_k\cdot\mathrm{T}\{\widehat{V}(t_1)\widehat{V}(t_2)\ldots\widehat{V}(t_k)\}. \tag{72.10}$$

Здесь в каждом члене k-я степень интеграла написана в виде k-кратного интеграла, а символ T означает, что в каждой области значений переменных t_1, t_2, ..., t_k надо располагать соответствующие операторы в хронологическом порядке справа налево в порядке возрастающих значений t [1]).

Из определения (72.8) ясно, что если до столкновения система была в состоянии Φ_i (некоторая совокупность свободных частиц), то амплитуда вероятности ее перехода в состояние Φ_f (другая совокупность свободных частиц) есть матричный элемент S_{fi}. Другими словами, эти элементы и составляют S-матрицу.

Оператор электромагнитного взаимодействия был написан уже в § 43:

$$\widehat{V} = e\int(\widehat{j}\widehat{A})d^3x. \tag{72.11}$$

Подставив его в (72.9), получим

$$\widehat{S} = \mathrm{T}\exp\left\{-ie\int(\widehat{j}\widehat{A})\,d^4x\right\}. \tag{72.12}$$

[1]) Вывод правил релятивистской теории возмущений с помощью разложения (72.10) принадлежит *Дайсону* (*F. Dayson*, 1949).

Существенно, что оператор (72.12) релятивистски инвариантен. Это видно из скалярности подынтегрального выражения, инвариантного характера интегрирования по d^4x и инвариантного характера операции хронологизации. Последнее обстоятельство требует, однако, разъяснения.

Как известно, последовательность двух моментов времени t_1 и t_2 (знак разности t_2-t_1) не зависит от выбора системы отсчета, если эти моменты относятся к мировым точкам x_1 и x_2, разделенным времениподобным интервалом: $(x_2-x_1)^2>0$. В таком случае инвариантность хронологизации автоматична. Если же $(x_2-$ $-x_1)^2<0$ (пространственноподобный интервал), то в разных системах отсчета может быть как $t_2>t_1$, так и $t_2<t_1$ [1]). Но такие две точки отвечают событиям, между которыми не может существовать причинной связи. Очевидно поэтому, что не могут быть некоммутативными операторы двух физических величин, относящихся к таким точкам: некоммутативность операторов физически означает совместную неизмеримость данных величин, что предполагает наличие физической связи между обоими измерениями. Следовательно, хронологичность произведения останется инвариантной и в этом случае: хотя преобразование Лоренца может нарушить последовательность моментов времени, но ввиду коммутативности множителей их можно переставить обратно в хронологический порядок [2]).

Легко видеть, что данное в этом параграфе определение S-матрицы автоматически удовлетворяет условию унитарности. Представив $\widehat{S}$ в виде хронологического произведения, фигурирующего в (72.6), и учитывая эрмитовость $\widehat{V}$, найдем, что $\widehat{S}^+$ выражается произведением таких же множителей $\exp(i\delta t_\alpha\cdot\widehat{V}(t_\alpha))$

[1]) Вместо времениподобных и пространственноподобных интервалов часто говорят для краткости об областях соответственно внутри и вне светового конуса: все точки x, отделенные от точки x' интервалом с $(x-x')^2>0$, находятся внутри двуполостного конуса с вершиной в точке x', а точки, отделенные интервалом с $(x-x')^2<0$, — вне этого конуса.

[2]) В применении к произведению $\widehat{V}(t_1)\widehat{V}(t_2)\ldots$ это утверждение надо уточнить во избежание недоразумений. Поскольку сам оператор $\widehat{V}$ не обладает калибровочной инвариантностью (он меняется вместе с $\widehat{A}$), множители $\widehat{V}(t_1)$, $\widehat{V}(t_2)$, ..., коммутативные при одной калибровке потенциала, могут оказаться некоммутативными при другой калибровке. Сделанные выше утверждения надо поэтому сформулировать как возможность такого выбора калибровки потенциала, при котором $\widehat{V}(t_1)$ и $\widehat{V}(t_2)$ вне светового конуса будут коммутативны. Эта оговорка, очевидно, никак не сказывается на инвариантности S-матрицы: амплитуды рассеяния как реальные физические величины вообще не могут зависеть от калибровки потенциала (формально эта независимость следует из отмеченной в § 43 калибровочной инвариантности интеграла действия).

(с обратным знаком в показателе) в хронологически обратном порядке. Поэтому при перемножении $\widehat{S}$ и $\widehat{S}^+$ все множители попарно сокращаются.

Обратим внимание на то, что унитарность оператора $\widehat{S}$ обеспечивается в данном случае эрмитовостью гамильтониана. Но требование унитарности имеет в действительности более общий характер, чем предпосылки, лежащие в основе излагаемой теории. Оно должно было бы выполняться и при квантовомеханическом описании, не использующем понятий о гамильтониане и волновых функциях.

§ 73. Диаграммы Фейнмана для рассеяния электронов

Покажем на конкретных примерах, каким образом осуществляется вычисление элементов матрицы рассеяния. Эти примеры облегчат дальнейшую формулировку общих правил инвариантной теории возмущений.

Оператор тока $\widehat{j}$ содержит произведение двух электронных ψ-операторов. Поэтому в первом порядке теории возмущений могли бы возникнуть процессы, в которых участвуют всего (в начальном и конечном состояниях) три частицы — два электрона (оператор $\widehat{j}$) и один фотон (оператор $\widehat{A}$). Легко, однако, видеть, что такие процессы между свободными частицами невозможны — они запрещены законом сохранения энергии и импульса. Если p_1 и p_2 — 4-импульсы электронов, а k — фотона, то сохранение 4-импульса изображалось бы равенством $k = p_2 - p_1$ или $k = p_2 + p_1$. Но такие равенства невозможны, так как для фотона $k^2 = 0$, а квадрат $(p_2 \pm p_1)^2$ заведомо отличен от нуля. Действительно, вычисляя значение инварианта $(p_2 \pm p_1)^2$ в системе покоя одного из электронов, получаем

$$(p_2 \pm p_1)^2 = 2(m^2 \pm p_1 p_2) = 2(m^2 \pm \varepsilon_1\varepsilon_2 \mp \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) = 2m(m \pm \varepsilon_2).$$

Поскольку $\varepsilon_2 > m$, то

$$(p_2 + p_1)^2 > 0, \qquad (p_2 - p_1)^2 < 0. \tag{73.1}$$

Таким образом, первые неисчезающие (недиагональные) элементы S-матрицы могут появиться лишь во втором порядке теории возмущений. Все относящиеся сюда процессы содержатся в операторе второго порядка, получающемся при разложении выражения (72.12):

$$\widehat{S}^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \iint d^4x\, d^4x' \cdot \mathrm{T}(\widehat{j}^{\mu}(x)\widehat{A}_{\mu}(x)\widehat{j}^{\nu}(x')\widehat{A}_{\nu}(x')).$$

Поскольку электронные и фотонные операторы коммутативны друг с другом, фигурирующее здесь T-произведение можно

разбить на два T-произведения:

$$\widehat{S}^{(2)} = -\frac{e^2}{2!}\iint d^4x\, d^4x' \cdot \mathrm{T}(\widehat{j}^{\mu}(x)\widehat{j}^{\nu}(x'))\mathrm{T}(\widehat{A}_{\mu}(x)\widehat{A}_{\nu}(x')). \quad (73.2)$$

В качестве первого примера рассмотрим упругое рассеяние двух электронов: в начальном состоянии имеем два электрона с 4-импульсами p_1 и p_2, а в конечном — два электрона с другими 4-импульсами p_3 и p_4. Подразумевается также, что все электроны находятся в определенных спиновых состояниях; индексы спиновых переменных для краткости везде опускаем.

Поскольку в обоих состояниях фотоны вообще отсутствуют, нужный нам матричный элемент T-произведения фотонных операторов есть диагональный элемент $\langle 0|\ldots|0\rangle$, где символ $|0\rangle$ обозначает состояние фотонного вакуума. Это среднее по вакууму значение T-произведения представляет собой определенную (для каждой пары индексов $\mu\nu$) функцию координат двух точек x и x'. При этом в силу однородности 4-пространства координаты могут входить лишь в виде разности $x - x'$. Тензор

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0|\mathrm{T}A_{\mu}(x)A_{\nu}(x')|0\rangle \quad (73.3)$$

называют *фотонной функцией распространения* (или *фотонным пропагатором*). Явное выражение для нее будет получено в § 76. Для T-произведения электронных операторов нам надо вычислить матричный элемент

$$\langle 34|\mathrm{T}j^{\mu}(x)j^{\nu}(x')|12\rangle, \quad (73.4)$$

где символы $|12\rangle$, $|34\rangle$ обозначают состояния с парами электронов с соответствующими импульсами. Этот элемент тоже может быть представлен в виде среднего по вакууму с помощью очевидного равенства

$$\langle 2|F|1\rangle = \langle 0|a_2 F a_1^{+}|0\rangle,$$

где $\widehat{F}$ — произвольный оператор, а $\widehat{a}_1^{+}$ и $\widehat{a}_2$ — операторы соответственно рождения первого и уничтожения второго электрона. Поэтому вместо (73.4) можно вычислять величину

$$\langle 0|a_3 a_4 \mathrm{T}(j^{\mu}(x)j^{\nu}(x'))a_2^{+}a_1^{+}|0\rangle \quad (73.5)$$

(индексы 1, 2, ... для краткости заменяют p_1, p_2, ...).

Каждый из двух операторов тока есть произведение $\widehat{j} = \widehat{\overline{\psi}}\gamma\widehat{\psi}$, а каждый из ψ-операторов представляется суммой

$$\widehat{\psi} = \sum_{\mathbf{p}}(\widehat{a}_{\mathbf{p}}\psi_p + \widehat{b}_{\mathbf{p}}^{+}\psi_{-p}), \quad \widehat{\overline{\psi}} = \sum_{\mathbf{p}}(\widehat{a}_{\mathbf{p}}^{+}\overline{\psi}_p + \widehat{b}_{\mathbf{p}}\overline{\psi}_{-p}) \quad (73.6)$$

(вторые члены содержат позитронные операторы, которые в данном случае «не работают»). Поэтому произведение $\widehat{j}^{\mu}(x)\widehat{j}^{\nu}(x')$

представляется в виде суммы членов, каждый из которых содержит произведение двух операторов $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$ и двух $\widehat{a}^{+}_{\mathbf{p}}$. Эти операторы должны обеспечить уничтожение электронов 1, 2 и рождение электронов 3, 4. Другими словами, это должны быть операторы $\widehat{a}_1$, $\widehat{a}_2$, $\widehat{a}^{+}_3$, $\widehat{a}^{+}_4$, которые, как говорят, *свертываются* с «внешними» операторами $\widehat{a}^{+}_1$, $\widehat{a}^{+}_2$, $\widehat{a}_3$, $\widehat{a}_4$ в (73.5) и сокращаются согласно равенствам

$$\langle 0|a_{\mathbf{p}}a^{+}_{\mathbf{p}}|0\rangle = 1. \tag{73.7}$$

В зависимости от того, из которых ψ-операторов берутся $\widehat{a}_1$, $\widehat{a}_2$, $\widehat{a}^{+}_3$, $\widehat{a}^{+}_4$, в (73.5) возникают четыре члена

$$(73.5) = a_3\, a_4(\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\,\psi)(\overline{\psi}'\gamma^{\nu}\psi')a^{+}_2\, a^{+}_1 + a_3\, a_4(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi)(\overline{\psi}'\,\gamma^{\nu}\,\psi')a^{+}_2\, a^{+}_1 +$$

$$+ a_3 a_4(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\,\psi)(\overline{\psi}'\gamma^{\nu}\psi')a^{+}_2\, a^{+}_1 + a_3\, a_4(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi)(\overline{\psi}'\,\gamma^{\nu}\,\psi')a^{+}_2\, a^{+}_1, \tag{73.8}$$

где $\psi = \psi(x)$, $\psi' = \psi(x')$, а дугами соединены свертываемые операторы, т. е. те, из которых берется пара операторов $\widehat{a}$, $\widehat{a}^{+}$ для сокращения согласно (73.7). В каждом из этих членов последовательными перестановками операторов $\widehat{a}_1$, $\widehat{a}_2$, ... приводим сопряженные операторы к попарному соседству ($\widehat{a}_1\widehat{a}^{+}_1$ и т. п.), после чего среднее значение их произведения сводится к произведению средних значений (73.7). Учитывая, что все эти операторы антикоммутативны (1, 2, 3, 4 — различные состояния!) [1]), найдем, что матричный элемент (73.4) равен

$$\langle 34|\mathrm{T}j^{\mu}(x)j^{\nu}(x')|12\rangle = (\overline{\psi}_4\gamma^{\mu}\psi_2)(\overline{\psi}'_3\gamma^{\nu}\psi'_1) + (\overline{\psi}_3\gamma^{\mu}\psi_1)(\overline{\psi}'_4\gamma^{\nu}\psi'_2) -$$
$$- (\overline{\psi}_3\gamma^{\mu}\psi_2)(\overline{\psi}'_4\gamma^{\nu}\psi'_1) - (\overline{\psi}_4\gamma^{\mu}\psi_1)(\overline{\psi}'_3\gamma^{\nu}\psi'_2). \tag{73.9}$$

Отметим, что общий знак этой суммы условен и зависит от порядка, в котором мы расположили «внешние» электронные операторы в (73.5). Это обстоятельство соответствует тому, что общий знак матричного элемента для рассеяния тождественных фермионов вообще произволен. Относительный же знак различных членов в (73.9) от принимаемого порядка расположения внешних операторов, конечно, не зависит.

Два члена в первой и второй строках (73.9) отличаются друг от друга лишь одновременной перестановкой индексов μ, ν и аргументов x, x'. Такая перестановка не изменит, очевидно, и ма-

[1]) Ввиду этой антикоммутативности операторы $\widehat{j}(x)$ и $\widehat{j}(x')$ можно в данном случае считать (при вычислении матричного элемента) коммутативными и опустить знак T-произведения.

тричный элемент (73.3) (в котором порядок множителей все равно устанавливается символом T). Поэтому после перемножения (73.3) и (73.9) и интегрирования по d^4xd^4x' четыре члена в (73.9) дают попарно одинаковый результат, так что матричный элемент

$$S_{fi} = ie^2 \iint d^4x\, d^4x' \cdot D_{\mu\nu}(x-x')\{(\overline{\psi}_4\gamma^\mu\psi_2)(\overline{\psi}_3'\gamma^\nu\psi_1') - \\ - (\overline{\psi}_4\gamma^\mu\psi_1)(\overline{\psi}_3'\gamma^\nu\psi_2')\} \quad (73.10)$$

(обратим внимание на исчезновение множителя 1/2!).

Электронные волновые функции — плоские волны (64.8), поэтому выражение в фигурных скобках

$$\{\ldots\} = (\overline{u}_4\gamma^\mu u_2)(\overline{u}_3\gamma^\nu u_1)e^{-i(p_2-p_4)x-i(p_1-p_3)x'} - \\ - (\overline{u}_4\gamma^\mu u_1)(\overline{u}_3\gamma^\nu u_2)e^{-i(p_1-p_4)x-i(p_2-p_3)x'} = \\ = \{(\overline{u}_4\gamma^\mu u_2)(\overline{u}_3\gamma^\nu u_1)e^{-i[(p_2-p_4)+(p_3-p_1)]\xi/2} - \\ - (\overline{u}_4\gamma^\mu u_1)(\overline{u}_3\gamma^\nu u_2)e^{-i[(p_1-p_4)+(p_3-p_2)]\xi/2}\}e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)X},$$

где $X=(x+x')/2$, $\xi=x-x'$. Интегрирование по $d^4x\,d^4x'$ заменяется интегрированием по $d^4\xi\,d^4X$. Интеграл по d^4X дает δ-функцию (в силу которой $p_1+p_2=p_3+p_4$). Перейдя затем от матрицы S к матрице M (см. § 64), получим окончательно для амплитуды рассеяния

$$M_{fi} = e^2\{(\overline{u}_4\gamma^\mu u_2)D_{\mu\nu}(p_4-p_2)(\overline{u}_3\gamma^\nu u_1) - \\ - (\overline{u}_4\gamma^\mu u_1)D_{\mu\nu}(p_4-p_1)(\overline{u}_3\gamma^\nu u_2)\}. \quad (73.11)$$

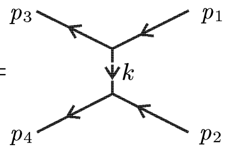
Здесь введена фотонная функция распространения в импульсном представлении

$$D_{\mu\nu}(k) = \int D_{\mu\nu}(\xi)e^{ik\xi}d^4\xi. \quad (73.12)$$

Каждый из двух членов амплитуды (73.11) может быть символически представлен в виде так называемых *диаграмм Фейнмана*.

Первый член представляется диаграммой

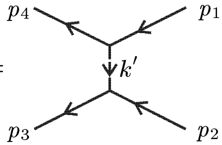
$$e^2(\overline{u}_4\gamma^\mu u_2)D_{\mu\nu}(k)(\overline{u}_3\gamma^\nu u_1) = \quad (73.13)$$



Каждой из точек пересечения линий (*вершине* диаграммы) сопоставляется множитель γ. «Входящие» сплошные линии, направ-

ленные к вершине, отвечают начальным электронам; им сопоставляются множители u — биспинорные амплитуды соответствующих электронных состояний. «Выходящие» сплошные линии, направленные от вершин — конечные электроны, этим линиям сопоставляются множители $\overline{u}$. При «прочтении» диаграммы указанные множители записываются слева направо в порядке, соответствующем передвижению вдоль сплошных линий против направления стрелок. Обе вершины соединены штриховой линией, отвечающей *виртуальному* (промежуточному) фотону, «испускаемому» в одной вершине и «поглощаемому» в другой; этой линии сопоставляется множитель $-iD_{\mu\nu}(k)$. 4-импульс виртуального фотона k определяется «сохранением 4-импульса в вершине»: равенством суммарных импульсов входящих и выходящих линий; в данном случае $k = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$. Помимо всех перечисленных множителей, диаграмме в целом приписывается еще общий множитель $(-ie)^2$ (показатель степени — число вершин в диаграмме), и в таком виде она входит слагаемым в iM_{fi}. Аналогичным образом второй член в (73.11) представляется диаграммой

$$e^2(\overline{u}_4\gamma^\mu u_1)D_{\mu\nu}(k')(\overline{u}_3\gamma^\nu u_2) = \tag{73.14}$$



(надо иметь в виду, что $k' = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$). Безразлично, начинать ли прочтение диаграммы от конца p_3 или p_4; получающиеся при этом выражения совпадают друг с другом в силу симметричности тензора $D_{\mu\nu}$. Безразличен также выбор направления линии виртуального фотона: изменение этого направления приведет лишь к изменению знака k, несущественному в силу четности функций $D_{\mu\nu}(k)$ (см. § 76).

Линии, отвечающие начальным и конечным частицам, называют *внешними линиями* или *свободными концами* диаграммы. Диаграммы (73.13) и (73.14) отличаются друг от друга обменом двух свободных электронных концов (p_3 и p_4). Такая перестановка двух фермионов меняет знак диаграммы; это правило соответствует тому, что в амплитуду (73.11) оба члена входят с разными знаками.

Мы будем в дальнейшем всегда пользоваться диаграммами Фейнмана в описываемом, импульсном, представлении. Отметим, однако, что эти диаграммы могут быть приведены в соответствие с членами амплитуды рассеяния также и в их первоначальном — координатном — представлении (интегралы (73.10)). Роль электронных амплитуд при этом играют соответствующие координатные волновые функции, а пропагаторы берутся в координат-

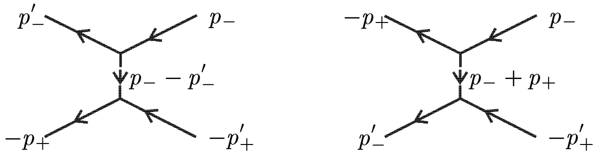
ном представлении. Каждой вершине отвечает одна из переменных интегрирования (x или x' в (73.10)); множители, приписываемые пересекающимся в одной вершине линиям, берутся в функции этой переменной.

Рассмотрим теперь взаимное рассеяние электрона и позитрона; их начальные импульсы обозначим соответственно p_- и p_+, а конечные p'_- и p'_+.

Операторы рождения и уничтожения позитронов входят в ψ-операторы (73.6) вместе соответственно с операторами уничтожения и рождения электронов. В то время, как в предыдущем случае уничтожение обеих начальных частиц обеспечивалось оператором $\widehat{\psi}$, а рождение обеих конечных — оператором $\widehat{\overline{\psi}}$, здесь роль этих операторов противоположна по отношению к электронам и позитронам. Поэтому сопряженной функцией $\overline{\psi}(-p_+)$ будет описываться теперь начальный позитрон, а конечный позитрон — функцией $\psi(-p'_+)$ (причем обе — от 4-импульса с обратным знаком). С учетом этого различия получим в результате амплитуду рассеяния [1])

$$M_{fi} = -e^2(\overline{u}(p'_-)\gamma^\mu u(p_-))D_{\mu\nu}(p_- - p'_-)(\overline{u}(-p_+)\gamma^\nu u(-p'_+)) + \\ + e^2(\overline{u}(-p_+)\gamma^\mu u(p_-))D_{\mu\nu}(p_- + p_+)(\overline{u}(p'_-)\gamma^\nu u(-p'_+)). \quad (73.15)$$

Первый и второй члены в этом выражении представляются следующими диаграммами:



(73.16)

Правила составления диаграмм меняются лишь в части, касающейся позитронов. По-прежнему входящим сплошным линиям сопоставляется множитель u, а выходящим $\overline{u}$. Но теперь входящие линии отвечают конечным, а выходящие — начальным пози-

[1]) Для рассеяния нетождественных частиц общий знак амплитуды однозначен. Он определяется тем, что в (73.5) «внешние» операторы должны быть расположены таким образом, чтобы оба электронных оператора стояли по краям:

$$\langle 0|a'b' \ldots b^+a^+|0\rangle$$

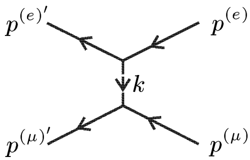
(или же оба в середине); этим условием обеспечивается «одинаковый знак» начального и конечного состояний вакуума. Общий знак амплитуды можно проверить и по нерелятивистскому пределу: мы увидим далее (см. § 81), что в этом пределе второй член в (73.15) стремится к нулю, а первый — к борновской амплитуде резерфордовского рассеяния.

тронам, причем импульсы всех позитронов берутся с обратным знаком.

Обратим внимание на различный характер двух диаграмм (73.16). В первой диаграмме в одной из вершин пересекаются линии начального и конечного электрона, в другой вершине — то же самое для позитрона. Во второй же диаграмме в каждой из вершин пересекаются линии электронов и позитронов — начальных и конечных; в верхней как бы происходит аннигиляция пары с испусканием виртуального фотона, а в нижней — рождение пары из фотона.

Это различие отражается и в свойствах виртуальных фотонов в обеих диаграммах. В первой диаграмме (диаграмма «рассеивательного» типа) 4-импульс виртуального фотона равен разности 4-импульсов двух электронов (или позитронов); поэтому $k^2 < 0$ (ср. (73.1)). Во второй же диаграмме («аннигиляционной») $k' = p_- + p_+$, и потому $k'^2 > 0$. Отметим в этой связи, что для виртуального фотона всегда $k^2 \neq 0$, в отличие от реального фотона, для которого $k^2 = 0$.

Если сталкивающиеся частицы не тождественны и не являются частицей и античастицей (скажем, электрон и мюон), то амплитуда рассеяния изобразится всего одной диаграммой:



(73.17)

Диаграмма же аннигиляционного или обменного типа в этом случае невозможна. Мы получим этот результат аналитически, написав оператор тока как сумму электронного и мюонного токов

$$\widehat{j} = \widehat{j}^{(e)} + \widehat{j}^{(\mu)} = (\widehat{\overline{\psi}}^{(e)}\gamma\widehat{\psi}^{(e)}) + (\widehat{\overline{\psi}}^{(\mu)}\gamma\widehat{\psi}^{(\mu)})$$

и взяв в произведении $\widehat{j}^{\mu}(x)\widehat{j}^{\nu}(x')$ матричные элементы от членов, производящих требуемые уничтожения и рождения частиц.

Вернемся к процессам первого порядка, запрещенным, как было указано в начале параграфа, законом сохранения 4-импульса. Матричные элементы оператора

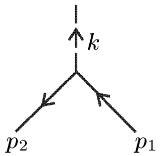
$$\widehat{S}^{(1)} = -ie\int \widehat{j}(x)\widehat{A}(x)\,d^4x \tag{73.18}$$

для таких переходов отвечают рождению или уничтожению «в одной и той же точке x» трех реальных частиц: двух электронов и одного фотона. Они возникают в результате свертывания операторов $\widehat{\psi}(x)$ и $\widehat{\overline{\psi}}(x)$ в одной точке x и определяются (например,

для испускания фотона) интегралами вида

$$S_{fi} = -ie \int \overline{\psi}_2(x)\psi_1(x)(\gamma A^*(x))\, d^4x,$$

обращающимися в нуль благодаря наличию в подынтегральном выражении множителя $\exp[-i(p_1 - p_2 - k)x]$ с отличным от нуля показателем. На языке диаграмм это значит, что равны нулю диаграммы с тремя свободными концами



(73.19)

По этой же причине невозможны процессы второго порядка, в которых участвовали бы (в начальном и конечном состояниях) шесть частиц. В матричном элементе S_{fi} соответствующих переходов интеграл по $d^4x\, d^4x'$ распался бы на произведение двух обращающихся в нуль интегралов по d^4x и d^4x' от произведений трех волновых функций, взятых в одной и той же точке. Другими словами, соответствующие диаграммы распались бы на две независимые диаграммы вида (73.19).

§ 74. Диаграммы Фейнмана для рассеяния фотона

Рассмотрим другой эффект второго порядка — рассеяние фотона на электроне (*эффект Комптона*). Пусть в начальном состоянии фотон и электрон имеют 4-импульсы k_1 и p_1, а в конечном k_2 и p_2 (а также определенные поляризации, которые для краткости не указываем).

Фотонный матричный элемент

$$\langle 2|\mathrm{T}A_\mu(x)A_\nu(x')|1\rangle = \langle 0|c_2\mathrm{T}A_\mu(x)A_\nu(x')c_1^+|0\rangle, \tag{74.1}$$

где

$$\widehat{A} = \sum_{\mathbf{k}}(\widehat{c}_{\mathbf{k}}A_k + \widehat{c}_{\mathbf{k}}^+A_k^*).$$

Свертывая внешние и внутренние операторы, получаем

$$(74.1) = \underbrace{c_2A_\mu}\,\underbrace{A'_\nu c_1^+} + \overbrace{\underbrace{c_2\,A_\mu}A'_\nu c_1^+} = A^*_{2\mu}A'_{1\nu} + A_{1\mu}A'^*_{2\nu} \tag{74.2}$$

(при этом учтена коммутативность операторов $\widehat{c}_1$, $\widehat{c}_2^+$; по этой же причине знак T в данном случае может быть опущен). Электронный матричный элемент

$$\langle 2|\mathrm{T}j^\mu(x)j^\nu(x')|1\rangle = \langle 0|a_2\mathrm{T}(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)(\overline{\psi}'\gamma^\nu\psi')a_1^+|0\rangle. \tag{74.3}$$

В нем фигурируют четыре ψ-оператора. Только два из них будут заняты уничтожением электрона 1 и рождением электрона 2, т. е. будут свернуты с операторами $\widehat{a}_1^+$ и $\widehat{a}_2$. Это могут быть операторы $\widehat{\overline{\psi}}'$, $\widehat{\psi}$ или $\widehat{\psi}'$, $\widehat{\overline{\psi}}$ (но не $\widehat{\psi}$, $\widehat{\overline{\psi}}$ или $\widehat{\psi}'$, $\widehat{\overline{\psi}}'$; рождение и уничтожение в одной и той же точке x или x' двух реальных электронов вместе с одним реальным фотоном приводит к равному нулю выражению). Произведя свертывание двумя способами, получим в матричном элементе (74.3) два члена; выпишем их сначала в предположении $t > t'$:

$$(74.3) = \underbrace{a_2(\overline{\psi}}\gamma^\mu\psi)(\overline{\psi}'\gamma^\nu \underbrace{\psi')a_1^+} + \underbrace{a_2(\overline{\psi}\gamma^\mu \overbrace{\psi)(\overline{\psi}'}}\gamma^\nu\psi')a_1^{+}}\,. \tag{74.4}$$

В первом члене свертываются операторы

$$\widehat{a}_2\widehat{\overline{\psi}} \to \widehat{a}_2\widehat{a}_2^+\overline{\psi}_2, \quad \widehat{\psi}'\widehat{a}_1^+ \to \widehat{a}_1\widehat{a}_1^+\psi_1'.$$

Поскольку операторы $\widehat{a}_2\widehat{a}_2^+$ и $\widehat{a}_1\widehat{a}_1^+$ диагональны и стоят на краях произведения, они заменяются их средним по вакууму значением, т. е. единицей. Для аналогичного преобразования второго члена в (74.4) надо сперва «протащить» оператор $\widehat{a}_2^+$ налево, а $\widehat{a}_1$ направо. Это осуществляется с помощью правил коммутации операторов $\widehat{a}_\mathbf{p}$, $\widehat{a}_\mathbf{p}^+$, в силу которых

$$\begin{gathered} \{\widehat{a}_\mathbf{p}, \widehat{\psi}\}_+ = \{\widehat{a}_\mathbf{p}^+, \widehat{\overline{\psi}}\}_+ = 0, \\ \{\widehat{a}_\mathbf{p}, \widehat{\overline{\psi}}\}_+ = \overline{\psi}_p, \quad \{\widehat{a}_\mathbf{p}^+, \widehat{\psi}\}_+ = \psi_p. \end{gathered} \tag{74.5}$$

В результате выражение (74.4) преобразуется к виду

$$\langle 0|(\overline{\psi}_2\gamma^\mu\widehat{\psi})(\widehat{\overline{\psi}}'\gamma^\nu\psi_1') - (\widehat{\overline{\psi}}\gamma^\mu\psi_1)(\overline{\psi}_2'\gamma^\nu\widehat{\psi}')|0\rangle, \quad t > t' \tag{74.6}$$

(разумеется, усреднению подвергаются лишь операторные множители). Аналогичным образом при $t < t'$ получим выражение, отличающееся перестановкой штриха и индексов μ, ν:

$$\langle 0| - (\widehat{\overline{\psi}}'\gamma^\nu\psi_1')(\overline{\psi}_2\gamma^\mu\widehat{\psi}) + (\overline{\psi}_2'\gamma^\nu\widehat{\psi}')(\widehat{\overline{\psi}}\gamma^\mu\psi')|0\rangle, \quad t < t'. \tag{74.7}$$

Оба выражения можно записать в едином виде, введя хронологическое произведение ψ-операторов согласно определению

$$\mathrm{T}\widehat{\psi}_i(x)\widehat{\overline{\psi}}_k(x') = \begin{cases} \widehat{\psi}_i(x)\widehat{\overline{\psi}}_k(x'), & t' < t, \\ -\widehat{\overline{\psi}}_k(x')\widehat{\psi}_i(x), & t' > t \end{cases} \tag{74.8}$$

(i, k — биспинорные индексы). Тогда первые и вторые члены в (74.6), (74.7) можно записать единым образом:

$$\overline{\psi}_2\gamma^\mu\langle 0|\mathrm{T}\psi\cdot\overline{\psi}'|0\rangle\gamma^\nu\psi_1' + \overline{\psi_2'}\gamma^\nu\langle 0|\mathrm{T}\psi'\cdot\overline{\psi}|0\rangle\gamma^\mu\psi_1 \tag{74.9}$$

($\psi\cdot\overline{\psi}$ обозначает матрицу $\psi_i\overline{\psi}_k$).

Обратим внимание на то, что в естественно возникшем определении (74.8) произведения операторов при $t < t'$ и $t > t'$ берутся с различными знаками. Этим оно отличается от определения T-произведения, которым мы пользовались для операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{j}$. Происхождение этого различия связано с тем, что фермионные операторы $\widehat{\psi}$, $\widehat{\overline{\psi}}$ антикоммутируют вне светового конуса (в отличие от коммутирующих бозонных операторов $\widehat{A}$, а также билинейных операторов $\widehat{j} = \widehat{\overline{\psi}}\gamma\widehat{\psi}$) [1]. Тем самым обеспечивается релятивистская инвариантность определения (74.8) (формальное доказательство правил коммутации ψ-операторов будет дано в § 75) [2].

Введем *электронную функцию распространения* (или *электронный пропагатор*) — биспинор второго ранга $G_{ik}(x-x')$ — согласно определению

$$G_{ik}(x - x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i(x)\overline{\psi}_k(x')|0\rangle. \qquad (74.10)$$

Тогда электронный матричный элемент запишется в виде

$$\langle 2|Tj^\mu(x)j^\nu(x')|1\rangle = i\overline{\psi}_2\gamma^\mu G\gamma^\nu\psi_1' + i\overline{\psi}_2'\gamma^\nu G\gamma^\mu\psi_1. \qquad (74.11)$$

После умножения на фотонный матричный элемент (74.1) и интегрирования по $d^4x\,d^4x'$ оба члена в (74.11) дают одинаковый результат, так что получается

$$S_{fi} = -ie^2 \iint d^4x\, d^4x'\overline{\psi}_2(x)\gamma^\mu G(x-x')\gamma^\nu\psi_1(x') \times \\ \times \left\{A^*_{2\mu}(x)A_{1\nu}(x') + A^*_{2\nu}(x')A_{1\mu}(x)\right\}. \qquad (74.12)$$

Подставив для электронных и фотонных волновых функций плоские волны (64.8), (64.9) и выделив δ-функцию, как это было сделано для (73.10), получим окончательно амплитуду рассеяния

$$M_{fi} = -4\pi e^2\overline{u}_2\left\{(\gamma e_2^*)G(p_1+k_1)(\gamma e_1) + (\gamma e_1)G(p_1-k_2)(\gamma e_2^*)\right\}u_1, \qquad (74.13)$$

---

[1]) Напомним, что сами по себе ψ-операторы не отвечают каким-либо измеримым физическим величинам и потому не обязаны быть коммутативными вне светового конуса.

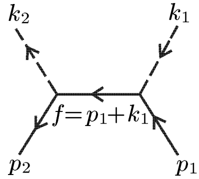
[2]) Аналогично можно определить T-произведение любого числа ψ-операторов. Оно равно произведению всех этих операторов, расположенных справа налево в порядке возрастания времени, причем знак определяется четностью перестановки, которую нужно произвести, чтобы получить этот порядок из порядка, указанного под знаком T-произведения. Соответственно этому определению знак T-произведения меняется при перестановке любых двух ψ-операторов, например:

$$\mathrm{T}\widehat{\psi}_i(x)\widehat{\overline{\psi}}_k(x') = -\mathrm{T}\widehat{\overline{\psi}}_k(x')\widehat{\psi}_i(x).$$

где e_1, e_2 — 4-векторы поляризации фотонов, $G(p)$ — электронный пропагатор в импульсном представлении.

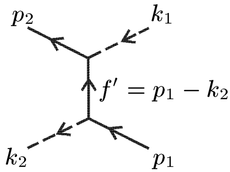
Два члена в этом выражении представляются следующими диаграммами Фейнмана:

$$4\pi e^2 \overline{u}_2(\gamma e_2^*)G(f)(\gamma e_1)u_1 =$$



(74.14)

$$4\pi e^2 \overline{u}_2(\gamma e_1)G(f')(\gamma e_2^*)u_1 =$$



Штриховые свободные концы диаграмм отвечают реальным фотонам; входящим линиям (начальный фотон) сопоставляется множитель $\sqrt{4\pi}e$, а выходящим линиям (конечный фотон) — множитель $\sqrt{4\pi}e^*$, где e — 4-вектор поляризации. В первой диаграмме начальный фотон поглощается вместе с начальным электроном, а конечный испускается вместе с конечным электроном. Во второй диаграмме испускание конечного фотона происходит вместе с уничтожением начального электрона, а поглощение начального фотона — с рождением конечного электрона.

Внутренняя сплошная линия (соединяющая обе вершины) отвечает виртуальному электрону, 4-импульс которого определяется сохранением 4-импульса в вершинах. Этой линии сопоставляется множитель $iG(f)$. В отличие от 4-импульса реальной частицы квадрат 4-импульса виртуального электрона не равен m^2. Рассматривая инвариант f^2, например, в системе покоя электрона, легко найти, что

$$f^2 = (p_1 + k_1)^2 > m^2, \quad f'^2 = (p_1 - k_2)^2 < m^2. \tag{74.15}$$

§ 75. Электронный пропагатор

Введенное в предыдущих параграфах понятие о функциях распространения (пропагаторах) играет основную роль в аппарате квантовой электродинамики. Фотонный пропагатор $D_{\mu\nu}$ становится основной величиной, характеризующей взаимодействие двух электронов. Эта его роль наглядно проявляется в положении, занимаемом им в амплитуде рассеяния электронов, куда $D_{\mu\nu}$ входит умноженный на токи переходов двух частиц. Анало-

гичную роль играет электронный пропагатор во взаимодействии электрона и фотона.

Займемся теперь фактическим вычислением пропагаторов, начав с электронного случая.

Подействуем на функцию

$$G_{ik}(x-x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i(x)\overline{\psi}_k(x')|0\rangle \qquad (75.1)$$

(i, k — биспинорные индексы) оператором $\gamma\widehat{p}-m$, где $\widehat{p}_\mu = i\partial_\mu$. Поскольку оператор $\widehat{\psi}(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака $(\gamma\widehat{p}-$ $-m)\widehat{\psi}(x)=0$, мы получим нуль во всех точках x, за исключением лишь тех, в которых $t=t'$. Дело в том, что $G(x-x')$ стремится к различным пределам при $t\to t'+0$ и $t\to t'-0$: согласно определению (74.8) эти пределы равны соответственно

$$-i\langle 0|\psi_i(\mathbf{r},t)\overline{\psi}_k(\mathbf{r}',t)|0\rangle \quad \text{и} \quad +i\langle 0|\overline{\psi}_k(\mathbf{r}',t)\psi_i(\mathbf{r},t)|0\rangle$$

и, как мы увидим, на световом конусе не совпадают. Это приводит к появлению в производной $\partial G/\partial t$ дополнительного члена с δ-функцией:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -i\langle 0|\mathrm{T}\frac{\partial\psi_i(x)}{\partial t}\overline{\psi}_k(x')|0\rangle + \delta(t-t')(G|_{t\to t'+0} - G|_{t\to t'-0}). \qquad (75.2)$$

Замечая, что в оператор $\gamma\widehat{p}-m$ производная по t входит в виде $i\gamma^0\partial/\partial t$, имеем поэтому

$$(\gamma\widehat{p}-m)_{ik}G_{kl}(x-x') = \delta(t-t')\gamma^0_{ik}\langle 0|\{\psi_k(\mathbf{r},t),\overline{\psi}_l(\mathbf{r}',t)\}_+|0\rangle. \qquad (75.3)$$

Вычислим стоящий здесь антикоммутатор. Перемножив операторы $\widehat{\psi}(\mathbf{r},t)$ и $\widehat{\overline{\psi}}(\mathbf{r}',t)$ (см. (73.6)) и учтя перестановочные правила для фермионных операторов $\widehat{a}_\mathbf{p}$, $\widehat{b}_\mathbf{p}$, найдем

$$\{\widehat{\psi}_i(\mathbf{r},t),\widehat{\overline{\psi}}_k(\mathbf{r}',t)\}_+ = \sum_\mathbf{p}[\psi_{pi}(\mathbf{r})\overline{\psi}_{pk}(\mathbf{r}') + \psi_{-pi}(\mathbf{r})\overline{\psi}_{-pk}(\mathbf{r}')], \qquad (75.4)$$

где $\psi_{\pm p}(\mathbf{r})$ — волновые функции без временного множителя (как и в § 73, 74, для краткости не выписываем у них поляризационные индексы). Но совокупность всех функций $\psi_{\pm p}(\mathbf{r})$ — собственных функций гамильтониана электрона — составляет полную систему нормированных функций, и согласно общим свойствам таких систем (ср. III, (5.12)):

$$\sum_\mathbf{p}[\psi_{pi}(\mathbf{r})\psi^*_{pk}(\mathbf{r}') + \psi_{-pi}(\mathbf{r})\psi^*_{-pk}(\mathbf{r}')] = \delta_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \qquad (75.5)$$

Сумма же в правой стороне равенства (75.4) отличается от написанной заменой ψ_k^* на $(\psi^*\gamma^0)_k$ и равна $\gamma^0_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Таким образом,

$$\{\widehat{\psi}_i(\mathbf{r},t), \widehat{\overline{\psi}}_k(\mathbf{r}',t)\}_+ = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\gamma^0_{ik}. \tag{75.6}$$

Отметим, что из этой формулы следует, в частности, упомянутое уже в § 74 утверждение об антикоммутативности операторов $\widehat{\psi}$ и $\widehat{\overline{\psi}}$ вне светового конуса. При $(x-x')^2 < 0$ всегда существует такая система отсчета, в которой $t = t'$; если при этом $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, то антикоммутатор (75.6) действительно равен нулю.

Подставив (75.6) в (75.3) (и опустив биспинорные индексы), найдем окончательно [1])

$$(\gamma\widehat{p} - m)G(x-x') = \delta^{(4)}(x-x'). \tag{75.7}$$

Таким образом, электронный пропагатор удовлетворяет уравнению Дирака с δ-функцией в правой части. Другими словами, это есть *функция Грина* для уравнения Дирака.

Нам придется в дальнейшем иметь дело не с самой функцией $G(\xi)(\xi = x - x')$, а с ее компонентами Фурье

$$G(p) = \int G(\xi)e^{ip\xi}d^4\xi \tag{75.8}$$

(пропагатором в импульсном представлении). Взяв компоненту Фурье от обеих сторон (75.7), найдем, что $G(p)$ удовлетворяет системе алгебраических уравнений

$$(\gamma p - m)G(p) = 1. \tag{75.9}$$

Решение этой системы:

$$G(p) = \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2}. \tag{75.10}$$

Четыре компоненты 4-вектора p в $G(p)$ являются независимыми переменными (не связанными соотношением $p^2 \equiv p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$). Написав знаменатель в (75.10) в виде $p_0^2 - (\mathbf{p}^2 + m^2)$, мы увидим, что $G(p)$ как функция от p_0 при заданном $\mathbf{p}^2$ имеет два полюса: при $p_0 = \pm\varepsilon$, где $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. При интегрировании по dp_0 в интеграле

$$G(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip\xi}G(p)d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3p\cdot e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}\int dp_0\cdot e^{-ip_0\tau}G(p) \tag{75.11}$$

---

[1]) В явной записи с биспинорными индексами

$$(\gamma\widehat{p} - m)_{il}G_{lk}(x-x') = \delta^{(4)}(x-x')\delta_{ik}. \tag{75.7a}$$

($\tau = t - t'$) возникает поэтому вопрос о способе обхода полюсов; без указания этого способа выражение (75.10) еще по существу неопределенно.

Для выяснения этого вопроса вернемся к исходному определению (75.1). Подставим в него ψ-операторы в виде сумм (73.6), заметив при этом, что отличны от нуля средние по вакууму лишь от следующих произведений операторов рождения и уничтожения:

$$\langle 0|a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^{+}|0\rangle = 1, \quad \langle 0|b_{\mathbf{p}}b_{\mathbf{p}}^{+}|0\rangle = 1.$$

(Поскольку в состоянии вакуума никаких частиц нет, то, прежде чем «уничтожить» частицу оператором $\widehat{a}_{\mathbf{p}}$ или $\widehat{b}_{\mathbf{p}}$, надо «родить» ее оператором $\widehat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$ или $\widehat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$.) Получим

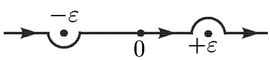
$$G_{ik}(x - x') = -i\sum_{\mathbf{p}} \psi_{pi}(\mathbf{r}, t)\overline{\psi}_{pk}(\mathbf{r}', t) =$$
$$= -i\sum_{\mathbf{p}} e^{-i\varepsilon(t-t')}\psi_{pi}(\mathbf{r})\overline{\psi}_{pk}(\mathbf{r}'), \quad t - t' > 0; \quad (75.12)$$
$$G_{ik}(x - x') = i\sum_{\mathbf{p}} \overline{\psi}_{-pk}(\mathbf{r}', t')\psi_{-pi}(\mathbf{r}, t) =$$
$$= i\sum_{\mathbf{p}} e^{i\varepsilon(t-t')}\psi_{-pi}(\mathbf{r})\overline{\psi}_{-pk}(\mathbf{r}'), \quad t - t' < 0$$

(при $t > t'$ вклад в G дают только электронные, а при $t < t'$ — только позитронные члены).

Представив себе суммирование по $\mathbf{p}$ замененным интегрированием по d^3p и сравнив (75.12) с (75.11), мы увидим, что интеграл

$$\int e^{-ip_0\tau}G(p)dp_0 \quad (75.13)$$

должен иметь фазовый множитель $e^{-i\varepsilon\tau}$ при $\tau > 0$ и $e^{i\varepsilon\tau}$ при $\tau < 0$. Мы удовлетворим этому, если условимся обходить полюсы $p_0 = \varepsilon$ и $p_0 = -\varepsilon$ соответственно сверху и снизу (в плоскости комплексного переменного p_0):



(75.14)

Действительно, при $\tau > 0$ замыкаем путь интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в нижней полуплоскости, так что значение интеграла (75.13) будет даваться вычетом в полюсе $p_0 = +\varepsilon$; при $\tau < 0$ замыкаем контур в верхней полуплоскости, и интеграл определится вычетом в полюсе $p_0 = -\varepsilon$. В обоих случаях получится требуемый результат.

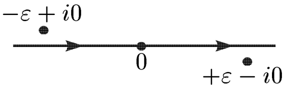
Это правило обхода (*правило Фейнмана*) можно сформулировать иначе: интегрирование производится везде вдоль самóй вещественной оси, но массе частицы m приписывается бесконечно малая отрицательная мнимая часть:

$$m \to m - i0. \tag{75.15}$$

Действительно, имеем тогда

$$\varepsilon \to \sqrt{\mathbf{p}^2 + (m - i0)^2} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 - i0} = \varepsilon - i0.$$

Другими словами, полюсы $p_0 = \pm\varepsilon$ смещаются вниз и вверх от вещественной оси:



(75.16)

так что интегрирование вдоль этой оси становится эквивалентным интегрированию вдоль пути (75.14) [1]. С учетом правила (75.15) пропагатор (75.10) можно написать в виде

$$G(p) = \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i0}. \tag{75.17}$$

Правило интегрирования при сдвиге полюса демонстрируется следующим соотношением:

$$\frac{1}{x + i0} = \mathrm{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x). \tag{75.18}$$

Его надо понимать в том смысле, что при умножении на какую-либо функцию $f(x)$ и интегрировании имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x + i0}dx = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}dx - i\pi f(0), \tag{75.19}$$

где перечеркнутый знак интеграла, или символ P, означает главное значение.

Функция Грина (75.10) представляет собой произведение биспинорного множителя $\gamma p + m$ и скаляра:

$$G^{(0)}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}. \tag{75.20}$$

Соответствующая координатная функция $G^{(0)}(\xi)$ является, очевидно, решением уравнения

$$(\widehat{p}^2 - m^2)G^{(0)}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x'), \tag{75.21}$$

[1]) Полезно заметить, что правило сдвига полюсов соответствует тому, что $G(x - x')$ приобретает бесконечно малое затухание по $|\tau|$, где $\tau = t - t'$. Действительно, если записать значение p_0 в смещенных полюсах как $-(\varepsilon - i\delta)$ и $+(\varepsilon - i\delta)$ (где $\delta \to +0$), то временной множитель в интеграле (75.13) будет равен $\exp(-i\varepsilon|\tau| - \delta|\tau|)$.

т. е. функцией Грина уравнения $(\hat{p}^2 - m^2)\psi = 0$. В этом смысле можно сказать, что $G^{(0)}(x - x')$ есть пропагатор скалярных частиц. Легко убедиться вычислением (подобным произведенному выше), что функция распространения скалярного поля выражается через ψ-операторы (11.2) формулой

$$G^{(0)}(x - x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi(x)\psi^+(x')|0\rangle. \tag{75.22}$$

аналогичной определению (75.1). При этом хронологическое произведение определяется (как для всяких бозонных операторов) следующим образом:

$$\mathrm{T}\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^+(x') = \begin{cases} \hat{\psi}(x)\hat{\psi}^+(x'), & t > t' \\ \hat{\psi}^+(x')\hat{\psi}(x), & t < t'. \end{cases} \tag{75.23}$$

(с одинаковыми знаками при $t > t'$ и $t < t'$).

§ 76. Фотонный пропагатор

До сих пор нам приходилось (в § 43, 74) использовать явный вид операторов электромагнитного поля $\hat{A}$ при нахождении матричных элементов лишь по отношению к изменению числа реальных фотонов. Для этой цели было достаточным написанное в § 2 представление потенциалов свободного поля в виде разложения по поперечным плоским волнам.

Такое представление, однако, не дает само по себе полного описания произвольного поля. Это ясно уже из того, что диаграммы рассеяния (73.13), (73.14) должны учитывать и кулоново взаимодействие электронов. Последнее описывается скалярным потенциалом Φ и заведомо не может быть сведено к обмену лишь поперечными виртуальными фотонами (описываемыми векторным потенциалом, подчиненным условию $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$) [1]).

Таким образом, мы по существу не имеем еще полного определения операторов $\hat{A}$, без чего невозможно прямое вычисление фотонного пропагатора согласно формуле

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0|\mathrm{T}A_\mu(x)A_\nu(x')|0\rangle. \tag{76.1}$$

С другой стороны, калибровочная неоднозначность потенциалов в значительной степени лишает физического смысла те операто-

---

[1]) При условии $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ уравнения Максвелла приводят к следующим уравнениям для $\mathbf{A}$ и Φ:

$$\Box\mathbf{A} = -4\pi\mathbf{j} + \nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad \Delta\Phi = -4\pi\rho.$$

В этой калибровке Φ удовлетворяет статическому уравнению Пуассона (ср. с формулой (76.13) для D_{00} в этой же калибровке).

ры, которые пришлось бы вводить для исчерпывающего квантования электромагнитного поля.

Эти затруднения, однако, имеют лишь формальный, а не физический характер, и их можно обойти, использовав некоторые общие свойства пропагатора, очевидные из требований релятивистской и калибровочной инвариантности.

Наиболее общий вид 4-тензора второго ранга, зависящего только от 4-вектора $\xi = x - x'$, есть

$$D_{\mu\nu}(\xi) = g_{\mu\nu}D(\xi^2) - \partial_\mu\partial_\nu D^{(l)}(\xi^2), \tag{76.2}$$

где D, $D^{(l)}$ — скалярные функции инварианта ξ^2 [1]). Отметим, что тензор автоматически оказывается симметричным.

Соответственно в импульсном представлении будем иметь

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2)g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu D^{(l)}(k^2), \tag{76.3}$$

где $D(k^2)$, $D^{(l)}(k^2)$ — компоненты Фурье функций $D(\xi^2)$, $D^{(l)}(\xi^2)$.

В физические величины — амплитуды рассеяния — фотонная функция распространения входит умноженной на токи переходов двух электронов, т. е. в комбинациях вида $j^\mu_{21}D_{\mu\nu}j^\nu_{43}$ (см., например, (73.13)). Но в силу сохранения тока ($\partial_\mu j^\mu = 0$) его матричные элементы $j_{21} = \overline{\psi}_2\gamma\psi_1$ удовлетворяют условию 4-поперечности

$$k_\mu(j^\mu)_{21} = 0, \tag{76.4}$$

где $k = p_2 - p_1$ (ср. (43.13)). Ясно поэтому, что никакие физические результаты не изменятся при замене

$$D_{\mu\nu} \to D_{\mu\nu} + \chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu, \tag{76.5}$$

где χ_μ — любые функции $\mathbf{k}$ и k_0. Этот произвол в выборе $D_{\mu\nu}$ соответствует произволу в калибровке потенциалов поля.

Произвольное калибровочное преобразование (76.5) может нарушить релятивистски инвариантный вид $D_{\mu\nu}$, предположенный в (76.3) (если величины χ_μ не составляют 4-вектора). Но и оставаясь в рамках релятивистски инвариантных форм пропагатора, мы видим, что выбор функции $D^{(l)}(k^2)$ в (76.3) вполне произволен; он не отразится на физических результатах и может устанавливаться из соображений удобства (*Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников*, 1954).

Нахождение функции распространения сводится, таким образом, к определению всего одной калибровочно-инвариантной

[1]) Эти функции различны в трех областях значений аргумента, не переходящих друг в друга при преобразованиях Лоренца: вне светового конуса ($\xi^2 < 0$), в верхней ($\xi^2 > 0$, $\xi_0 > 0$) и в нижней ($\xi^2 > 0$, $\xi_0 < 0$) полостях светового конуса.

функции $D(k^2)$. Если рассмотреть заданное значение k^2 и выбрать ось z вдоль направления $\mathbf{k}$, то преобразования (76.5) не будут затрагивать компоненты $D_{xx} = D_{yy} = -D(k^2)$. Достаточно поэтому вычислить всего одну компоненту D_{xx}, пользуясь при этом любой калибровкой потенциалов.

Воспользуемся калибровкой, в которой $\operatorname{div}\widehat{\mathbf{A}} = 0$ и оператор $\widehat{\mathbf{A}}$ дается разложением (2.17), (2.18):

$$\widehat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} (\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{e}^{(\alpha)} e^{-ikx} + \widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{e}^{(\alpha)*} e^{ikx}), \quad \omega = |\mathbf{k}| \tag{76.6}$$

(индекс $\alpha = 1,\ 2$ нумерует поляризации). Из всех средних по вакууму значений произведений операторов $\widehat{c}$, $\widehat{c}^{+}$ отличны от нуля лишь

$$\langle 0|c_{\mathbf{k}\alpha} c^{+}_{\mathbf{k}\alpha}|0\rangle = 1.$$

По определению (76.1) получим поэтому

$$D_{ik}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{2\pi i d^3k}{\omega} \left(\sum_{\alpha} e_i^{(\alpha)} e_k^{(\alpha)*} \right) e^{-i\omega|\tau| + i\mathbf{k}\xi} \tag{76.7}$$

(i, k — трехмерные векторные индексы; от суммирования по $\mathbf{k}$ мы перешли к интегрированию по $d^3k/(2\pi)^3$). Тот факт, что в показателе экспоненты стоит абсолютное значение разности $\tau = t - t'$, есть следствие хронологизации произведения операторов в (76.1).

Из (76.7) видно, что подынтегральное выражение без множителя $e^{i\mathbf{k}\xi}$ есть компонента трехмерного разложения Фурье функции $D_{ik}(\mathbf{r}, t)$. Для $D_{xx} = -D$ она равна

$$\frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|} \sum_{\alpha} |e_x^{(\alpha)}|^2 = \frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|}.$$

Для нахождения $D_{xx}(k^2)$ осталось разложить эту функцию в интеграл Фурье по времени. Это разложение дается формулой

$$\frac{2\pi i}{\omega} e^{-i\omega|\tau|} = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i0} e^{-ik_0\tau} dk_0.$$

Как было объяснено в предыдущем параграфе, такое интегрирование подразумевает обход полюсов $k_0 = \pm|\mathbf{k}| = \pm\omega$ соответственно снизу и сверху; при $\tau > 0$ интеграл определяется вычетом в полюсе $k_0 = +\omega$, а при $\tau < 0$ — вычетом в полюсе $k_0 = -\omega$.

Таким образом, находим окончательно

$$D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0}. \tag{76.8}$$

Появление $+i0$ в знаменателе, к которому в изложенном выводе мы пришли автоматически, совпадает с правилом (75.15): из (равной нулю) массы фотона вычитается $i0$. Из (76.8) видно, что соответствующая координатная функция $D(\xi^2)$ удовлетворяет уравнению

$$-\partial_\mu \partial^\mu D(x-x') = 4\pi\delta^{(4)}(x-x'), \tag{76.9}$$

т. е. является функцией Грина волнового уравнения.

Мы будем обычно полагать $D^{(l)} = 0$, т. е. пользоваться функцией распространения в виде

$$D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0} g_{\mu\nu} \tag{76.10}$$

(*калибровка Фейнмана*).

Укажем также другие способы калибровки, которые могут представить определенные преимущества в некоторых применениях.

Положив $D^{(l)} = -D/k^2$, получим пропагатор в виде

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{76.11}$$

(*калибровка Ландау*). При этом $D_{\mu\nu}k^\nu = 0$. Такой выбор аналогичен лоренцевой калибровке потенциалов ($A_\mu k^\mu = 0$).

Калибровке потенциалов трехмерным условием $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ аналогична калибровка пропагатора условиями

$$D_{il}k^l = 0, \quad D_{0l}k^l = 0.$$

Вместе с равенством $D_{xx} = -D = -4\pi/k^2$ эти условия дают

$$D_{il} = \frac{4\pi}{\omega^2 - \mathbf{k}^2}\left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\mathbf{k}^2}\right). \tag{76.12}$$

Для того чтобы получить такое D_{il}, надо произвести над пропагатором (76.10) преобразование (76.5), положив

$$\chi_0 = -\frac{4\pi\omega}{2(\omega^2 - \mathbf{k}^2)\mathbf{k}^2}, \quad \chi_i = \frac{4\pi k_i}{2(\omega^2 - \mathbf{k}^2)\mathbf{k}^2}.$$

При этом для остальных компонент $D_{\mu\nu}$ получается

$$D_{00} = -4\pi/\mathbf{k}^2, \quad D_{0i} = 0. \tag{76.13}$$

Такую калибровку называют кулоновой (*E. Salpeter*, 1952); отметим, что D_{00} здесь — компонента Фурье кулонова потенциала.

Наконец, калибровке потенциалов условием $\Phi = 0$ аналогична калибровка пропагатора, в которой

$$D_{il} = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \mathbf{k}^2}\left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\omega^2}\right), \quad D_{0i} = D_{00} = 0. \tag{76.14}$$

Эта форма оказывается удобной для применения в нерелятивистских задачах (*И. Е. Дзялошинский*, *Л. П. Питаевский*, 1959).

Все выписанные выражения относятся к импульсному представлению пропагатора. В некоторых случаях удобно пользоваться смешанным частотно-координатным представлением, т. е. функцией

$$D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{r}) = \int D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{76.15}$$

В фейнмановской калибровке (76.10)

$$D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{r}) = g_{\mu\nu} D(\omega, \mathbf{r}),$$

где

$$D(\omega, \mathbf{r}) = 4\pi \int \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 + i0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\frac{i}{\pi r} \int\limits_0^\infty \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{\omega^2 - k^2 + i0} k dk,$$

или, после замены $k \to -k$ во втором слагаемом подынтегрального выражения:

$$D(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{i}{\pi r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr} k dk}{\omega^2 - k^2 + i0}.$$

Последнее интегрирование производится путем замыкания контура интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в верхней полуплоскости комплексной переменной k и сводится к взятию вычета в полюсе $k = |\omega| + i0$. Окончательно получим

$$D(\omega, \mathbf{r}) = -e^{i|\omega|r}/r. \tag{76.16}$$

В связи с этим выражением сделаем следующее замечание. Описываемый диаграммами (73.13), (73.14) процесс можно рассматривать наглядно как рассеяние электрона 2 в поле, создаваемом электроном 1 (или наоборот). Функция (76.16) соответствует обычному «запаздывающему» потенциалу $\propto e^{i\omega r}$ (см. II, (64.1), (64.2)) только при $\omega > 0$. Знак ω, однако, зависит от условного выбора направления стрелки k на диаграмме. Отмеченное свойство функции $D(\omega, \mathbf{r})$ означает, что в квантовой электродинамике следует считать источником поля ту из частиц, которая отдает энергию, т. е. испускает виртуальный фотон.

В заключение остановимся на вопросе о пропагаторе частиц со спином 1, но с отличной от нуля массой. В этом случае калибровочный произвол отсутствует и выбор пропагатора однозначен.

Подставив ψ-операторы (14.16) в определение

$$G_{\mu\nu} = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_\mu(x)\psi_\nu^+(x')|0\rangle, \tag{76.17}$$

получим выражение, отличающееся от (76.7) лишь заменой стоящей в подынтегральном выражении суммы по поляризациям на

$$\sum_{\alpha} u_{\mu}^{(\alpha)} u_{\nu}^{(\alpha)*}.$$

Суммирование по поляризациям эквивалентно усреднению с последующим умножением на 3 — число независимых поляризаций. Усреднение дает матрицу плотности неполяризованных частиц (14.15). Таким образом, в результате найдем следующее выражение для пропагатора векторных частиц:

$$G_{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{p^2 - m^2 + i0}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right). \tag{76.18}$$

Обратим внимание на аналогичную структуру пропагаторов (75.17) и (76.18): в знаменателе стоит разность $p^2 - m^2$, а числитель есть, с точностью до множителя, матрица плотности неполяризованных частиц с данным спином.

§ 77. Общие правила диаграммной техники

Произведенное в § 73, 74 для некоторых простых случаев вычисление элементов матрицы рассеяния содержит в себе все принципиальные моменты общего метода. Не представляет особого труда установить путем соответствующих обобщений правила вычисления матричных элементов в любом порядке теории возмущений.

Как уже указывалось, матричный элемент оператора рассеяния $\widehat{S}$ для перехода между любыми начальными и конечными состояниями совпадает со средним по вакууму от оператора, получающегося умножением $\widehat{S}$ справа на операторы рождения всех начальных частиц и слева — на операторы уничтожения всех конечных частиц.

В результате такого приведения элемент S-матрицы в n-м порядке теории возмущений принимает вид

$$\langle f|S^{(n)}|i\rangle = \frac{1}{n!}\langle 0|\ldots b_{2f} b_{1f}\ldots a_{1f}\ldots c_{1f} \times$$
$$\times \int d^4x_1\ldots d^4x_n \mathrm{T}\{(\overline{\psi}_1(-ie\gamma A_1)\psi_1)\ldots(\overline{\psi}_n(-ie\gamma A_n)\psi_n)\} \times$$
$$\times c_{1i}^{+}\ldots a_{1i}^{+}\ldots b_{1i}^{+}\ldots|0\rangle \tag{77.1}$$

(индексы $1i$, $2i$, … нумеруют начальные частицы (отдельно позитроны, электроны, фотоны), индексы $1f$, $2f$, … — конечные частицы; индексы 1, 2, … у операторов $\widehat{\psi}$ и $\widehat{A}$ означают: $\widehat{\psi}_1 = \widehat{\psi}(x_1)$, …). Входящие сюда операторы $\widehat{\psi}$, $\widehat{A}$ представляют

собой линейные комбинации операторов рождения и уничтожения соответствующих частиц в различных состояниях. Таким образом, получаем для матричных элементов выражения в виде средних по вакууму от произведений операторов рождения и уничтожения частиц и их линейных комбинаций. Вычисление таких средних осуществляется с помощью следующих утверждений, составляющих содержание *теоремы Вика* (*G. C. Wick*, 1950).

1. Среднее по вакууму от произведения любого числа бозонных операторов $\widehat{c}^+$, $\widehat{c}$ равно сумме произведений всех возможных попарных средних (сверток) этих операторов. При этом в каждой паре множители должны стоять в той же последовательности, что и в первоначальном произведении.

2. Для фермионных операторов $\widehat{a}^+$, $\widehat{a}$, $\widehat{b}^+$, $\widehat{b}$ (одних и тех же или различных частиц) правило меняется лишь в том, что каждый член входит в сумму со знаком плюс или минус в зависимости от четности или нечетности числа перестановок фермионных операторов, необходимых для того, чтобы поставить рядом все попарно усредняемые операторы.

Ясно, что среднее значение может быть отлично от нуля, лишь если наряду с каждым множителем $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ в произведении имеется также по множителю $\widehat{a}^+$, $\widehat{b}^+$, $\widehat{c}^+$. При этом свертывать следует только пары операторов $(\widehat{a}, \widehat{a}^+)$, ... , относящихся к одинаковым состояниям, причем лишь такие, в которых $\widehat{a}^+$, ... стоят справа от $\widehat{a}$, ... : частица сначала рождается, а затем уничтожается (средние же значения $\langle 0|a^+a|0\rangle = 0, \ldots$).

Если каждая пара $(\widehat{a}, \widehat{a}^+)$, ... входит в произведение всего по одному разу, то теорема Вика очевидна (среднее значение сводится при этом к одному произведению попарных средних). Она очевидна также и в случае, когда все операторы уничтожения стоят в произведении справа от операторов рождения (такое произведение называют *нормальным*); среднее значение при этом равно нулю. Отсюда легко путем полной индукции доказать теорему Вика для общего случая, когда одна и та же пара операторов входит в произведение несколько (k) раз.

Рассмотрим среднее значение $\langle 0|\ldots cc^+ \ldots|0\rangle$, в котором пара бозонных операторов входит k раз (для фермионных операторов дальнейшие рассуждения вполне аналогичны). Переставив множители $\widehat{c}$, $\widehat{c}^+$ в некоторой паре, получим на основании правил коммутации

$$\langle 0|\ldots cc^+ \ldots|0\rangle = \langle 0|\ldots c^+c \ldots|0\rangle + \langle 0|\ldots 1 \ldots|0\rangle. \qquad (77.2)$$

Среднее значение $\langle 0|\ldots 1 \ldots|0\rangle$ содержит $k-1$ пару, и для него теорема Вика предполагается справедливой. С другой стороны,

если раскрывать среднее значение $\langle 0|\,..\,cc^+\,..\,|0\rangle$ по теореме Вика, то оно будет отличаться от среднего значения $\langle 0|\,..\,c^+c\,..\,|0\rangle$ как раз членом

$$\langle 0|\,..\,1\,..\,|0\rangle\langle 0|cc^+|0\rangle = \langle 0|\,..\,1\,..\,|0\rangle$$

(при раскрытии $\langle 0|\,..\,c^+c\,..\,|0\rangle$ аналогичный член $\langle 0|\,..\,1\,..\,|0\rangle \times \times \langle 0|c^+c|0\rangle = 0$). Поэтому из (77.2) следует, что если теорема Вика справедлива для матричного элемента $\langle 0|\,..\,c^+c\,..\,|0\rangle$, то она остается справедливой и после перестановки $\widehat{c}$ и $\widehat{c}^+$. Поскольку для одного определенного (нормального) порядка множителей теорема Вика заведомо справедлива, то она тем самым верна в любом случае.

Будучи верна для произведений операторов $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, ... , теорема Вика верна и для любых произведений, содержащих наряду с самими $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, ... также их линейные комбинации $\widehat{\psi}$, $\widehat{\overline{\psi}}$, $\widehat{A}$. Применив эту теорему к матричному элементу (77.1), мы представим его в виде суммы членов, каждый из которых будет произведением некоторых попарных средних. Среди последних будут встречаться свертки операторов $\widehat{\psi}$, $\widehat{\overline{\psi}}$, $\widehat{A}$ с «внешними» операторами — операторами рождения начальных или уничтожения конечных частиц. Эти свертки выражаются через волновые функции начальных и конечных частиц согласно формулам:

$$\begin{gathered}\langle 0|Ac_{\mathbf{p}}^+|0\rangle = A_p, \quad \langle 0|c_{\mathbf{p}}A|0\rangle = A_p^*,\\ \langle 0|\psi a_{\mathbf{p}}^+|0\rangle = \psi_p, \quad \langle 0|a_{\mathbf{p}}\overline{\psi}|0\rangle = \psi_p^*,\\ \langle 0|b_{\mathbf{p}}\psi|0\rangle = \psi_{-p}, \quad \langle 0|\overline{\psi}b_{\mathbf{p}}^+|0\rangle = \overline{\psi}_{-p},\end{gathered} \tag{77.3}$$

где A_p, ψ_p — фотонные и электронные волновые функции с импульсами $\mathbf{p}$ (поляризационные индексы, как и в § 73, 74, для краткости не выписываем). Будут также встречаться свертки «внутренних» операторов, стоящих под знаком T-произведений. Поскольку при применении теоремы Вика последовательность множителей в каждой свертываемой паре сохраняется, в этих свертках сохранится хронологическая последовательность операторов, так что они заменяются соответствующими пропагаторами [1]).

[1]) По поводу последнего утверждения надо сделать следующее замечание. При доказательстве теоремы Вика мы использовали правила коммутации операторов $\widehat{c}$, $\widehat{c}^+$, которые имеют смысл лишь для реальных («поперечных») фотонов. «Внешние» операторы $\widehat{c}_i^+$, $\widehat{c}_f$ отвечают, разумеется, именно таким (начальным и конечным) фотонам. Операторы же $\widehat{A}$ (входящие под знаком T-произведения) описывают, как было указано в § 76, не только поперечные

Каждый из членов суммы, на которую разбивается матричный элемент в результате его раскрытия по теореме Вика, изображается определенной диаграммой Фейнмана. В диаграмме n-го приближения содержится n вершин, каждой из которых ставится в соответствие одна из переменных интегрирования — один из 4-векторов x_1, x_2, … В каждой вершине сходится три луча — два сплошных (электронных) и один штриховой (фотонный), которым соответствуют электронные ($\widehat{\psi}$ и $\widehat{\overline{\psi}}$) и фотонный ($\widehat{A}$) операторы как функции одной и той же переменной x. При этом оператору $\widehat{\psi}$ соответствует приходящая в вершину, а $\widehat{\overline{\psi}}$ — выходящая из нее линия.

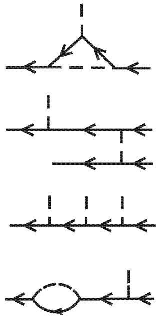
Для иллюстрации приведем несколько примеров соответствия между членами матричного элемента третьего приближения и диаграммами. Опустив знак интеграла, знаки операторов и знак T, а также множители $-ie\gamma$ и не выписав аргументов у операторов, напишем эти члены символически в виде

$$\text{а}\quad (\overline{\psi}A\psi)(\overline{\psi}A\psi)(\overline{\psi}A\psi) =$$

$$\text{б}\quad (\overline{\psi}A\psi)(\overline{\psi}A\psi)(\overline{\psi}A\psi) =$$

$$\text{в}\quad (\overline{\psi}A\psi)(\overline{\psi}A\psi)(\overline{\psi}A\psi) =$$

$$\text{г}\quad (\overline{\psi}A\psi)(\overline{\psi}A\psi)(\overline{\psi}A\psi) =$$



(77.4)

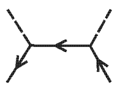
Для наглядности электронные и фотонные свертки изображены, как и на диаграмме, соответственно сплошными и штриховыми дугами. Направление стрелок на электронных свертках (от $\widehat{\overline{\psi}}$ к $\widehat{\psi}$) соответствует их направлению на диаграммах. Для внутренних фотонных сверток направление безразлично (что проявляется и в четности фотонного пропагатора как функции $x - x'$).

Среди получаемых таким образом членов есть эквивалентные, различающиеся лишь перестановкой номеров вершин — соответствием между вершинами и номерами переменных $x_1, x_2, \ldots$, т. е. попросту обозначением переменных интегрирования. Число таких перестановок равно $n!$. Оно сокращает множитель $1/n!$

фотоны. Ситуация здесь такая же, как и при вычислении $D_{\mu\nu}$ в § 76. В силу релятивистской и калибровочной инвариантности достаточно доказать теорему для тех произведений (т. е. компонент тензора $\langle 0|\mathrm{T}A_\mu A_\nu \ldots |0\rangle$), которые определяются поперечными частями потенциалов. Тем самым она будет доказана и для любых произведений.

в (77.1), после чего учитывать диаграммы с перестановкой вершин уже не надо. С этим обстоятельством мы уже сталкивались в § 73, 74. Так, эквивалентны две диаграммы второго приближения:

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\overline{\psi}A\psi)(\overline{\psi}A\psi) = \\
&(\overline{\psi}A\psi)(\overline{\psi}A\psi) =
\end{aligned}
\right\}
\qquad (77.5)
$$



В (77.4) и (77.5) изображены только внутренние свертки, которым соответствуют внутренние линии диаграмм (виртуальные электроны и фотоны). Оставшиеся свободными операторы свертываются с теми или иными внешними операторами, в результате чего устанавливается соответствие между свободными концами диаграмм и теми или иными начальными и конечными частицами. При этом $\widehat{\overline{\psi}}$ (свертываясь с операторами $\widehat{a}_f$ или $\widehat{b}_i^+$) дает линию конечного электрона или начального позитрона, а $\widehat{\psi}$ (свертываясь с $\widehat{a}_i^+$ или $\widehat{b}_f$) — начального электрона или конечного позитрона. Свободный оператор $\widehat{A}$ (свертываясь с $\widehat{c}_i^+$ или $\widehat{c}_f$) может соответствовать как начальному, так и конечному фотонам. Таким образом, получается по нескольку топологически одинаковых (т. е. состоящих из одинакового числа одинаково расположенных линий) диаграмм, отличающихся лишь перестановками начальных и конечных частиц по входящим и выходящим свободным концам.

Каждая такая перестановка эквивалентна, очевидно, определенной перестановке внешних операторов $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, ... в (77.1). Ясно поэтому, что если среди начальных или среди конечных частиц имеются тождественные фермионы, то относительные знаки диаграмм, различающихся нечетным числом перестановок свободных концов, должны быть противоположны.

Непрерывающаяся последовательность сплошных линий на диаграммах составляет электронную линию, вдоль которой стрелки сохраняют непрерывное направление. Такая линия может либо иметь два свободных конца, либо образовывать замкнутую петлю. Так, диаграмма

$$(\overline{\psi}A\psi)(\overline{\psi}A\psi) =$$



имеет петлю с двумя вершинами. Сохранение направления вдоль электронной линии является графическим выражением сохранения заряда: «входящий» в каждую вершину заряд равен «выходящему» из нее заряду.

Расположение биспинорных индексов вдоль непрерывной электронной линии соответствует записи матриц слева напра-

во при движении против стрелок. Биспинорные индексы разных электронных линий никогда не перепутываются. Вдоль незамкнутой линии последовательность индексов заканчивается у свободных концов на электронных (или позитронных) волновых функциях. На замкнутой же петле последовательность индексов тоже замыкается, т. е. петле соответствует след произведения расположенных вдоль нее матриц. Легко видеть, что этот след должен быть взят со знаком минус.

Действительно, петле с k вершинами отвечает совокупность k сверток

$$(\overline{\psi} A\,\psi)(\overline{\psi}\,A\,\psi)\ldots(\overline{\psi}\,A\psi)$$

(или другая эквивалентная, отличающаяся перестановкой вершин). В $(k-1)$-й свертке операторы $\widehat{\psi}$ и $\widehat{\overline{\psi}}$ уже стоят рядом в том порядке ($\widehat{\overline{\psi}}$ справа от $\widehat{\psi}$), в котором они должны стоять в электронном пропагаторе. Операторы же, стоящие по краям, приводятся в соседство с помощью четного числа перестановок с другими ψ-операторами и после этого оказываются расположенными в порядке $\widehat{\overline{\psi}}\widehat{\psi}$. Поскольку

$$\langle 0|\mathrm{T}\overline{\psi}'\psi|0\rangle = -\langle 0|\mathrm{T}\psi\overline{\psi}'|0\rangle$$

(ср. примеч. на с. 334), то замена этой свертки соответствующим пропагатором связана с изменением общего знака всего выражения.

Переход к импульсному представлению в общем случае производится вполне аналогично тому, как это было сделано в § 73, 74. Наряду с общим законом сохранения 4-импульса должны соблюдаться также «законы сохранения» в каждой вершине. Однако всех этих законов может оказаться недостаточно для однозначного определения импульсов всех внутренних линий диаграммы. В таких случаях по всем оставшимся неопределенными внутренним импульсам остаются интегрирования (по $d^4p/(2\pi)^4$), производящиеся по всему p-пространству (в том числе и по p_0 от $-\infty$ до $+\infty$).

В изложенных рассуждениях подразумевалось, что роль возмущения играет взаимодействие между самими частицами, «активно» участвующими в реакции (т. е. между частицами, состояние которых в результате процесса меняется). Аналогичным образом рассматривается также случай, когда в задаче фигурирует внешнее электромагнитное поле, т. е. поле, создаваемое «пассивными» частицами, состояние которых при данном процессе не меняется.

Пусть $A^{(e)}(x)$ — 4-потенциал внешнего поля. Он входит в лагранжиан взаимодействия вместе с фотонным оператором $\widehat{A}$ в

виде суммы $\widehat{A} + A^{(e)}$ (которая и перемножается с оператором тока $\widehat{j}$). Поскольку $A^{(e)}$ не содержит никаких операторов, он не может образовывать сверток с другими операторами. Иначе говоря, внешнему полю будут соответствовать в диаграммах Фейнмана лишь внешние линии.

Представим $A^{(e)}$ в виде интеграла Фурье:

$$A^{(e)}(x) = \int A^{(e)}(q) e^{-iqx} \frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \qquad A^{(e)}(q) = \int A^{(e)}(x) e^{iqx} d^4x. \tag{77.6}$$

В выражениях для матричных элементов в импульсном представлении 4-вектор q будет фигурировать наряду с 4-импульсами других внешних линий, отвечающих реальным частицам. Каждой такой линии внешнего поля сопоставляется множитель $A^{(e)}(q)$, причем линию надо рассматривать как «входящую» — в соответствии со знаком показателя в множителе e^{-iqx}, с которым $A^{(e)}(q)$ входит в интеграл Фурье («выходящей» же линии надо было бы сопоставить множитель $A^{(e)*}(q)$). Если при этом окажется, что закон сохранения 4-импульса не фиксирует (при заданных 4-импульсах всех реальных частиц) однозначным образом 4-импульсы всех линий внешнего поля, то по остающимся «свободными» q производится интегрирование (по $d^4q/(2\pi)^4$), как и по всем другим не фиксированным 4-импульсам линий диаграммы.

Если внешнее поле не зависит от времени, то

$$A^{(e)}(q) = 2\pi\delta(q^0) A^{(e)}(\mathbf{q}), \tag{77.7}$$

где $A^{(e)}(\mathbf{q})$ — трехмерная компонента Фурье:

$$A^{(e)}(\mathbf{q}) = \int A^{(e)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3x. \tag{77.8}$$

В этом случае внешней линии сопоставляется множитель $A^{(e)}(\mathbf{q})$ и ей приписывается 4-импульс $q^\mu = (0, \mathbf{q})$; энергии электронных линий, пересекающихся (вместе с линией поля) в вершине, при этом одинаковы в силу закона сохранения. По всем остающимся нефиксированными трехмерным импульсам $\mathbf{p}$ внутренних линий должно производиться интегрирование по $d^3p/(2\pi)^3$. Вычисленная таким образом амплитуда M_{fi} определяет, например, сечение рассеяния (64.25).

Дадим сводку окончательных правил *диаграммной техники*, по которым составляется выражение для амплитуды рассеяния (точнее — выражение для iM_{fi}) в импульсном представлении.

1. Приближению n-го порядка теории возмущений отвечают диаграммы с n вершинами, в каждой из которых сходятся одна входящая и одна выходящая электронные (сплошные) и одна фотонная (штриховая) линии. В амплитуду процесса рассеяния входят все диаграммы, имеющие свободные концы (внешние линии) в числе, равном числу начальных, и конечных частиц.

2. Каждой внешней входящей сплошной линии сопоставляется амплитуда начального электрона $u(p)$ или конечного позитрона $u(-p)$ (p — 4-импульс частицы). Каждой выходящей сплошной линии сопоставляется амплитуда конечного электрона $\overline{u}(p)$ или начального позитрона $\overline{u}(-p)$.

3. Каждой вершине сопоставляется 4-вектор $-ie\gamma^\mu$.

4. Каждой внешней входящей штриховой линии сопоставляется амплитуда начального фотона $\sqrt{4\pi}e_\mu$, а выходящей линии — амплитуда $\sqrt{4\pi}e^*_\mu$ конечного фотона (e — 4-вектор поляризации). Векторный индекс μ совпадает с индексом матрицы γ^μ в соответствующей вершине (так что возникает скалярное произведение γe или γe^*).

5. Каждой внутренней сплошной линии сопоставляется множитель $iG(p)$, а внутренней штриховой линия — множитель $-iD_{\mu\nu}(p)$. Тензорные индексы $\mu\nu$ совпадают с индексами матриц γ^μ, γ^ν в вершинах, соединяемых штриховой линией.

6. Вдоль каждой непрерывной последовательности электронных линии стрелки имеют неизменное направление, а расположение биспинорных индексов вдоль них соответствует записи матриц слева направо при движении против стрелок. Замкнутой электронной петле отвечает след произведения расположенных вдоль нее матриц.

7. В каждой вершине 4-импульсы пересекающихся в ней линий удовлетворяют закону сохранения, т. е. сумма импульсов входящих линий равна сумме импульсов выходящих линий. Импульсы свободных концов — заданные (с соблюдением общего закона сохранения) величины, причем позитронной линии приписывается импульс $-p$. По импульсам внутренних линий, остающимся нефиксированными после учета законов сохранения во всех вершинах, производится интегрирование (по $d^4p/(2\pi)^4$).

8. Входящему свободному концу, отвечающему внешнему полю, сопоставляется множитель $A^{(e)}(q)$; 4-вектор q связан с 4-импульсами других линий законом сохранения в вершине. Если поле не зависит от времени, свободному концу сопоставляется множитель $A^{(e)}(\mathbf{q})$, а по остающимся нефиксированными трехмерным импульсам внутренних линий производится интегрирование по $d^3p/(2\pi)^3$.

9. Дополнительный множитель -1 привносится в выражение для iM_{fi} каждой замкнутой электронной петлей в диаграмме и каждой парой позитронных внешних концов, если эти концы — начало и конец одной последовательности сплошных линий. Если среди начальных или среди конечных частиц имеется несколько электронов или позитронов, то относительный знак диаграмм, различающихся нечетным числом перестановок пар тождественных частиц (т. е. соответствующих им внешних концов), должен быть противоположным.

Для уточнения последнего правила добавим, что одинаковыми знаками должны во всяком случае обладать диаграммы с одинаковыми сплошными линиями, т. е. диаграммы, которые оказались бы тождественными после снятия с них всех фотонных линий. Напомним также, что при наличии тождественных фермионов общий знак амплитуды условен.

§ 78. Перекрестная инвариантность

Представление амплитуд рассеяния M_{fi} интегралами Фейнмана обнаруживает их замечательную симметрию, состоящую в следующем.

Любую из входящих внешних линий диаграммы Фейнмана можно рассматривать (без изменения ее направления) как частицу в начальном или античастицу в конечном состоянии, а каждую выходящую линию — как конечную частицу или начальную античастицу. Одновременно с переходом от частицы к античастице меняется также и смысл приписываемого линии 4-импульса p: $p = p_э$ для частицы (скажем, электрона) и $p = -p_п$ для позитрона. Меняется также и приписываемая частице поляризация. Поскольку входящей внешней линии должна сопоставляться волновая амплитуда u, а выходящей u^* — для электрона $u = u_э$, а для позитрона $u = u_п^*$. Но переход от u к u^* означает изменение знака проекции спина частицы (или ее спиральности).

Для фотона, как истинно нейтральной частицы, изменение смысла внешней линии означает просто переход от испускания фотона к его поглощению или наоборот: внешняя фотонная линия с импульсом k отвечает либо поглощению фотона с импульсом $k_{погл} = k$, либо испусканию фотона с импульсом $k_{исп} = -k$ и с противоположным знаком спиральности.

Такое изменение смысла внешних линий эквивалентно переходу от одного перекрестного канала реакции к другим каналам. Отсюда следует, что одна и та же амплитуда как функция импульсов свободных концов диаграмм описывает все каналы ре-

акции [1]). В зависимости от канала меняется лишь смысл аргументов функции: при переходе от частицы к античастице заменяется $p_i \to -p_f$, где p_i — 4-импульс начальной (в одном канале), а p_f — 4-импульс конечной (в другом канале) частицы. Об этом свойстве амплитуды рассеяния говорят как о *перекрестной симметрии*, или *перекрестной инвариантности*.

В терминах введенных в § 70 инвариантных амплитуд, функций кинематических инвариантов, можно сказать, что эти функции будут одни и те же для всех каналов, но для каждого канала их аргументы пробегают значения в своей физической области. Другими словами, интегралы Фейнмана определяют инвариантные амплитуды как аналитические функции; их значения в разных физических областях являются аналитическим продолжением функции, заданной в одной из областей. Так как подынтегральные выражения интегралов Фейнмана содержат особенности, то и инвариантные амплитуды имеют особенности, определяемые из выражений для этих интегралов (с учетом правила обхода полюсов). Если инвариантные амплитуды вычислены для какого-либо канала по интегралам Фейнмана, то и их аналитическое продолжение к другим каналам будет автоматически учитывать эти особенности.

Подчеркнем, что перекрестная инвариантность есть нечто большее, чем свойства матрицы рассеяния, вытекающие из общих требований пространственно-временнóй симметрии. Последние требуют равенства амплитуд процессов, получающихся друг из друга перестановкой начального и конечного состояний с заменой всех частиц античастицами (при неизменных импульсах $\mathbf{p}$ всех частиц и измененных по знаку проекциях их моментов). Это — требование CPT-инвариантности [2]). Перекрестная же инвариантность позволяет делать такое преобразование не только для всех частиц сразу, но и для любой частицы в отдельности.

§ 79. Виртуальные частицы

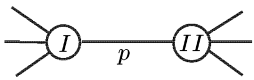
Внутренние линии диаграмм Фейнмана играют в инвариантной теории возмущений роль, аналогичную роли промежуточных состояний в «обычной» теории. Характер этих состояний, однако, в обеих теориях различен. В обычной теории в промежуточных состояниях сохраняется импульс (трехмерный), но не со-

[1]) Если тот или иной канал запрещен сохранением 4-импульса, то вероятность перехода автоматически обращается в нуль δ-функцией, фигурирующей в (64.5) в качестве общего множителя.

[2]) Обратим внимание на то, что формальное описание перехода от одной из указанных реакций к другой путем изменения знака всех 4-импульсов на диаграммах Фейнмана отвечает смыслу операции CPT как 4-инверсии.

храняется энергия; в этом смысле о них говорят как о *виртуальных состояниях.* В инвариантной же теории импульс и энергия входят равноправно: в промежуточных состояниях сохраняются все компоненты 4-импульса (результат того, что в элементах S-матрицы интегрирование производится и по координатам, и по времени, чем достигается инвариантность теории). При этом, однако, в промежуточных состояниях нарушается присущая реальным частицам связь между энергией и импульсом (выражаемая равенством $p^2 = m^2$). В этом смысле говорят о промежуточных *виртуальных частицах.* Соотношение между импульсом и энергией виртуальной частицы произвольно — оно такое, какое требуется сохранением 4-импульса в вершинах.

Рассмотрим некоторую диаграмму, состоящую из двух частей (I и II), соединенных одной линией. Не интересуясь внутренней структурой этих частей, представим диаграмму схематически в виде



(79.1)

(изображенные линии могут быть как сплошными, так и штриховыми). В силу общего закона сохранения, суммы 4-импульсов внешних линий частей I и II одинаковы; в силу сохранения в каждой вершине — этой же величине будет равен и 4-импульс p внутренней линии, соединяющей части I и II. Другими словами, этот импульс однозначно определен, так что в матричном элементе по нему не производится интегрирования.

В зависимости от канала реакции квадрат p^2 может быть как положителен, так и отрицателен. Всегда существует такой канал, в котором $p^2 > 0$ [1]). Тогда виртуальная частица по своим формальным свойствам становится вполне аналогичной реальной частице с вещественной массой $M = \sqrt{p^2}$. Для нее можно ввести систему покоя, можно определить ее спин и т. п.

Фотонный пропагатор (76.11) по своей тензорной структуре совпадает с матрицей плотности неполяризованной частицы со спином 1 и отличной от нуля массой:

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}\right)$$

(см. (14.15)). С другой стороны, пропагатор (как величина, составленная квадратично из операторов поля) играет для виртуальной частицы роль, аналогичную роли матрицы плотности реальной частицы. Поэтому виртуальному фотону надо приписать,

[1]) Таков, например, канал (если он допустим энергетически), в котором все свободные концы части I соответствуют начальным, а части II — конечным частицам. Тогда $p = P_i$ (сумма 4-импульсов всех начальных частиц), и в системе центра инерции $p = (P_i^0, 0)$, так что $p^2 > 0$.

как и реальному, спин 1. Однако в отличие от реального фотона с его двумя независимыми поляризациями — виртуальный фотон как «частица» конечной массы может иметь все три поляризации.

Функция распространения электрона

$$G \propto \gamma p + m.$$

Здесь m — масса реального электрона, между тем как «масса» виртуальной частицы $M = \sqrt{p^2}$. Написав

$$\gamma p + m = \frac{M+m}{2M}(\gamma p + M) + \frac{M-m}{2M}(\gamma p - M), \tag{79.2}$$

мы видим, что первый член отвечает матрице плотности частицы с массой M и спином $1/2$, а второй член — матрице плотности такой же «античастицы» (ср. (29.10) и (29.17)). Вспомнив, что частица и античастица имеют различные внутренние четности (см. § 27), придем к выводу, что виртуальному электрону надо приписать тот же спин $1/2$, но нельзя приписать определенной четности.

Характерная особенность диаграммы (79.1) состоит в том, что ее можно рассечь на две не связанные друг с другом части, пересекая при этом всего одну внутреннюю линию [1]. Эта линия соответствует в таком случае *одночастичному* промежуточному, состоянию — состоянию с всего одной виртуальной частицей. Амплитуда рассеяния, соответствующая такой диаграмме, содержит характерный (не подвергающийся интегрированию!) множитель

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i0},$$

происходящий от внутренней линии p (причем m — масса электрона, если линия электронная, или $m = 0$, если линия фотонная). Другими словами, амплитуда рассеяния имеет полюс при тех значениях p, при которых виртуальная частица стала бы физической ($p^2 = m^2$). Эта ситуация аналогична тому, как в нерелятивистской квантовой механике амплитуда рассеяния имеет полюсы при значениях энергии, отвечающих связанным состояниям системы сталкивающихся частиц (см. III, § 128).

Рассмотрим диаграмму (79.1) для того канала реакции, в котором все правые свободные концы отвечают начальным, а все левые — конечным частицам; при этом $p^2 > 0$. Тогда можно сказать, что в промежуточном состоянии система начальных частиц превращается в одну виртуальную. Это возможно, лишь если такое превращение не противоречит необходимым законам сохранения (без учета сохранения 4-импульса): сохранению момента,

---

[1]) Этим свойством обладают диаграммы почти всех процессов в первом неисчезающем приближении.

заряда, зарядовой четности и т. п. В этом и заключается необходимое условие появления, как говорят, *полюсных диаграмм*. Присутствуя для одного из каналов, такие диаграммы тем самым будут в силу кросс-инвариантности существовать и для остальных каналов реакции.

Например, указанные законы сохранения не препятствуют возникновению виртуального электрона согласно $e + \gamma \to e$. Эта возможность отвечает полюсу амплитуды комптон-эффекта (а тем самым и другого канала этой реакции — двухфотонной аннигиляции электронной пары). Возникновение виртуального фотона, согласно $e^- + e^+ \to \gamma$, отвечает полюсу амплитуды рассеяния электрона на позитроне, а тем самым и электрона на электроне. Из двух же фотонов не может получиться ни виртуального электрона, ни виртуального фотона (превращение $\gamma + \gamma \to e$ запрещено сохранением заряда и момента, а превращение $\gamma + \gamma \to \gamma$ — сохранением зарядовой четности). В соответствии с этим амплитуда рассеяния фотона на фотоне не может содержать полюсных диаграмм.

Происхождение полюсных особенностей амплитуд рассеяния, за которым мы проследили, исходя из интегралов Фейнмана, имеет в действительности более общий характер, не связанный с теорией возмущений. Покажем, что эти особенности возникают уже как следствие условия унитарности (71.2).

Предположим, что среди фигурирующих в (71.2) промежуточных состояний n есть одночастичное. Вклад этого состояния:

$$(T_{fi} - T_{if}^*)^{(\text{одноч})} = i(2\pi)^4 \sum_\lambda \int \delta^{(4)}(P_f - p) T_{fn} T_{in}^* \frac{V d^3p}{(2\pi)^3},$$

где p и λ — 4-импульс и спиральность промежуточной частицы. Интегрирование по d^3p заменим интегрированием по d^4p (по области $p^0 \equiv \varepsilon > 0$) согласно

$$d^3p \to 2\varepsilon\delta(p^2 - M^2) d^4p$$

(M — масса промежуточной частицы). Интегрирование устраняет δ-функцию $\delta^{(4)}(P_f - p)$; перейдя затем от амплитуд T_{fi} к амплитудам M_{fi} согласно (64.10), найдем

$$(M_{fi} - M_{if}^*)^{(\text{одноч})} = 2\pi i \delta(p^2 - M^2) \sum_\lambda M_{fn} M_{in}^*. \tag{79.3}$$

Предполагая T- и P-инвариантность, будем иметь (с точностью до фазового множителя) $M_{if} = M_{f'i'}$, где состояния i', f' отличаются от i, f лишь знаком спиральностей частиц (при тех же импульсах). Взяв сумму равенств (79.3) и такого же для $M_{f'i'} - M_{i'f'}^*$, получим

$$\operatorname{Im} \overline{M}_{fi}^{(\text{одноч})} = -\pi\delta(p^2 - M^2) R, \tag{79.4}$$

где обозначено

$$\overline{M}_{fi} = M_{fi} + M_{f'i'}, \quad R = -\sum_{\lambda}(M_{fn}M_{in}^* + M_{f'n}M_{i'n}^*).$$

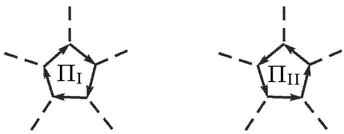
Отсюда и следует, что $\overline{M}_{fi}$ как аналитическая функция от $p^2 = P_i^2 = P_f^2$ имеет полюс при $p^2 = M^2$. Согласно (75.18) имеем для полюсной части

$$\overline{M}_{fi}^{(\text{одноч})} = \frac{R}{p^2 - M^2 + i0}. \qquad (79.5)$$

Реальные переходы в одночастичное состояние возможны только при значении $P_i^2 = P_f^2$ равном M^2. Таким образом, мы действительно получили структуру амплитуды рассеяния, отвечающую диаграмме вида (79.1).

Наконец, остановимся на важном свойстве диаграмм, содержащих замкнутые электронные петли. Это свойство можно легко получить путем применения к виртуальному фотону понятия зарядовой четности: виртуальному фотону, как и реальному, надо приписать определенную (отрицательную) зарядовую четность [1]).

Если некоторая диаграмма содержит замкнутую петлю (с числом вершин $N > 2$), то наряду с этой диаграммой в амплитуде рассматриваемого процесса должна фигурировать также и другая диаграмма, отличающаяся от первой лишь направлением обхода петли (при $N = 2$ понятие направления обхода, очевидно, не имеет смысла). «Вырежем» эти петли по идущим к ним штриховым линиям. Мы получим тогда две петли Π_{I} и Π_{II}:



(79.6)

которые можно рассматривать как диаграммы, определяющие амплитуду процесса превращения одной совокупности фотонов (реальных или виртуальных) в другую: число N есть при этом сумма чисел начальных и конечных фотонов. Но сохранение зарядовой четности запрещает превращение четного числа фотонов в нечетное. Поэтому при нечетном N сумма выражений, соответствующих петлям (79.6), должна обратиться в нуль. Обращается, следовательно, в нуль также и суммарный вклад в амплитуду рассеяния двух диаграмм, содержащих эти петли в ка-

[1]) Это следует из тех же соображений о действующем в каждой вершине операторе электромагнитного взаимодействия, которые были указаны в § 13 для реального фотона.

честве своих составных частей (так называемая *теорема Фарри*; *W. H. Furry*, 1937).

Таким образом, при составлении амплитуды какого-либо процесса можно вовсе не рассматривать диаграмм, содержащих петли с нечетным числом вершин.

Проследим более детально за происхождением указанного взаимного сокращения диаграмм. Замкнутой электронной петле отвечает выражение (при заданных импульсах фотонных линий $k_1, k_2, \ldots, k_N$)

$$\int d^4p \cdot \mathrm{Sp}[(\gamma e_1)G(p)(\gamma e_2)G(p+k_1)\ldots], \tag{79.7}$$

где p, $p+k_1$, … — импульсы электронных линий (остающиеся не вполне определенными после учета законов сохранения в вершинах). Произведем над всеми матрицами γ^μ и G операцию зарядового сопряжения, т. е. заменим их на $U_C^{-1}\gamma^\mu U_C$ и $U_C^{-1}GU_C$. Выражение (79.7) при этом не изменится, так как след произведения матриц инвариантен относительно такого преобразования. С другой стороны, согласно (26.3),

$$U_C^{-1}\gamma^\mu U_C = -\widetilde{\gamma}^\mu, \tag{79.8}$$

а потому

$$U_C^{-1}G(p)U_C = \frac{-p\widetilde{\gamma}+m}{p^2-m^2} = \widetilde{G}(-p). \tag{79.9}$$

Но замена $G(p)$ транспонированной матрицей с измененным знаком у p означает, очевидно, изменение направления обхода петли, в которой направление всех стрелок заменяется обратным. Другими словами, произведенное преобразование превращает одну петлю в другую, причем появляется множитель $(-1)^N$, происходящий от замены (79.8) в каждой вершине. Таким образом,

$$\Pi_{\mathrm{I}} = (-1)^N \Pi_{\mathrm{II}}, \tag{79.10}$$

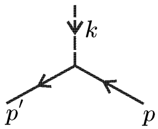
т. е. вклады обеих петель одинаковы при четном и противоположны по знаку при нечетном числе вершин.

ГЛАВА IX

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ

§ 80. Рассеяние электрона во внешнем поле

Упругое рассеяние электрона в постоянном внешнем поле представляет собой простейший процесс, существующий уже в первом приближении теории возмущений (первое борновское приближение). Ему отвечает диаграмма с одной вершиной



(80.1)

где p и p' — начальный и конечный 4-импульсы электрона, а $q = p' - p$. Поскольку энергия электрона при рассеянии в постоянном поле сохраняется ($\varepsilon = \varepsilon'$), то $q = (0, \mathbf{q})$ [1]).

Соответствующая амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = -e\overline{u}(p')[\gamma A^{(e)}(\mathbf{q})]u(p), \tag{80.2}$$

где $A^{(e)}(\mathbf{q})$ — компонента пространственного разложения Фурье внешнего поля. Сечение рассеяния, согласно (64.26),

$$d\sigma = \frac{1}{16\pi^2}|M_{fi}|^2 do'. \tag{80.3}$$

Для электростатического поля $A^{(e)} = (A_0^{(e)}, 0)$, так что

$$M_{fi} = -e\overline{u}(p')\gamma^0 u(p)A_0^{(e)}(\mathbf{q}) = -eu^*(p')u(p)A_0^{(e)}(\mathbf{q}). \tag{80.4}$$

В нерелятивистском случае биспинорные амплитуды плоских волн $u(p)$ сводятся к нерелятивистским (двухкомпонентным) амплитудам. Для рассеяния без изменения поляризации это — не зависящая от p величина, причем в силу принятого нами условия нормировки $u^*u = 2m$. Учитывая это, получаем

$$d\sigma = \left|-\frac{m}{2\pi}U(\mathbf{q})\right|^2 do',$$

---

[1]) В случае внешнего поля такая диаграмма не запрещается, конечно, законом сохранения 4-импульса (как это было в диаграмме (73.19) с реальным фотоном): квадрат q^2, в отличие от квадрата 4-импульса реального фотона, не должен быть равен нулю; из интеграла Фурье, представляющего внешнее поле, автоматически выбирается компонента с нужным q.

где $U(\mathbf{q}) = eA_0^{(e)}(\mathbf{q})$ — компонента Фурье потенциальной энергии электрона в поле; это выражение совпадает с известной формулой Борна (III, (126.7)).

В общем релятивистском случае сечение рассеяния неполяризованных электронов получается усреднением квадрата $|M_{fi}|^2$ по начальным и суммированием по конечным поляризациям, т. е. путем образования величины

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{поляр}} |M_{fi}|^2,$$

где суммирование производится по направлениям спина начального и конечного электронов; множитель $^1/_2$ превращает одно из этих суммирований в усреднение. По изложенным в § 65 правилам получим

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{поляр}} |M_{fi}|^2 = 2\,\mathrm{Sp}\,\rho'(\gamma A_0^{(e)})\rho(\gamma A_0^{(e)*}) =$$
$$= \frac{1}{2}|A_0^{(e)}(\mathbf{q})|^2\,\mathrm{Sp}(m+\gamma p')\gamma^0(m+\gamma p)\gamma^0.$$

Для вычисления следа замечаем, что $\gamma^0(\gamma p)\gamma^0 = \gamma\widetilde{p}$, где $\widetilde{p} = (\varepsilon, -p)$, и потому

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}(m+\gamma p')\gamma^0(m+\gamma p)\gamma^0 = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}(m+\gamma p')(m+\gamma\widetilde{p}) =$$
$$= m^2 + p'\widetilde{p} = \varepsilon^2 + m^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}' = 2\varepsilon^2 - \mathbf{q}^2/2.$$

Отсюда сечение

$$d\sigma = \frac{\mathbf{e}^2|A_0^{(e)}(\mathbf{q})|^2}{4\pi^2}\varepsilon^2\left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\varepsilon^2}\right)do'. \tag{80.5}$$

Для поля, создаваемого статическим распределенном зарядов с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, имеем

$$A_0^{(e)}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi\rho(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}, \tag{80.6}$$

где $\rho(\mathbf{q})$ — фурье-образ распределения $\rho(\mathbf{r})$ (формфактор). В частности, для кулонова поля точечного заряда Ze имеем: $\rho(\mathbf{q}) = Ze$. Тогда сечение рассеяния

$$d\sigma = do'\,\frac{4(Ze^2)^2\varepsilon^2}{\mathbf{q}^4}\left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{4\varepsilon^2}\right) \tag{80.7}$$

(*N. F. Mott*, 1929). Квадрат

$$\mathbf{q}^2 = 4\mathbf{p}^2\sin^2(\theta/2),$$

где θ — угол рассеяния. Поэтому выражение перед скобкой по своей угловой зависимости может быть названо резерфордовским сечением:

$$d\sigma_{\text{рез}} = do\frac{4(Ze^2)^2\varepsilon^2}{\mathbf{q}^4} = do\frac{4(Ze^2)^2\varepsilon^2}{4\mathbf{p}^4}\sin^{-4}\frac{\theta}{2} \tag{80.8}$$

(в нерелятивистском пределе коэффициент $\varepsilon^2/\mathbf{p}^4 \to 1/(m^2v^4)$). Таким образом [1],

$$d\sigma = d\sigma_{\text{рез}}\Big(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\Big). \tag{80.9}$$

Отметим, что в ультрарелятивистском случае угловое распределение отличается от нерелятивистского сильным подавлением рассеяния назад (при $\theta \to \pi$: $d\sigma/d\sigma_{\text{рез}} \to m^2/\varepsilon^2$).

В ультрарелятивистском случае для рассеяния на малые углы (80.7) дает

$$d\sigma = \frac{4(Ze^2)^2}{\varepsilon^4\theta^4}do'. \tag{80.10}$$

Хотя эту формулу мы получили в борновском приближении (т. е. предполагая $Ze^2 \ll 1$), она, тем не менее, остается справедливой (для углов $\theta \lesssim m/\varepsilon$) также и при $Ze^2 \sim 1$. В этом можно убедиться с помощью ультрарелятивистской точной (по Ze^2) волновой функции $\psi^{(+)}_{\varepsilon\mathbf{p}}$ (39.10). Это решение, справедливое в области (39.2), остается, конечно, справедливым и в асимптотической области сколь угодно больших r. Здесь

$$F \propto 1 + \text{const}\cdot e^{i(pr-\mathbf{pr})}, \qquad \frac{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla}F}{\varepsilon} \sim 1-\cos\theta \sim \theta^2 \ll 1,$$

так что поправочный член остается, как и следовало ожидать, малым. Волновая же функция вида $e^{i\mathbf{pr}}F$, совпадая по форме с нерелятивистской функцией (с очевидным изменением параметров), имеет тот же асимптотический вид, а поэтому и для сечения получается резерфордовское выражение.

Для вычисления сечения рассеяния произвольно поляризованных электронов можно было бы воспользоваться по общим правилам матрицей плотности (29.13). В данном случае, однако,

---

[1]) Выражаемое этой формулой отличие $d\sigma$ от $d\sigma_{\text{рез}}$ специфично для частиц со спином $1/2$. Для рассеяния частиц со спином 0 (если бы их движение в электромагнитном поле описывалось волновым уравнением) получилось бы $d\sigma = d\sigma_{\text{рез}}$. На первый взгляд кажется странным, что выражающий этот чисто квантовый эффект множитель не содержит $\hbar$. Надо, однако, помнить, что условие применимости борновского приближения ($e^2/(\hbar v) \ll 1$) противоположно условию квазиклассичности для движения в кулоновом поле и поэтому переход к классическому случаю в формуле (80.9) невозможен.

можно получить результат менее громоздким способом, представив биспинорные амплитуды $u(p')$ и $u(p)$ в виде (23.9); перемножив их, получим

$$u^*(p')u(p) = w'^*\{\varepsilon + m + (\varepsilon - m)(\mathbf{n}'\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\}w,$$

или, воспользовавшись формулой (33.5),

$$u^*(p')u(p) = w'^*\widehat{f}w, \tag{80.11}$$

где [1])

$$\widehat{f} = A + B\boldsymbol{\nu\sigma},$$
$$A = (\varepsilon + m) + (\varepsilon - m)\cos\theta, \qquad B = -i(\varepsilon - m)\sin\theta, \tag{80.12}$$
$$\boldsymbol{\nu} = \frac{[\mathbf{nn}']}{\sin\theta}.$$

Двухкомпонентная величина (3-спинор) w представляет собой нерелятивистскую спиновую волновую функцию электрона. Переход к частично поляризованным состояниям осуществляется поэтому заменой произведений $w_\alpha w_\beta^*$ (α, β — спинорные индексы) нерелятивистской двухрядной матрицей плотности $\rho_{\alpha\beta}$. Таким образом, надо заменить

$$|M_{fi}|^2 \to e^2|A_0^{(e)}(\mathbf{q})|^2\,\mathrm{Sp}\,\rho(A - B\boldsymbol{\nu\sigma})\rho'(A + B\boldsymbol{\nu\sigma}),$$

где

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma\zeta}), \qquad \rho' = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma\zeta}'),$$

а $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\zeta}'$ — векторы начальной и конечной поляризации, выделяемой детектором. Вычисление следа приводит к результату

$$d\sigma = d\sigma_0\left\{1 + \frac{(A^2 - |B^2|)\boldsymbol{\zeta\zeta}' + 2|B|^2(\boldsymbol{\nu\zeta})(\boldsymbol{\nu\zeta}') + 2A|B|\boldsymbol{\nu}[\boldsymbol{\zeta\zeta}']}{A^2 + |B|^2}\right\}, \tag{80.13}$$

где $d\sigma_0$ — сечение рассеяния неполяризованных электронов.

Представив фигурную скобку в (80.13) в виде $\{1 + \boldsymbol{\zeta}^{(f)}\boldsymbol{\zeta}'\}$, найдем поляризацию конечного электрона как такового (в отличие от детектируемой поляризации $\boldsymbol{\zeta}'$ — см. § 65) [2]):

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \frac{(A^2 - |B^2|)\boldsymbol{\zeta} + 2|B|^2(\boldsymbol{\nu\zeta})\boldsymbol{\nu} + 2A|B|[\boldsymbol{\nu\zeta}]}{A^2 + |B|^2}. \tag{80.14}$$

Мы видим, что рассеянные электроны поляризованы, лишь если поляризованы падающие электроны. Это обстоятельство — общее свойство первого борновского приближения (ср. III, § 140).

---

[1]) Определения $\widehat{f}$ здесь и в § 37, § 38 различаются общим множителем.

[2]) Формула (80.14) отвечает формуле, найденной в задаче 1, (см. т. III, § 140) и получается из нее при вещественном A и мнимом B.

В нерелятивистском случае ($\varepsilon \to m$) из (80.14) получается $\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \boldsymbol{\zeta}$, т. е. электрон сохраняет при рассеянии свою поляризацию (естественное следствие пренебрежения спин-орбитальным взаимодействием).

В обратном, ультрарелятивистском, случае имеем

$$A = \varepsilon(1 + \cos\theta), \qquad B = -i\varepsilon\sin\theta$$

(в соответствии с общей формулой (38.2)).

Если при этом падающий электрон имеет определенную спиральность ($\boldsymbol{\zeta} = 2\lambda\mathbf{n}$, $\lambda = \pm 1/2$), то из (80.14) получается после простого приведения

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = 2\lambda\mathbf{n}'.$$

Другими словами, после рассеяния электрон остается спиральным, сохраняя прежние значение (λ) спиральности.

Это свойство, как уже было объяснено в § 38, связано с тем, что при пренебрежении массой уравнение Дирака в спинорном представлении распадается на два независимых уравнения для функций ξ и η. Этот результат имеет и более общее значение, поскольку ток

$$\widehat{j} = (\xi^*\xi + \eta^*\eta,\ \xi^*\boldsymbol{\sigma}\xi - \eta^*\boldsymbol{\sigma}\eta),$$

а с ним и оператор электромагнитного возмущения $\widehat{V} = e\widehat{j}\widehat{A}$, не содержат смешанных по ξ и η членов, а потому не имеют матричных элементов для переходов между ξ- и η-состояниями. Отсюда следует, что если ультрарелятивистский электрон обладает определенной спиральностью (т. е. отлично от нуля либо ξ, либо η), то в процессах взаимодействия эта спиральность будет сохраняться в приближении, отвечающем полному пренебрежению массой электрона.

§ 81. Рассеяние электронов и позитронов на электроне

Рассмотрим рассеяние электрона на электроне: два электрона с 4-импульсами p_1, p_2 сталкиваются, приобретая 4-импульсы p_1', p_2'. Сохранение 4-импульса выражается равенством

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2'. \tag{81.1}$$

Ниже мы будем пользоваться введенными в § 66 кинематическими инвариантами, определенными согласно

$$\begin{gathered} s = (p_1 + p_2)^2 = 2(m^2 + p_1p_2), \\ t = (p_1 - p_1')^2 = 2(m^2 - p_1p_1'), \\ u = (p_1 - p_2')^2 = 2(m^2 - p_1p_2'), \\ s + t + u = 4m^2. \end{gathered} \tag{81.2}$$

Рассматриваемый процесс изображается двумя диаграммами Фейнмана (73.13), (73.14), и его амплитуда равна [1])

$$M_{fi} = 4\pi e^2\left\{\frac{1}{t}(\overline{u}'_2\gamma^\mu u_2)(\overline{u}'_1\gamma_\mu u_1) - \frac{1}{u}(\overline{u}'_1\gamma^\nu u_2)(\overline{u}'_2\gamma_\nu u_1)\right\}. \quad (81.3)$$

Согласно указанным в § 65 правилам для состояний начальных и конечных частиц, описывающихся поляризационными матрицами плотности ρ_1, $\rho_1\prime, \ldots$, заменяем

$$|M_{fi}|^2 \to 16\pi^2 e^4\left\{\frac{1}{t^2}\,\mathrm{Sp}(\rho'_2\gamma^\mu\rho_2\gamma^\nu)\,\mathrm{Sp}(\rho'_1\gamma_\mu\rho_1\gamma_\nu) + \right.$$
$$+ \frac{1}{u^2}\,\mathrm{Sp}(\rho'_1\gamma^\mu\rho_2\gamma^\nu)\,\mathrm{Sp}(\rho'_2\gamma_\mu\rho_1\gamma_\nu) -$$
$$\left. - \frac{1}{tu}\,\mathrm{Sp}(\rho'_2\gamma^\mu\rho_2\gamma^\nu\rho'_1\gamma_\mu\rho_1\gamma_\nu) - \frac{1}{tu}\,\mathrm{Sp}(\rho'_1\gamma^\mu\rho_2\gamma^\nu\rho'_2\gamma_\mu\rho_1\gamma_\nu)\right\}. \quad (81.4)$$

Для рассеяния неполяризованных электронов (не интересуясь при этом их поляризацией после рассеяния) мы должны положить для всех матриц плотности $\rho = {}^1\!/_2(\gamma p + m)$, умножив результат на $2 \cdot 2 = 4$ (усреднение по поляризациям двух начальных и суммирование по поляризациям двух конечных электронов). Сечение рассеяния определяется формулой (64.23), в которой надо положить, согласно (64.15а), $I^2 = {}^1\!/_4 s(s - 4m^2)$. Представим сечение в виде

$$d\sigma = dt\frac{4\pi e^2}{s(s-4m^2)}\{f(t,\,u) + g(t,\,u) + f(u,\,t) + g(u,\,t)\},$$
$$f(t,\,u) = \frac{1}{16t^2}\,\mathrm{Sp}[(\gamma p'_2 + m)\gamma^\mu(\gamma p_2 + m)\gamma^\nu]\times$$
$$\times\,\mathrm{Sp}[(\gamma p'_1 + m)\gamma_\mu(\gamma p_1 + m)\gamma_\nu], \quad (81.5)$$
$$g(t,u) = -\frac{1}{16tu}\,\mathrm{Sp}[(\gamma p'_2 + m)\gamma^\mu(\gamma p_2 + m)\gamma^\nu(\gamma p'_1 + m)(\gamma p_1 + m)\gamma_\nu].$$

В $f(t,\,u)$ сначала вычисляются следы (с помощью (22.9), (22.10)), а затем производится суммирование по μ и ν [2]) ; в $g(t,\,u)$ сначала производится суммирование по μ и ν (с помощью формул (22.6)).

---

[1]) Этот вид M_{fi} находится в соответствии с общим выражением (70.5). В первом не исчезающем приближении теории возмущений из пяти инвариантных амплитуд отлична от нуля только одна: $f_3(t,u) = 4\pi e^2/t$.

[2]) Отметим для будущих ссылок формулу

$${}^1\!/_4\,\mathrm{Sp}(\gamma p_1 + m)\gamma^\mu(\gamma p_2 + m)\gamma^\nu = g^{\mu\nu}(m^2 - p_1p_2) + p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu.$$

В результате получим

$$f(t,\, u) = \frac{2}{t^2}[(p_1p_2)^2 + (p_1p_2')^2 + 2m^2(m^2 - p_1p_1')],$$

$$g(t,\, u) = \frac{2}{tu}(p_1p_2 - 2m^2)(p_1p_2),$$

или, выразив функции f и g через инварианты (81.2),

$$f(t,\, u) = \frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 4m^2(t-m^2)\right],$$
$$g(t,\, u) = g(u,\, t) = \frac{2}{tu}\left(\frac{s}{2} - m^2\right)\left(\frac{s}{2} - 3m^2\right). \qquad (81.6)$$

Таким образом, сечение

$$d\sigma = r_e^2\frac{4\pi m^2 dt}{s(s-4m^2)}\left\{\frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 4m^2(t-m^2)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2} + 4m^2(u-m^2)\right] + \frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2}-m^2\right)\left(\frac{s}{2}-3m^2\right)\right\}, \qquad (81.7)$$

где $r_e = e^2/m$.

Применим эту формулу в системе центра инерции. Здесь

$$s = 4\varepsilon^2, \quad t = -4\mathbf{p}^2\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad u = -4\mathbf{p}^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$
$$-dt = -2\mathbf{p}^2 d\cos\theta = \frac{\mathbf{p}^2}{\pi}do \qquad (81.8)$$

($|\mathbf{p}|$, ε — величина импульса и энергия электронов, не меняющиеся при рассеянии; θ — угол рассеяния). В нерелятивистском случае ($\varepsilon \approx m$) [1] получим

$$d\sigma = r_e^2\frac{\pi m^4 dt}{\mathbf{p}^2}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{tu}\right) =$$
$$= \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)do =$$
$$= \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2\frac{4(1+3\cos^2\theta)}{\sin^4\theta}do \quad \text{(н. р.)} \qquad (81.9)$$

(где $\mathbf{v} = 2\mathbf{p}/m$ — относительная скорость электронов) что находится в согласии с нерелятивистской теорией (см. III, § 137). В общем случае произвольных скоростей формула (81.7) после

[1]) Скорость v предполагается малой ($v \ll 1$), но такой, чтобы все еще выполнялось условие применимости теории возмущений: $e^2/v (= e^2/(\hbar v)) \ll 1$.

подстановки (81.8) и простых преобразований может быть приведена к виду

$$d\sigma = r_e^2 \frac{m^2(\varepsilon^2+\mathbf{p}^2)^2}{4\mathbf{p}^4\varepsilon^2}\left[\frac{4}{\sin^4\theta} - \frac{3}{\sin^2\theta} + \left(\frac{\mathbf{p}^2}{\varepsilon^2+\mathbf{p}^2}\right)^2\left(1+\frac{4}{\sin^2\theta}\right)\right]do \tag{81.10}$$

(*Ch. Möller*, 1932). В ультрарелятивистском случае ($\mathbf{p}^2 \approx \varepsilon^2$)

$$d\sigma = r_e^2 \frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{(3+\cos^2\theta)^2}{4\sin^4\theta}do \quad \text{(у. р.)}. \tag{81.11}$$

В лабораторной системе отсчета, в которой один из электронов (скажем, второй) до столкновения покоился, выразим сечение через величину

$$\Delta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_1'}{m} = \frac{\varepsilon_2' - m}{m} \tag{81.12}$$

— энергию (в единицах m), переданную налетающим (первым) электроном второму [1]) . Инварианты

$$\begin{aligned} &s = 2m(m+\varepsilon_1), \quad t = -2m^2\Delta, \\ &u = -2m(\varepsilon_1 - m - m\Delta). \end{aligned} \tag{81.13}$$

Подстановка этих выражений в (81.7) приводит к следующей формуле для распределения по энергиям вторичных электронов (или, как говорят, *δ-электронов*), возникающих при рассеянии быстрых первичных электронов:

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{d\Delta}{\gamma^2-1}\left\{\frac{(\gamma-1)^2\gamma^2}{\Delta^2(\gamma-1-\Delta)^2} - \frac{2\gamma^2+2\gamma-1}{\Delta(\gamma-1-\Delta)} + 1\right\}, \tag{81.14}$$

где $\gamma = \varepsilon_1/m$; $m\Delta$ и $m(\gamma-1-\Delta)$ — кинетические энергии двух электронов после столкновения; тождественность обеих частиц проявляется здесь в симметрии формулы по отношению к этим величинам. Если условиться называть электроном отдачи тот из них, который имеет меньшую энергию, то Δ будет пробегать значения от 0 до $(\gamma-1)/2$. При малых Δ формула (81.14) принимает вид

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\frac{d\Delta}{\Delta^2} = \frac{2\pi r_e^2}{v_1^2}\frac{d\Delta}{\Delta^2}, \quad \Delta \ll \gamma - 1. \tag{81.15}$$

Отметим, что эта формула, выраженная через скорость налетающего электрона ($v_1 = |\mathbf{p}_1|/\varepsilon_1$), сохраняет свой вид при переходе к нерелятивистскому случаю. Естественно поэтому, что она по форме совпадает с результатом нерелятивистской теории (ср. III, (148.17)).

[1]) Кинематические соотношения для упругих столкновений в различных системах отсчета см. в т. II, § 13.

Рассмотрим теперь рассеяние позитрона на электроне (*H. Bhabha*, 1936). Это — другой кросс-канал той же обобщенной реакции, к которой относится рассеяние электрона на электроне. Если p_-, p_+ — начальные, а p'_-, p'_+ — конечные импульсы электрона и позитрона, то переход от одного случая к другому осуществляется заменой

$$p_1 \to -p'_+, \quad p_2 \to p_-, \quad p'_1 \to -p_+, \quad p'_2 \to p'_-.$$

При этом кинематические инварианты (81.2) приобретают следующий смысл:

$$s = (p_- - p'_+)^2, \quad t = (p_+ - p'_+)^2, \quad u = (p_- - p_+)^2. \qquad (81.16)$$

Если ee-рассеяние было s-каналом, то $\bar{e}e$-рассеяние есть u-канал реакции. Квадрат амплитуды рассеяния, выраженный через s, t, u, остается прежним, а в знаменателе формулы (81.5) надо заменить $s \to u$. Таким образом, для сечения рассеяния позитрона на электроне получим вместо (81.7)

$$d\sigma = r_e^2 \frac{4\pi m^2 dt}{u(u-4m^2)} \left\{ \frac{1}{t^2}\left[\frac{s^2+u^2}{2} + 4m^2(t-m^2)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{u^2}\left[\frac{s^2+t^2}{2} + 4m^2(u-m^2)\right] + \frac{4}{tu}\left(\frac{s}{2} - m^2\right)\left(\frac{s}{2} - 3m^2\right)\right\}. \qquad (81.17)$$

В системе центра инерции значения инвариантов s, t, u отличаются от (81.8) перестановкой s и u:

$$s = -4\mathbf{p}^2 \cos^2\frac{\theta}{2}, \quad t = -4\mathbf{p}^2 \sin^2\frac{\theta}{2}, \quad u = 4\varepsilon^2. \qquad (81.18)$$

В нерелятивистском пределе формула (81.17) сводится к формуле Резерфорда

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{do}{\sin^4(\theta/2)} \quad \text{(н. р.)}, \qquad (81.19)$$

где $\mathbf{v} = 2\mathbf{p}/m$. Она получается из первого члена в фигурных скобках в (81.17), происходящего от диаграммы «рассеивательного» типа (см. § 73). Вклады же от «аннигиляционной» диаграммы (второй член в (81.17)) и от ее интерференции с рассеивательной диаграммой (третий член) в нерелятивистском пределе обращаются в нуль [1]).

В общем случае произвольных скоростей вклады всех трех членов в (81.17) — одного порядка величины (лишь в области

[1]) Переход к нерелятивистскому пределу в рассеивательном и аннигиляционном членах амплитуды рассеяния — см. ниже (83.4) и (83.20). Аннигиляционный член (83.20) содержит множитель $1/c^2$ и потому обращается в этом пределе в нуль.

малых углов первый член преобладает благодаря множителю $t^{-2} \propto \sin^{-4}(\theta/2)$. После приведения подобных членов можно представить сечение рассеяния позитрона на электроне (в системе центра инерции) в виде

$$d\sigma = do\frac{r_e^2}{16}\frac{m^2}{\varepsilon^2}\left\{\frac{(\varepsilon^2+\mathbf{p}^2)^2}{\mathbf{p}^2}\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{8e^4-m^4}{\mathbf{p}^2\varepsilon^2}\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{12\varepsilon^4+m^4}{\varepsilon^4} - \frac{4\mathbf{p}^2(\varepsilon^2+\mathbf{p}^2)}{\varepsilon^4}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{4\mathbf{p}^4}{\varepsilon^4}\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}. \quad (81.20)$$

Симметрия по отношению к замене $\theta \to \pi - \theta$, характерная для рассеяния тождественных частиц, при рассеянии позитрона на электроне, разумеется, отсутствует. В ультрарелятивистском пределе выражение (81.20) отличается от электрон-электронного сечения лишь множителем $\cos^4(\theta/2)$:

$$d\sigma_{e\bar{e}} = \cos^4\frac{\theta}{2}d\sigma_{ee} \quad (\text{у. р.}). \quad (81.21)$$

В лабораторной системе отсчета, в которой одна из частиц (скажем, электрон) до столкновения покоилась, снова вводим величину

$$\Delta = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon'_+}{m} = \frac{\varepsilon'_- - m}{m}, \quad (81.22)$$

т. е. энергию, передаваемую позитроном электрону. Аналогично (81.13) имеем теперь

$$s = -2m(\varepsilon_+ - m - m\Delta), \quad t = -2m^2\Delta, \quad u = 2m(m+\varepsilon_+).$$

Подставив эти выражения в (81.17), после простых преобразований получим следующую формулу для распределения вторичных электронов по энергиям:

$$d\sigma = 2\pi r_e^2\frac{d\Delta}{\gamma^2-1}\left\{\frac{\gamma^2}{\Delta^2} - \frac{2\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma+1}\frac{1}{\Delta} + \right.$$
$$\left. + \frac{3\gamma^2+6\gamma+4}{(\gamma+1)^2} - \frac{2\gamma}{(\gamma+1)^2}\Delta + \frac{1}{(\gamma+1)^2}\Delta^2\right\}, \quad (81.23)$$

где $\gamma = \varepsilon_+/m$; Δ пробегает значения от 0 до $\gamma - 1$. При $\Delta \ll \gamma - 1$ из (81.23) получается та же формула (81.15), что и для рассеяния электронов.

Поляризационные эффекты при рассеянии электронов или позитронов вычисляются по общим правилам, изложенным в § 65. В сколько-нибудь общих случаях вычисления приводят к громоздким формулам. Здесь мы ограничимся лишь несколькими замечаниями [1].

[1] Более подробные сведения по этому вопросу можно найти в обзорной статье *McMaster W. H.*//Rev. Mod. Phys.— 1961.— V. 133,— P. 8.

В рассматриваемом (первом не исчезающем) приближении теории возмущений в сечении отсутствуют члены, линейные по векторам поляризации начальных или конечных частиц. Как и в нерелятивистской теории (см. III, § 140), такие члены запрещены требованиями, вытекающими из эрмитовости матрицы рассеяния. Поэтому сечение рассеяния не меняется, если поляризована лишь одна из сталкивающихся частиц, а рассеяние неполяризованных частиц не приводит к их поляризации.

Эти же требования запрещают корреляционные члены в сечении, содержащие произведения поляризаций трех из участвующих в процессе (начальных и конечных) частиц. Сечение содержит, однако, двойные и четверные корреляционные члены. При рассеянии неодинаковых частиц (электрон и позитрон, электрон и мюон) в нерелятивистском пределе эти члены обращаются в нуль, поскольку отсутствует спин-орбитальное взаимодействие. При столкновении же одинаковых частиц корреляционные члены имеются уже в нерелятивистском случае благодаря обменным эффектам.

Задачи

1. Определить сечение рассеяния поляризованных электронов в нерелятивистском случае.

Решение. В нерелятивистском случае биспинорные амплитуды в стандартном представлении становятся двухкомпонентными, а матрицы плотности — двухрядными матрицами (29.20). В амплитуде рассеяния (81.3) остаются отличными от нуля лишь члены с $\mu = \nu = 0$, содержащие диагональные (в стандартном представлении) матрицы γ^0. Вместо (81.4) будем иметь

$$\sum_{\text{поляр}} |M_{fi}|^2 = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \Big\{ \Big(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2}\Big) \operatorname{Sp}(1 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}_1) \operatorname{Sp}(1 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}_2) -$$

$$- \frac{2}{tu} \operatorname{Sp}(1 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}_1) \operatorname{Sp}(1 + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\zeta}_2) \Big\} = 16\pi^2 e^4 \cdot 4m^4 \cdot 4 \Big[\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{tu}(1 + \boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2) \Big]$$

(суммирование по поляризациям конечных электронов). Отсюда сечение рассеяния

$$d\sigma = d\sigma_0 \Big(1 - \frac{\sin^2\theta}{1 + 3\cos^2\theta} \boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2 \Big),$$

где θ — угол рассеяния в системе центра инерции, $d\sigma_0$ — сечение для неполяризованных частиц (81.9). Для полностью поляризованных электронов эта формула совпадает с результатом задачи в III, § 137 (при этом $|\boldsymbol{\zeta}_1| = |\boldsymbol{\zeta}_2| = 1$, $\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2 = \cos\alpha$, α — угол между направлениями поляризации электронов).

Для рассеяния позитронов на электронах поляризационная зависимость в том же приближении отсутствует ($d\sigma = d\sigma_0$), в этом легко убедиться, заметив, что в нерелятивистском пределе в электронных и позитронных амплитудах u_p и u_{-p} отличны от нуля различные пары компонент.

2. В нерелятивистском случае определить поляризацию рассеянных электронов при рассеянии неполяризованного пучка на поляризованной мишени.

Решение. Вычисляем сечение рассеяния при заданных начальной поляризации $\boldsymbol{\zeta}_2$ и детектируемой конечной поляризации $\boldsymbol{\zeta}'_1$ (детектируется

поляризация лишь одного из конечных электронов). Тем же способом, что и в задаче 1, получим

$$d\sigma = \frac{1}{2}d\sigma_0\Big[1 - \boldsymbol{\zeta}_1'\boldsymbol{\zeta}_2\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}\Big].$$

Отсюда для вектора поляризации рассеянного электрона имеем

$$\boldsymbol{\zeta}_1^{(f)} = -\boldsymbol{\zeta}_2\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}.$$

3. В нерелятивистском случае определить вероятность обращения направления спина полностью поляризованного электрона при рассеянии на неполяризованном электроне.

Р е ш е н и е. Аналогичным образом находим сечение при заданных поляризациях $\boldsymbol{\zeta}_1$ и $\boldsymbol{\zeta}_1'$:

$$d\sigma = \frac{1}{2}d\sigma_0\Big[1 + \boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_1'\frac{2\cos\theta(1+\cos\theta)}{1+3\cos^2\theta}\Big].$$

Положив $\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_1' = -1$, найдем отсюда вероятность обращения направления спина:

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{2(1+3\cos^2\theta)}.$$

4. Определить отношение сечений рассеяния спиральных электронов с параллельными и антипараллельными спинами в ультрарелятивистском случае.

Р е ш е н и е. В (81.4) надо положить, согласно (29.22),

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\gamma p_1)(1-2\lambda_1\gamma^5), \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(\gamma p_2)(1-2\lambda_2\gamma^5),$$

$$\rho_1' = \frac{1}{2}\gamma p_1', \quad \rho_2' = \frac{1}{2}\gamma p_2',$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2 = \pm 1/2$. Вычисление следов производится по приведенным в § 22 формулам; в частности,

$$\mathrm{Sp}[\gamma^5(\gamma a)\gamma^\mu(\gamma b)\gamma^\nu]\,\mathrm{Sp}[\gamma^5(\gamma c)\gamma_\mu(\gamma d)\gamma_\nu] =$$
$$= i^2(e^{\rho\mu\lambda\nu}a_\rho b_\lambda)(e_{\sigma\mu\tau\nu}c^\sigma d^\tau) = 2(\delta^\rho_\sigma\delta^\lambda_\tau - \delta^\rho_\tau\delta^\lambda_\sigma)a_\rho b_\lambda c^\sigma d^\tau = 2(ac)(bd) - 2(ad)(bc).$$

В результате получим

$$\frac{d\sigma}{dt} \propto \Big(\frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{s^2+t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\Big) + 4\lambda_1\lambda_2\Big(\frac{s^2-u^2}{t^2} + \frac{s^2-t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu}\Big).$$

Поскольку импульсы сталкивающихся электронов (в системе центра инерции) взаимно противоположны, то одинаковым спиральностям ($\lambda_1 = \lambda_2$) отвечают антипараллельные спины, а различным спиральностям ($\lambda_1 = -\lambda_2$) — параллельные спины. Подставив $s,\ t,\ u$ из (81.8) (считая $\mathbf{p}^2 \approx \varepsilon^2$), найдем для искомого отношения

$$\frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow}}{d\sigma_{\uparrow\downarrow}} = \frac{1}{8}(1+6\cos^2\theta+\cos^4\theta). \qquad (1)$$

Это соотношение минимально ($1/8$) при $\theta = \pi/2$.

5. То же для рассеяния позитронов на электронах.

Р е ш е н и е. В этом случае вместо (81.4) надо вычислять

$$|M_{fi}|^2 \to 16\pi^2 e^4 \left\{ \frac{1}{t^2} \operatorname{Sp}(\rho'_- \gamma^\mu \rho_- \gamma^\nu) \operatorname{Sp}(\rho_+ \gamma_\mu \rho'_+ \gamma_\nu) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{tu} \operatorname{Sp}(\rho'_- \gamma^\mu \rho_- \gamma^\nu \rho_+ \gamma_\mu \rho'_+ \gamma_\nu) + \ldots \right\}$$

(остальные члены получаются из написанных перестановкой ρ_+ и ρ'_-). Матрицы плотности:

$$\rho_- = \frac{1}{2}(\gamma p_-)(1 - 2\lambda_- \gamma^5), \quad \rho_+ = \frac{1}{2}(\gamma p_+)(1 + 2\lambda_+ \gamma^5),$$
$$\rho'_- = \frac{1}{2}\gamma p'_-, \quad \rho'_+ = \frac{1}{2}\gamma p'_+,$$

где λ_+, $\lambda_- = \pm 1/2$ (причем для позитрона, как и для электрона, $\lambda_+ = 1/2$ означает спин, направленный по его импульсу). Вычисление дает

$$\frac{d\sigma}{dt} \propto \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} \right) - 4\lambda_+ \lambda_- \left(\frac{s^2 - u^2}{t^2} + \frac{s^2 - t^2}{u^2} + \frac{2s^2}{tu} \right).$$

Отсюда для отношения сечений получается результат, совпадающий с формулой (1) задачи 4.

6. Определить сечение рассеяния мюонов на электронах.

Р е ш е н и е. Процесс описывается всего одной диаграммой (73.17). Вместо (81.5) имеем

$$d\sigma = \frac{\pi e^4 dt}{(p_e p_\mu)^2 - m^2 \mu^2} f(t, u) = \frac{4\pi e^4 dt}{[s - (m+\mu)^2][s - (m - \mu^2)^2]} f(t, u), \quad (1)$$

$$f(t, u) = \frac{1}{16t^2} \operatorname{Sp}[(\gamma p'_\mu + \mu)\gamma^\lambda (\gamma p_\mu + \mu)\gamma^\nu] \operatorname{Sp}[(\gamma p'_e + m)\gamma_\lambda (\gamma p_e + m)\gamma_\nu]$$

(p_e, p_μ и p'_e, p'_μ — начальные и конечные 4-импульсы электрона и мюона; m, μ — их массы). Инварианты:

$$s = (p_e + p_\mu)^2 = m^2 + \mu^2 + 2p_e p_\mu,$$
$$t = (p_e - p'_e)^2 = 2(m^2 - p_e p'_e) = 2(\mu^2 - p_\mu p'_\mu),$$
$$u = (p_e - p'_\mu)^2 = m^2 + \mu^2 - 2p_e p'_\mu,$$
$$s + t + u = 2(m^2 + \mu^2).$$

Вычисление приводит к результату

$$f = \frac{2}{t^2} \left\{ (p_e p_\mu)^2 + (p_e p'_\mu)^2 + \frac{1}{2}(m^2 + \mu^2) t \right\} =$$
$$= \frac{1}{t^2} \left\{ \frac{s^2 + u^2}{2} + (m^2 + \mu^2)(2t - m^2 - \mu^2) \right\}. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) решают поставленный вопрос. В системе центра инерции

$$d\sigma = \frac{e^4 do}{8(\varepsilon_e + \varepsilon_\mu)^2 \mathbf{p}^4 \sin^4(\theta/2)} \times$$
$$\times [(\varepsilon_e \varepsilon_\mu + \mathbf{p}^2)^2 + (\varepsilon_e \varepsilon_\mu + \mathbf{p}^2 \cos\theta)^2 - 2(m^2 + \mu^2)\mathbf{p}^2 \sin^2(\theta/2)],$$

где $do = 2\pi \sin\theta d\theta$; ε_e, ε_μ — энергии электрона и мюона; $\mathbf{p}^2 = \varepsilon_e^2 - m^2 = \varepsilon_\mu^2 - \mu^2$. При $\mathbf{p}^2 \ll \mu^2$ мы возвращаемся к формуле (80.9) для рассеяния на

неподвижном кулоновом центре. В ультрарелятивистском случае ($\mathbf{p}^2 \gg \mu^2$)

$$d\sigma = \frac{e^4}{8\mathbf{p}^2}\frac{1+\cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}do.$$

В лабораторной системе (в которой до столкновения покоится электрон)

$$d\sigma = 2\pi\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\frac{d\Delta}{\mathbf{v}_\mu^2\Delta^2}\left(1-\mathbf{v}_\mu^2\frac{\Delta}{\Delta_{\max}}+\frac{m^2}{2\varepsilon_\mu^2}\Delta^2\right)do.$$

Здесь ε_μ — энергия, а $\mathbf{v}_\mu = \mathbf{p}_\mu/\varepsilon_\mu$ — скорость налетающего мюона; $m\Delta = \varepsilon'_e - m = \varepsilon_\mu - \varepsilon'_\mu$ — энергия электрона отдачи, а

$$\Delta_{\max} = \frac{2\mathbf{p}_\mu^2}{m^2+\mu^2+2m\varepsilon_\mu}$$

— максимальное значение Δ.

7. Определить отношение сечений взаимного рассеяния спиральных электронов и мюонов с параллельными и антипараллельными спинами в ультрарелятивистском случае ($\varepsilon_\mu \gg \mu,\ \varepsilon_e \gg m$).

Решение [1]. Аналогично задаче 4 находим

$$\frac{d\sigma_{\uparrow\uparrow}}{d\sigma_{\uparrow\downarrow}} = \cos^4\frac{\theta}{2}$$

(θ — угол рассеяния в системе центра инерции).

8. Определить сечение превращения электронной пары в мюонную (*В. Б. Берестецкий, И. Я. Померанчук,* 1955).

Решение. Это другой кросс-канал реакции, к которой относится μe-рассеяние. В этом канале

$$s = (p_e - \overline{p}_\mu)^2, \quad t = (p_e - \overline{p}_e)^2, \quad u = (p_e - p_\mu)^2,$$

где p_e, $\overline{p}_e$ — 4-импульсы электрона и позитрона, а p_μ, $\overline{p}_\mu$ — мюона и антимюона. Порог реакции отвечает энергии электронной пары, равной (в системе центра инерции) 2μ, так что должно быть $t>4\mu^2$. В лабораторной системе, в которой до столкновения покоится электрон, а позитрон имеет энергию ε_+,

$$t = 2m(\varepsilon_+ + m) \approx 2m\varepsilon_+,$$

так что должно быть $\varepsilon_+ > \varepsilon_\text{п}$, где пороговая энергия $\varepsilon_\text{п} = 2\mu^2/m$ (здесь и ниже произведены все пренебрежения, допускаемые неравенством $\mu \gg m$). Дифференциальное сечение (вместо (1), (2) задачи 6)

$$d\sigma = \frac{4\pi e^4 ds}{(t-4m^2)t}f(t,\,u) \approx 4\pi e^4\frac{ds}{t^4}\left[\frac{s^2+u^2}{2}+2\mu^2 t-\mu^4\right].$$

При заданном t величина s пробегает значения между границами, определяемыми уравнениями $su \approx \mu^4$, $s+t+u \approx 2\mu^2$, т. е.

$$\mu^2-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{t(t-4\mu^2)} \leqslant s \leqslant \mu^2-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{t(t-4\mu^2)}.$$

Элементарное интегрирование приводит к результату:

$$\sigma = \frac{4\pi}{3}r_e^2\frac{m^2}{t}\sqrt{1-\frac{4\mu^2}{t}}\left(1+\frac{2\mu^2}{t}\right), \quad r_e = \frac{e^2}{m} \qquad (1)$$

[1]) Другой способ решения этой задачи дан в конце § 144.

(в лабораторной системе $t = 2m\varepsilon_+$). Эта формула неприменима в непосредственной близости к порогу: когда $\varepsilon_+ - \varepsilon_п \sim \mu e^4$, образующиеся мюоны нельзя считать свободными частицами (с учетом же кулонового взаимодействия между ними сечение будет стремиться при $\varepsilon_+ \to \varepsilon_п$ не к нулю, а к константе (см. III, § 147)).

Сечение (1) максимально при $\varepsilon_+ = 1,7\varepsilon_п$. Его значение в максимуме примерно в 20 раз меньше сечения двухфотонной аннигиляции при той же энергии.

§ 82. Ионизационные потери быстрых частиц

Рассмотрим столкновения быстрой релятивистской частицы с атомом, сопровождающиеся возбуждением или ионизацией последнего. В нерелятивистском случае такие неупругие столкновения были рассмотрены в III, § 144—150; здесь будет дано релятивистское обобщение полученных там формул (*H.A.Bethe*, 1933).

Скорость падающей на атом частицы предполагается большой по сравнению со скоростями атомных электронов (тем самым во всяком случае предполагается, что $Z\alpha \ll 1$, ,т. е. атомный номер не слишком велик). Этим условием обеспечивается применимость борновского приближения к рассматриваемому процессу. Решение задачи несколько различно в зависимости от того, является ли быстрая частица легкой (электрон, позитрон) или тяжелой (мезон, протон, α-частица и т. п.). Мы рассмотрим здесь последний случай, более простой.

Пусть $p = (\varepsilon, \mathbf{p})$ и $p' = (\varepsilon', \mathbf{p}')$ — начальный и конечный импульсы быстрой частицы в лабораторной системе отсчета, в которой атом до столкновения покоился; разность $q = p' - p$ дает энергию и импульс, передаваемые частицей атому. Разделим весь интервал возможных передач импульса на две области:

$$\text{I)}\ \frac{\mathbf{q}^2}{m} \ll m, \quad \text{II)}\ \frac{\mathbf{q}^2}{m} \gg I, \tag{82.1}$$

где m — масса электрона, I — некоторая средняя атомная энергия (потенциал ионизации атома). Обе области перекрываются друг с другом при $I \ll \mathbf{q}^2/m \ll m$; это обстоятельство позволит произвести точную сшивку результатов, получающихся для каждой из областей. Будем говорить о значениях $\mathbf{q}$ в первой и во второй областях соответственно как о малых и больших передачах импульса.

Малые передачи импульса. В этой области атомные электроны можно считать нерелятивистскими как в начальном, так и в конечном состояниях атома. Амплитуда процесса дается выражением

$$M_{fi}^{(n)} = e^2 J_{n0}^{\mu}(-q) J_{p'p}^{\nu}(q) D_{\mu\nu}(q), \tag{82.2}$$

где J_{n0} — 4-ток перехода атома из начального состояния (0) в конечное (n), $J_{p'p}$ — 4-ток перехода быстрой частицы; эти токи заменяют здесь собой выражения $(\overline{u}'\gamma u)$, которые стояли бы, например, в амплитуде рассеяния двух «элементарных» частиц — электрона и мюона (73.17) (ср. также (139.3)). Токи перехода берутся в импульсном представлении (см. (43.11)). Сечение процесса в лабораторной системе отсчета:

$$d\sigma_n = 2\pi\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega_{n0}) \left| M_{fi}^{(n)} \right|^2 \frac{d^3p'}{2|\mathbf{p}|2\varepsilon'(2\pi)^3}, \tag{82.3}$$

где $\omega_{n0} = E_n - E_0$ — частота перехода между состояниями атома. Конечное состояния может относиться как к дискретному, так и к непрерывному спектру; первый случай отвечает возбуждению, а второй — ионизации атома. В законе сохранения энергии (учитываемом δ-функцией в (82.3)) пренебрежено энергией отдачи атома, что заведомо допустимо при малых передачах импульса.

Фотонный пропагатор удобно выбрать в данном случае в калибровке (76.14), в которой отличны от нуля лишь его пространственные компоненты:

$$D_{ik}(q) = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \mathbf{q}^2} \left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{\omega^2} \right). \tag{82.4}$$

Тогда и для 4-токов перехода в (82.2) нужны только их пространственные компоненты.

Атомный ток перехода $\mathbf{J}_{n0}(\mathbf{q})$ в данном случае есть компонента Фурье обычного нерелятивистского выражения:

$$\mathbf{J}_{n0}(\mathbf{q}) = \frac{i}{2m} \int e^{-i\mathbf{qr}} (\psi_0 \boldsymbol{\nabla} \psi_n^* - \psi_n^* \boldsymbol{\nabla} \psi_0) d^3x, \tag{82.5}$$

где ψ_0, ψ_n — атомные волновые функции (причем для упрощения записи мы опускаем здесь и ниже знак суммирования по электронам атома, т. е. пишем формулу так, как если бы в атоме был всего один электрон). Проинтегрировав в первом члене по частям, можно переписать это выражение в виде матричного элемента:

$$\mathbf{J}_{n0}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}e^{-i\mathbf{qr}} + e^{-i\mathbf{qr}}\mathbf{v})_{n0}, \tag{82.6}$$

где $\widehat{\mathbf{v}} = -\dfrac{i}{m}\boldsymbol{\nabla}$ — оператор скорости электрона.

Что касается тока перехода рассеиваемой частицы, то ввиду относительной малости теряемого ею импульса ($|\mathbf{q}| \ll |\mathbf{p}|$) можно заменить его просто диагональным элементом

$$\mathbf{J}_{pp}(0) = 2\mathbf{p}z, \tag{82.7}$$

отвечающим классическому прямолинейному движению (ср. ниже (99.5)); здесь введен также множитель z, учитывающий возможное отличие заряда частицы (ze) от заряда электрона.

Малость $\mathbf{q}$ означает также и малость угла отклонения частицы ϑ. При этом продольная и поперечная (по отношению к $\mathbf{p}$) компоненты $\mathbf{q}$ равны

$$-q_{||} \approx \frac{dp}{d\varepsilon}\omega_{n0} = \frac{\omega_{n0}}{v}, \quad q_{\perp} \approx |\mathbf{p}|\vartheta, \tag{82.8}$$

так что $\mathbf{qp} \approx -\varepsilon\omega_{n0}$.

Подстановка ((82.4)–(82.8)) в (82.2) дает с учетом того, что $\omega = \omega_{n0}$:

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{4\pi z e^2}{q^2}\left\langle n\left|\frac{\varepsilon}{\omega_{n0}}(\mathbf{qv}e^{-i\mathbf{qr}} + e^{-i\mathbf{qr}}\mathbf{qv}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (\mathbf{pv}e^{-i\mathbf{qr}} + e^{-i\mathbf{qr}}\mathbf{pv})\right|0\right\rangle.$$

В первом члене замечаем, что

$$\mathbf{q}\hat{\mathbf{v}}f + f\mathbf{q}\hat{\mathbf{v}} = 2i\widehat{\dot{f}},$$

где $f \equiv e^{-i\mathbf{qr}}$ (см. III, § 149); поэтому матричный элемент этого оператора совпадает с матричным элементом $2i(\dot{f})_{n0} = 2\omega_{n0}f_{n0}$. Во втором же члене достаточно заменить, ввиду малости $\mathbf{q}$, $e^{-i\mathbf{qr}}$ единицей. Тогда

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{8\pi z e^2}{q^2}\{\varepsilon(e^{-i\mathbf{qr}})_{n0} - i\mathbf{pr}_{n0}\omega_{n0}\}.$$

Квадрат модуля этого выражения:

$$\left|M_{fi}^{(n)}\right|^2 = \frac{64\pi^2(ze^2)^2}{(q^2)^2}\Big\{\varepsilon^2\left|(e^{-i\mathbf{qr}})_{n0}\right|^2 + 2(\mathbf{qr}_{n0})(\mathbf{pr}_{n0})\varepsilon\omega_{n0} +$$
$$+ (\mathbf{pr}_{n0})^2\omega_{n0}^2\Big\} \tag{82.9}$$

(во втором члене здесь положено $e^{-i\mathbf{qr}} \approx 1 - i\mathbf{qr}$; в первом члене этого нельзя сделать по причине, которая выяснится ниже, — см. примеч. на с. 378).

Потери энергии быстрой частицей в результате ее неупругих столкновений с атомами [1]) определяются величиной

$$\varkappa = \sum_n \int \omega_{n0} d\sigma_n = \frac{1}{16\pi^2}\sum_n \int \omega_{n0}\left|M_{fi}^{(n)}\right|^2 do', \tag{82.10}$$

где суммирование производится по всем возможным конечным состояниям атома, а интегрирование — по направлениям рассеянной частицы; будем называть эту величину *эффективным торможением* (отношение $\varkappa/\varepsilon$ называют *сечением потери энергии*).

[1]) Эти потери часто называют ионизационными, хотя они связаны не только с ионизацией, но и с возбуждением атомов.

Интегрирование в (82.10) можно произвести в два этапа: как усреднение по азимуту направления $\mathbf{p}'$ относительно $\mathbf{p}$ и затем интегрирование по $do' \approx 2\pi\vartheta d\vartheta$, где ϑ — малый угол отклонения. Первая операция заменяет $\mathbf{qr}_{n0}$ на

$$\mathbf{qr}_{n0} \to q_{\parallel} x_{n0} = -\frac{\omega_{n0}}{v} x_{n0},$$

где x_{n0} — матричный элемент одной из декартовых координат атомных электронов [1]. Интегрирование же по ϑ можно заменить интегрированием по q^2, заметив, что

$$-q^2 = -\omega_{n0}^2 + \mathbf{q}^2 \approx -\omega_{n0}^2 + \frac{\omega_{n0}^2}{v^2} + \mathbf{p}^2\vartheta^2 = \frac{\omega_{n0}^2 M^2}{\mathbf{p}^2} + \mathbf{p}^2\vartheta^2 \qquad (82.11)$$

и потому $2\vartheta d\vartheta = d|q^2|/\mathbf{p}^2$ (M — масса быстрой частицы). В результате получим

$$\varkappa = 4\pi(ze^2)^2 \sum_n \int \left\{ \left|(e^{-i\mathbf{qr}})_{n0}\right|^2 \frac{\omega_{n0}}{v^2} - \omega_{n0}^3 \left|x_{n0}\right|^2 \left|\frac{M^2}{\mathbf{p}^2} + \frac{1}{v^2}\right| \right\} \frac{d|q^2|}{|q^2|^2}. \qquad (82.12)$$

Нижний предел интегрирования по q^2:

$$|q^2|_{\min} = \frac{M^2}{\mathbf{p}^2}\omega_{n0}^2. \qquad (82.13)$$

В качестве же верхнего предела выберем некоторое значение $|q^2|_1$ такое, что

$$I \ll \frac{|q^2|_1}{m} \ll m, \qquad (82.14)$$

т. е. лежащее в области перекрытия областей I и II (см. (82.1)).

Интегрирование и суммирование в (82.12) осуществляется подобно тому, как это было сделано в т. III, § 149 для нерелятивистского случая. Весь интервал интегрирования разделим еще на две части: а) от $|q^2|_{\min}$ до $|q^2|_0$ и б) от $|q^2|_0$ до $|q^2|_1$, где значение $|q^2|_0$ такое, что

$$\frac{IM}{|\mathbf{p}|} \ll \sqrt{|q^2|_0} \ll m\alpha \qquad (82.15)$$

(величина $m\alpha$ — порядка величины импульсов атомных электронов). В области а) можно разложить $e^{-i\mathbf{qr}} \approx 1 - i\mathbf{qr}$, и вклад этой

[1]) Безразлично какой: после подразумевающегося ниже суммирования по направлениям момента атома в конечном состоянии матричный элемент x_{n0} уже не зависит от направления оси x.

области в $\varkappa$ принимает вид

$$4\pi(ze^2)^2 \sum_n \int\limits_{|q^2|_{\min}}^{|q^2|_0} \left\{ \frac{1}{v^2}\omega_{n0} \left|x_{n0}\right|^2 \frac{1}{|q^2|} - \frac{M^2}{\mathbf{p}^2}\omega_{n0}^3 \left|x_{n0}\right|^2 \frac{1}{|q^2|^2} \right\} d|q^2| \approx$$

$$\approx \frac{4\pi(ze^2)^2}{v^2} \sum_n \omega_{n0} \left|x_{n0}\right|^2 \left[\ln \frac{|q^2|_0 \mathbf{p}^2}{M^2 \omega_{n0}^2} - v^2 \right].$$

(Интегрирование во втором члене можно распространить до бесконечности.)

Суммирование осуществляется с помощью формулы

$$\sum_n \omega_{n0} \left|x_{n0}\right|^2 = \frac{Z}{2m}, \tag{82.16}$$

где Z — число электронов в атоме (см. III, (149.10)). Результат представим в виде

$$\frac{2\pi(ze^2)^2 Z}{mv^2} \left[\ln \frac{|q^2|_0 \mathbf{p}^2}{M^2 I^2} - v^2 \right], \tag{82.17}$$

где I — некоторая средняя атомная энергия, определяемая формулой

$$\ln I = \frac{\sum_n \omega_{n0} \left|x_{n0}\right|^2 \ln \omega_{n0}}{\sum_n \omega_{n0} \left|x_{n0}\right|^2} = \frac{2m}{Z} \sum_n \omega_{n0} \left|x_{n0}\right|^2 \ln \omega_{n0}. \tag{82.18}$$

В области же б) имеем, согласно (82.11), $|q^2| \approx \mathbf{p}^2\vartheta^2$, т. е. $|q^2|$ не зависит от номера n конечного состояния атома; не зависят от n также и пределы интегрирования. Поэтому суммирование по n в (82.12) можно произвести под знаком интеграла. В первом члене оно осуществляется формулой

$$\sum_n \left|(e^{-i\mathbf{qr}})_{n0}\right|^2 \omega_{n0} = \frac{Z}{2m}|q^2| \tag{82.19}$$

(см. III, (149.5)), и интеграл от него равен [1])

$$\frac{2\pi Z(ze^2)^2}{mv^2} \ln \frac{|q^2|_1}{|q^2|_0}.$$

Интеграл же от второго члена в (82.12) по этой области дает пренебрежимый вклад в $\varkappa$.

[1]) Логарифмическая расходимость интеграла на верхнем пределе есть как раз та причина, по которой в первом члене в (82.12) нельзя было разлагать $e^{-i\mathbf{qr}}$ по степеням $\mathbf{q}$.

Складывая последнюю формулу с (82.17), находим вклад в $\varkappa$ от всей области малых передач импульса:

$$\frac{2\pi Z(ze^2)^2}{mv^2}\left[\ln\frac{|q^2|_1\mathbf{p}^2}{M^2I^2}-v^2\right]. \tag{82.20}$$

Большие передачи импульса. Обратимся к столкновениям с передачей импульса, большой по сравнению с импульсом атомных электронов ($\mathbf{q}^2 \gg mI$). В этой области можно, очевидно, пренебречь связью электронов в атоме, т. е. считать их свободными. Соответственно этому столкновение быстрой частицы с атомом будет представлять собой ее упругое рассеяние на каждом из Z атомных электронов. При этом ввиду большой скорости частицы атомные электроны можно считать первоначально покоящимися.

Обозначим через $m\Delta$ энергию, передаваемую быстрой частицей атомному электрону, и пусть $d\sigma_\Delta$ — сечение упругого рассеяния с такой передачей. Дифференциальное эффективное торможение на всем атоме будет тогда

$$d\varkappa = Zm\Delta d\sigma_\Delta. \tag{82.21}$$

Максимальная энергия, которая может быть передана покоящемуся электрону сталкивающейся с ним частицей массы $M \gg m$, равна

$$m\Delta_{\max} = \frac{2m\mathbf{p}^2}{m^2+M^2+2m\varepsilon} \approx \frac{2m\mathbf{p}^2}{M^2+2m\varepsilon},$$

где ε и $\mathbf{p}$ — энергия и импульс налетающей частицы (см. II, (13,13)). Будем предполагать далее, что энергия ε хотя и может быть ультрарелятивистской ($\varepsilon \gg M$), но в то же время

$$\varepsilon \ll \frac{M^2}{m}. \tag{82.22}$$

Тогда даже максимальная передаваемая энергия

$$m\Delta_{\max} \approx \frac{2m\mathbf{p}^2}{M^2} = 2mv^2\gamma^2, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{M} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{82.23}$$

остается еще малой по сравнению с первоначальной кинетической энергией падающей частицы ($m\Delta_{\max} \ll \varepsilon - M$). Соответственно и передача импульса $\mathbf{q}$ остается всегда малой по сравнению с первоначальным импульсом частицы $\mathbf{p}$. Это обстоятельство позволяет считать движение последней неменяющимся при столкновении, т. е. рассматривать падающую частицу как бесконечно тяжелую. Тогда сечение рассеяния получится просто преобразованием сечения рассеяния электрона на неподвижном центре (80.7) к лабораторной системе отсчета, в которой электрон

первоначально покоился. Это легко сделать, заметив, что в указанном приближении

$$-q^2 \approx \mathbf{q}^2 = 4\mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad do' = \frac{\pi d|q^2|}{\mathbf{p}^2},$$

а относительная скорость v в обеих системах — одна и та же. Формула (80.7) принимает вид

$$d\sigma = \frac{4\pi(ze^2)^2}{v^2}\left(1 - \frac{|q^2|}{4m^2\gamma^2}\right)\frac{d|q^2|}{|q^2|^2}.$$

Передача энергии Δ выражается через тот же инвариант q^2 согласно $-q^2 = 2m^2\Delta$. Поэтому имеем [1])

$$d\sigma_\Delta = \frac{2\pi(ze^2)^2}{m^2v^2}\left(1 - v^2\frac{\Delta}{\Delta_{\max}}\right)\frac{d\Delta}{\Delta^2}. \tag{82.24}$$

Вклад в эффективное торможение от рассматриваемой области передачи импульса получится интегрированием (82.21) в пределах от введенной выше границы $|q^2|_1$ до $|q^2|_{\max} = 2m^2\Delta_{\max}$. Он равен

$$\frac{2\pi(ze^2)^2 Z}{mv^2}\left(\ln\frac{2\Delta_{\max}m^2}{|q^2|_1} - v^2\right). \tag{82.25}$$

Наконец, сложив вклады (82.20) и (82.25), получим окончательно следующий результат для полных ионизационных потерь быстрой тяжелой частицы:

$$\varkappa = \frac{4\pi Z(ze^2)^2}{mv^2}\left(\ln\frac{2mv^2}{I(1 - v^2/c^2)} - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{82.26}$$

(в обычных единицах). В нерелятивистском случае отсюда получается прежняя формула (150.10) (см. III):

$$\varkappa = \frac{4\pi Z(ze^2)^2}{mv^2}\ln\frac{2mv^2}{I}, \tag{82.27}$$

а в ультрарелятивистском случае

$$\varkappa = \frac{4\pi Z(ze^2)^2}{mc^2}\left(\ln\frac{2mc^2}{I(1 - v^2/c^2)} - 1\right). \tag{82.28}$$

Торможение зависит только от скорости (но не от массы) быстрой частицы. Убывание торможения при увеличении скорости, согласно (82.27), сменяется в ультрарелятивистской области медленным (логарифмическим) возрастанием.

---

[1]) В этой формуле не учитываются, конечно, специфические эффекты сильных взаимодействий, если тяжелая частица является адроном. Эти эффекты (адронный формфактор), однако, становятся существенными лишь при $|q^2| \propto 1/M^2$, а при условии (82.22) такие передачи импульса исключены.

Задачи

1. Определить эффективное торможение релятивистского электрона.

Решение. Вклад области малых передач импульса по-прежнему дается выражением (82.20). Для области больших передач вместо (82.24) следует воспользоваться формулой (81.14), учитывающей обменные эффекты. Интегрируя $\Delta d\sigma_\Delta$ по $d\Delta$ от $|q^2|_1/2m^2$ до $(\gamma-1)/2$ и складывая с (82.20), находим

$$\varkappa = \frac{2\pi Ze^4}{mv^2}\left[\ln\frac{m^2(\gamma^2-1)(\gamma-1)c^4}{2I^2} - \left(\frac{2}{\gamma}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\ln 2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{(\gamma-1)^2}{8\gamma^2}\right], \quad (1)$$

$$\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2}.$$

В нерелятивистском случае получаем формулу из задачи к § 149 (см. III), а в ультрарелятивистском ($\gamma \gg 1$)

$$\varkappa = \frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{m^2c^4\gamma^3}{2I^2} + \frac{1}{8}\right). \quad (2)$$

2. То же для позитрона.

Решение. Для $d\sigma_\Delta$ в области больших передач следует воспользоваться (81.23), причем верхний предел по Δ равен $\gamma - 1$. Ответ в ультрарелятивистском случае:

$$\varkappa = \frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{2m^2c^4\gamma^3}{I^2} - \frac{23}{12}\right).$$

§ 83. Уравнение Брейта

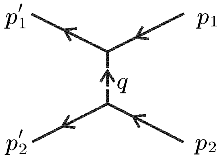
Как известно, в классической электродинамике система взаимодействующих частиц может быть описана с помощью функции Лагранжа, зависящей лишь от координат и скоростей самих частиц и правильной с точностью до членов $\sim 1/c^2$ (см. II, § 65). Это обстоятельство связано с тем, что излучение появляется лишь как эффект порядка $1/c^2$.

В квантовой теории этой ситуации соответствует возможность описания системы уравнением Шредингера, учитывающим члены второго порядка. Для электрона, движущегося во внешнем электромагнитном поле, такое уравнение было установлено в § 33. Теперь мы займемся выводом аналогичного уравнения, описывающего систему взаимодействующих частиц.

Будем исходить из релятивистского выражения для амплитуды рассеяния двух частиц. В нерелятивистском приближении она переходит в обычную борновскую амплитуду, пропорциональную компоненте Фурье потенциала электростатического взаимодействия двух зарядов. Вычислив же амплитуду с точностью до членов второго порядка, мы сможем установить вид соответствующего ей потенциала, учитывающего члены $\sim 1/c^2$.

Предположим сначала, что две частицы — различные, с массами m_1 и m_2 (скажем, электрон и мюон). Тогда рассеяние

изображается одной диаграммой



Ей соответствует амплитуда

$$M_{fi} = e^2(\overline{u}_1'\gamma^\mu u_1)D_{\mu\nu}(q)(\overline{u}_2'\gamma^\nu u_2), \quad q = p_1' - p_1 = p_2 - p_2' \tag{83.1}$$

(здесь предположено, что заряды частиц одного знака; в противном случае e^2 заменяется на $-e^2$).

Дальнейшие вычисления заметно упрощаются, если фотонный пропагатор $D_{\mu\nu}$ выбрать не в обычной, а в кулоновой калибровке (76.12),(76.13) [1]:

$$D_{00} = -\frac{4\pi}{\mathbf{q}^2}, \;\; D_{0i} = 0, \;\; D_{ik} = \frac{4\pi}{\mathbf{q}^2 - \omega^2/c^2 - i0}\left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{\mathbf{q}^2}\right). \tag{83.2}$$

Тогда амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = e^2\left\{\left(\overline{u}_1'\gamma^0 u_1\right)\left(\overline{u}_2'\gamma^0 u_2\right)D_{00} + \left(\overline{u}_1'\gamma^i u_1\right)\left(\overline{u}_2'\gamma^k u_2\right)D_{ik}\right\}. \tag{83.3}$$

В пренебрежении всеми членами, содержащими $1/c$, второй член в фигурных скобках выпадает вовсе, а первый дает

$$M_{fi} = -2m_1 \cdot 2m_2\left(w^{(0)\prime *}_1 w_1^{(0)}\right)\left(w^{(0)\prime *}_2 w_2^{(0)}\right)U(\mathbf{q}), \tag{83.4}$$

где

$$U(\mathbf{q}) = \frac{4\pi e^2}{\mathbf{q}^2}, \tag{83.5}$$

а через w_1^0, $w_2^0, \ldots$ обозначены введенные в § 23 спинорные (двухкомпонентные) амплитуды нерелятивистских плоских волн. Функция $U(\mathbf{q})$ представляет собой компоненту Фурье потенциальной энергии кулонового взаимодействия: $U(r) = e^2/r$.

В следующем (по $1/c$) приближении «шредингеровская» волновая функция свободной частицы $\varphi_{\text{шр}}$ (нормированная по интегралу $\int |\varphi_{\text{шр}}|^2 d^3x$) удовлетворяет уравнению

$$\widehat{H}^{(0)}\varphi_{\text{шр}} = (\varepsilon - mc^2)\varphi_{\text{шр}}, \;\; \widehat{H}^{(0)} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{\widehat{\mathbf{p}}^4}{8m^3c^2}, \;\; \widehat{\mathbf{p}} = -i\boldsymbol{\nabla}, \tag{83.6}$$

в котором учтен следующий член разложения релятивистского выражения для кинетической энергии. Амплитуду (спинорную)

[1]) В этом параграфе мы выписываем во всех промежуточных формулах множители c, а в окончательных формулах также и $\hbar$.

такой плоской волны обозначим через w (при $1/c \to 0$ она переходит в $w^{(0)}$). Именно через эти амплитуды и должна быть выражена искомая амплитуда рассеяния для того, чтобы по ее виду можно было определить «шредингеровский» потенциал взаимодействия частиц в рассматриваемом приближении.

В соответствии с формулой (33.11) биспинорная амплитуда свободной частицы u выражается через «шредингеровскую» амплитуду w — с требуемой здесь точностью — в виде

$$u = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \left(1 - \dfrac{\mathbf{p}^2}{8m^2c^2}\right) w \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{2mc} w \end{pmatrix}. \tag{83.7}$$

С помощью этой формулы находим

$$\overline{u}'_1\gamma^0 u_1 = u'^*_1 u_1 = 2m_1\left(1 - \frac{\mathbf{p}'^2_1 + \mathbf{p}_1^2}{8m_1^2c^2}\right) w'^*_1 w_1 + \\ + \frac{1}{2m_1c^2} w'^*_1 (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'_1)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}_1) w_1 = 2m_1 w'^*_1\left\{1 - \frac{\mathbf{q}^2}{8m_1^2c^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{q}\mathbf{p}_1]}{4m_1^2c^2}\right\} w_1,$$

$$\overline{u}'_1\boldsymbol{\gamma} u_1 = u'^*_1 \boldsymbol{\alpha} u_1 = \frac{1}{c} w'^*_1 \{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}_1) + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'_1)\boldsymbol{\sigma}\} w_1 = \\ = \frac{1}{c} w'^*_1 \{i[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{q}] + 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}\} w_1$$

(где $\mathbf{q} = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2$). Аналогичные выражения для $(\overline{u}'_2\gamma^0 u_2)$ и $(\overline{u}'_2\boldsymbol{\gamma} u_2)$ отличаются заменой индексов 1 на 2 и соответственно заменой q на $-q$.

Подставим эти выражения в (83.3). Поскольку произведение $(\overline{u}'_1\boldsymbol{\gamma} u_1)(\overline{u}'_2\boldsymbol{\gamma} u_2)$ уже содержит множитель $1/c^2$, то в D_{ik} можно пренебречь членом ω^2/c^2 в знаменателе. В результате получим амплитуду рассеяния в виде

$$M_{fi} = -2m_1 \cdot 2m_2 \big(w'^*_1 w'^*_2 U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) w_1 w_2\big), \tag{83.8}$$

где

$$U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) = 4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{\mathbf{q}^2} - \frac{1}{8m_1^2c^2} - \frac{1}{8m_2^2c^2} + \frac{(\mathbf{q}\mathbf{p}_1)(\mathbf{q}\mathbf{p}_2)}{m_1m_2c^2\mathbf{q}^4} - \frac{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}{m_1m_2c^2\mathbf{q}^2} + \right. \\ + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1[\mathbf{q}\mathbf{p}_1]}{4m_1^2c^2\mathbf{q}^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_1[\mathbf{q}\mathbf{p}_2]}{2m_1m_2c^2\mathbf{q}^2} - \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2[\mathbf{q}\mathbf{p}_2]}{4m_2^2c^2\mathbf{q}^2} + \frac{i\boldsymbol{\sigma}_2[\mathbf{q}\mathbf{p}_1]}{2m_1m_2c^2\mathbf{q}^2} + \\ \left. + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{q})}{4m_1m_2c^2\mathbf{q}^2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2}{4m_1m_2c^2} \right\} \tag{83.9}$$

(индексы 1, 2 у матриц Паули указывают, на чьи спинорные индексы они действуют: $\boldsymbol{\sigma}_1$ действует на w_1, а $\boldsymbol{\sigma}_2$ на w_2).

Функция $U(\mathbf{p}_1,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{q})$ есть оператор взаимодействия частиц в импульсном представлении. Он связан с оператором $\widehat{U}\big(\widehat{\mathbf{p}}_1,\, \widehat{\mathbf{p}}_2,\, \mathbf{r}\big)$ в координатном представлении формулой

$$\int e^{-i(\mathbf{p}_1'\mathbf{r}_1+\mathbf{p}_2'\mathbf{r}_2)}\widehat{U}\big(\widehat{\mathbf{p}}_1,\, \widehat{\mathbf{p}}_2,\, \mathbf{r}\big)e^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1+\mathbf{p}_2\mathbf{r}_2)}d^3x_1d^3x_2 = \\ = (2\pi)^3\delta\big(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_2'\big)U\big(\mathbf{p}_1,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{q}\big). \quad (83.10)$$

Если оператор $\widehat{U}$ представляет собой просто функцию $U(\mathbf{r})(\mathbf{r} = \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$, то $U(\mathbf{p}_1,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{q})$ не зависит от $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и формула (83.10) сводится к обычному определению компоненты Фурье:

$$\int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}U(\mathbf{r})d^3x = U(\mathbf{q}).$$

Отсюда ясно, что для нахождения $\widehat{U}(\widehat{\mathbf{p}}_1,\, \widehat{\mathbf{p}}_2,\, \mathbf{r})$ надо вычислить интеграл

$$\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}U(\mathbf{p}_1,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{q})\frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$

и затем заменить $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ операторами $\widehat{\mathbf{p}}_1 = -i\boldsymbol{\nabla}_1$, $\widehat{\mathbf{p}}_2 = -i\boldsymbol{\nabla}_2$, расположив их правее всех других множителей.

Нужные интегралы вычисляются дифференцированием формулы

$$\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\frac{4\pi}{\mathbf{q}^2}\frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r}. \quad (83.11)$$

Так, взятием градиента находим

$$\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\cdot\frac{4\pi\mathbf{q}}{\mathbf{q}^2}\frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -i\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{i\mathbf{r}}{r^3}. \quad (83.12)$$

Далее ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — постоянные векторы)

$$\int \frac{4\pi(\mathbf{a}\mathbf{q})(\mathbf{b}\mathbf{q})}{\mathbf{q}^4}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{i}{2}\left(\mathbf{a}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\left(\mathbf{b}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\right)\frac{1}{\mathbf{q}^2}\frac{d^3q}{(2\pi)^3};$$

получившийся интеграл после интегрирования по частям сводится к (83.12) и дает

$$\int \frac{4\pi(\mathbf{a}\mathbf{q})(\mathbf{b}\mathbf{q})}{\mathbf{q}^4}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}\boldsymbol{\nabla})\frac{\mathbf{b}\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{2r}\left[\mathbf{a}\mathbf{b} - \frac{(\mathbf{a}\mathbf{r})(\mathbf{b}\mathbf{r})}{r^2}\right]. \quad (83.13)$$

Наконец,

$$\int \frac{4\pi(\mathbf{a}\mathbf{q})(\mathbf{b}\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3} = -(\mathbf{a}\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{b}\boldsymbol{\nabla})\frac{1}{r}.$$

При раскрытии производных надо иметь в виду, что это выражение содержит в себе δ-функцию $\delta(\mathbf{r})$. Для ее выделения замечаем, что после усреднения по направлениям $\mathbf{r}$:

$$\overline{-(\mathbf{a}\boldsymbol{\nabla})(\mathbf{b}\boldsymbol{\nabla})\frac{1}{r}} = -\frac{1}{3}(\mathbf{ab})\Delta\frac{1}{r} = \frac{4\pi}{3}(\mathbf{ab})\delta(\mathbf{r}).$$

Раскрывая теперь производные обычным образом, находим

$$\int \frac{4\pi(\mathbf{aq})(\mathbf{bq})}{\mathbf{q}^2} e^{i\mathbf{qr}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} = \frac{1}{r^3}\left\{\mathbf{ab} - 3\frac{(\mathbf{ar})(\mathbf{br})}{r^2}\right\} + \frac{4\pi}{3}(\mathbf{ab})\delta(\mathbf{r}) \tag{83.14}$$

(при усреднении по направлениям $\mathbf{r}$ первый член обращается в нуль и остается лишь член с δ-функцией).

С помощью этих формул получим следующее окончательное выражение для оператора взаимодействия частиц:

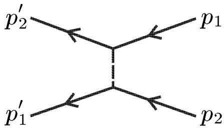
$$\begin{aligned}\widehat{U}\left(\widehat{\mathbf{p}}_1, \widehat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r}\right) = \frac{e^2}{r} - \frac{\pi e^2\hbar^2}{2c^2}\left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}\right)\delta(\mathbf{r}) - \\ - \frac{e^2}{2m_1m_2c^2r}\left[\widehat{\mathbf{p}}_1\widehat{\mathbf{p}}_2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}}_1)\widehat{\mathbf{p}}_2}{r^2}\right] - \frac{e^2\hbar}{4m_1^2c^2r^3}[\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}}_1]\boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{e^2\hbar}{4m_2^2c^2r^3}[\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}}_2]\boldsymbol{\sigma}_2 - \\ - \frac{e^2}{2m_1m_2c^2r^3}\{[\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}}_1]\boldsymbol{\sigma}_2 - [\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}}_2]\boldsymbol{\sigma}_1\} + \\ + \frac{e^2\hbar^2}{4m_1m_2c^2}\left\{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - 3\frac{(\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\delta(\mathbf{r})\right\}.\end{aligned} \tag{83.15}$$

Полный гамильтониан системы двух частиц в этом приближении

$$\widehat{H} = \widehat{H}_1^{(0)} + \widehat{H}_2^{(0)} + \widehat{U}, \tag{83.16}$$

где $\widehat{H}^{(0)}$ — гамильтонианы свободных частиц из (83.6).

Два электрона. Если обе частицы тождественны (два электрона), то в амплитуде рассеяния появляется второй член, изображающийся «обменной» диаграммой



Вычислять его вклад в оператор взаимодействия, однако, нет необходимости. Дело в том, что описание системы тождественных частиц уравнением Шредингера может осуществляться с помощью такого же оператора взаимодействия, как для нетождественных частиц, если условиться о должной симметризации

решений уравнения. В частности, при рассмотрении рассеяния частиц такая симметризация автоматически учтет вклады в амплитуду, соответствующие обеим фейнмановским диаграммам.

Таким образом, гамильтониан системы двух электронов получится из формул (83.15),(83.16), если просто положить в них $m_1 = m_2$ [1]:

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\left(\widehat{\mathbf{p}}_1^2 + \widehat{\mathbf{p}}_2^2\right) - \frac{1}{8m^3c^2}\left(\widehat{\mathbf{p}}_1^4 + \widehat{\mathbf{p}}_2^4\right) + \widehat{U}\left(\widehat{\mathbf{p}}_1,\, \widehat{\mathbf{p}}_2,\, \mathbf{r}\right),$$

$$\widehat{U}\left(\widehat{\mathbf{p}}_1,\, \widehat{\mathbf{p}}_2,\, \mathbf{r}\right) = \frac{e^2}{r} - \pi\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2\delta(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{2m^2c^2r}\left(\widehat{\mathbf{p}}_1\widehat{\mathbf{p}}_2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}}_1)\widehat{\mathbf{p}}_2}{r^2}\right) + \\ + \frac{e^2\hbar}{4m^2c^2r^3}\{-(\boldsymbol{\sigma}_1 + 2\boldsymbol{\sigma}_2)[\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}}_1] + (\boldsymbol{\sigma}_2 + 2\boldsymbol{\sigma}_1)[\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}}_2]\} + \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2\left\{\frac{\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{\sigma}_1\mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2\mathbf{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\delta(\mathbf{r})\right\}. \quad (83.17)$$

Заметим, что присутствие членов с $\delta(\mathbf{r})$ не означает, конечно, наличия особо сильного взаимодействия. Интегральная величина всех поправочных членов одинакова, и по смыслу произведенного разложения все они должны рассматриваться как малые по сравнению с первым членом — кулоновым взаимодействием.

Различные группы членов в операторе взаимодействия (83.17) имеют различный характер. Члены первой строки в $\widehat{U}$ имеют чисто орбитальное происхождение. Во второй строке стоят члены, линейные по операторам спина частиц; они отвечают спин-орбитальному взаимодействию. Наконец, квадратичные по спиновым операторам члены третьей строки описывают спин-спиновое взаимодействие [2].

Электрон и позитрон. Система из электрона и позитрона требует особого рассмотрения. Амплитуда рассеяния в этом случае складывается из двух членов:

$$M_{fi} = -e^2[\overline{u}(p'_-)\gamma^\mu u(p_-)]D_{\mu\nu}(p_- - p'_-)[\overline{u}(-p_+)\gamma^\nu u(-p'_+)] + \\ + e^2[\overline{u}(-p_+)\gamma^\mu u(p_-)]D_{\mu\nu}(p_- + p_+)[\overline{u}(p'_-)\gamma^\nu u(-p'_+)] \quad (83.18)$$

(первый отвечает рассеивательной, а второй — аннигиляционной диаграмме). Поскольку волновая функция системы «электрон +

---

[1]) Волновое уравнение с гамильтонианом (83.17) было впервые установлено *Брейтом* (*G. Breit,* 1929), а его последовательный квантовомеханический вывод дан *Л. Д. Ландау* (1932).

[2]) Это взаимодействие упоминалось в т. III, § 72 в связи с тонкой структурой атомных уровней, а спин-спиновое взаимодействие электронов с ядром рассматривалось в т. III, § 121 в связи со сверхтонкой структурой уровней. В частности, формула (121.9) (см. III) соответствует δ-функционному члену в операторе спин-спинового взаимодействия.

позитрон» не должна быть антисимметричной, оба члена дают независимые вклады в оператор взаимодействия.

Первый член (структура которого совпадает со структурой амплитуды (83.1)) приводит, естественно, к оператору, отличающемуся от (83.17) лишь общим знаком. Займемся преобразованием второго члена.

Воспользуемся здесь фотонным пропагатором в обычной калибровке:

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2} g_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{\omega^2/c^2 - k^2} g_{\mu\nu}.$$

В данном случае $k = p_+ + p_-$, и поскольку частицы «почти нерелятивистские», то

$$\frac{\omega^2}{c^2} \equiv \frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{c^2} \approx 4m^2c^2 \gg (\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-)^2 \equiv \mathbf{k}^2. \tag{83.19}$$

Поэтому для фотонного пропагатора достаточно написать

$$D_{\mu\nu} \approx \frac{\pi}{m^2c^2} g_{\mu\nu}.$$

Здесь уже содержится множитель l/c^2. Поэтому амплитуды $u(p)$ достаточно брать в нулевом приближении:

$$u(p_-) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} w_-^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u(-p_+) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ w^{(0)} \end{pmatrix},$$

где $w_-^{(0)}$, $w^{(0)}$ фигурирующие в (23.12) 3-спиноры (ниже индексы (0) у них опустим). С этими амплитудами

$$\overline{u}(-p_+)\gamma^0 u(p_-) = u^*(-p_+)u(p_-) = 0,$$
$$\overline{u}(-p_+)\boldsymbol{\gamma} u(p_-) = u^*(-p_+)\boldsymbol{\alpha} u(p_-) = 2m(w^*\boldsymbol{\sigma} w_-).$$

После подстановки этих выражений «аннигиляционная» часть амплитуды рассеяния принимает вид

$$M_{fi}^{(\text{анн})} = -e^2 \frac{\pi}{m^2c^2}(2m)^2 (w^*\boldsymbol{\sigma} w_-)(w'^*_-\boldsymbol{\sigma} w'). \tag{83.20}$$

Отсюда, однако, еще нельзя прямо сделать заключений о виде оператора взаимодействия. Во-первых, спиноры w, через которые выражаются амплитуды $u(-p_+)$, еще не являются в буквальном смысле позитронными. Позитронные амплитуды получаются из $u(-p_+)$ преобразованием зарядового сопряжения; согласно (26.6) соответствующие им спиноры (обозначим их через w_+) связаны с w соотношением $w_+ = \sigma_y w^*$, откуда

$$w^* = \sigma_y w_+ = -w_+\sigma_y, \quad w = -\sigma_y w_+^*. \tag{83.21}$$

Во-первых, амплитуда рассеяния должна быть приведена к виду, в котором сворачиваются друг с другом электронные (w_- и w'_-) и позитронные (w_+ и w'_+) спиноры. Эта цель достигается с помощью формулы

$$(w^*\boldsymbol{\sigma} w_-)(w'^*_-\boldsymbol{\sigma} w') = \frac{3}{2}(w'^*_- w_-)(w^* w') - \frac{1}{2}(w'^*_-\boldsymbol{\sigma} w_-)(w^*\boldsymbol{\sigma} w'), \tag{83.22}$$

которая сама следует из (28.16).

Наконец, выразив w и w' через w_+ и w'_+, согласно (83.21), найдем, как легко проверить,

$$(w^* w') = (w'^*_+ w_+), \quad (w^*\boldsymbol{\sigma} w') = -(w'^*_+\boldsymbol{\sigma} w_+). \tag{83.23}$$

Подставив (83.23) в (83.22) и затем в (83.20), получим окончательное выражение для аннигиляциоиной части амплитуды рассеяния

$$M_{fi}^{(\text{анн})} = -4m^2 \left\{ w'^*_- w'^*_+ \left[\frac{\pi e^2}{2m^2c^2}(3 + \boldsymbol{\sigma}_+\boldsymbol{\sigma}_-) \right] w_- w_+ \right\}$$

(матрицы $\boldsymbol{\sigma}_-$ и $\boldsymbol{\sigma}_+$ действуют соответственно на w_- и w_+). Выражение в квадратных скобках представляет собой оператор взаимодействия в импульсном представлении. Соответствующий координатный оператор

$$\widehat{U}^{(\text{анн})}(\mathbf{r}) = \frac{\pi\hbar^2 e^2}{2m^2c^2}(3 + \boldsymbol{\sigma}_+\boldsymbol{\sigma}_-)\delta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+ \tag{83.24}$$

(*Pirenne,* 1947; *В. Б. Берестецкий* и *Л. Д. Ландау,* 1949). Полный оператор взаимодействия электрона и позитрона есть

$$-\widehat{U} + \widehat{U}^{(\text{анн})}$$

с $\widehat{U}$ из (83.17).

§ 84. Позитроний

Полученные в предыдущем параграфе формулы можно применить к позитронию — водородоподобной системе из электрона и позитрона.

В системе центра инерции операторы импульсов электрона и позитрона в позитронии: $\widehat{\mathbf{p}}_- = -\widehat{\mathbf{p}}_+ \equiv \widehat{\mathbf{p}}$, где $\widehat{\mathbf{p}} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ — оператор импульса относительного движения, соответствующий относительному радиус-вектору $\mathbf{r} = \mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+$. Полный гамильто-

ниан позитрония [1])

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{m} - \frac{e^2}{r} + \widehat{V}_1 + \widehat{V}_2 + \widehat{V}_3,$$

$$\widehat{V}_1 = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^4}{4m^3c^2} + 4\pi\mu_0^2\delta(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{2m^2c^2r}\left\{\widehat{\mathbf{p}}^2 + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}})\widehat{\mathbf{p}}}{r^2}\right\},$$

$$\widehat{V}_2 = 6\mu_0^2\frac{1}{r^3}\widehat{\mathbf{l}}\widehat{\mathbf{S}}, \qquad (84.1)$$

$$\widehat{V}_3 = 6\mu_0^2\frac{1}{r^3}\left\{\frac{(\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{r})(\widehat{\mathbf{S}}\mathbf{r})}{r^2} - \frac{1}{3}\widehat{\mathbf{S}}^2\right\} + 4\pi\mu_0^2\left(\frac{7}{3}\widehat{\mathbf{S}}^2 - 2\right)\delta(\mathbf{r}).$$

Здесь $\mu_0 = e\hbar/(2mc)$ — магнетон Бора, $\hbar\widehat{l} = [\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}}]$ — оператор орбитального момента, $\widehat{\mathbf{S}} = (\boldsymbol{\sigma}_+ + \boldsymbol{\sigma}_-)/2$ — оператор полного спина системы (его квадрат $\widehat{\mathbf{S}}^2 = {}^1\!/_2(3 + \boldsymbol{\sigma}_+\boldsymbol{\sigma}_-)$). В $\widehat{V}_1$ включены все поправочные члены чисто орбитального характера; $\widehat{V}_2$ — спин-орбитальное взаимодействие; $\widehat{V}_3$ включает в себя спин-спиновое и «аннигиляционное» взаимодействия.

«Невозмущенный» гамильтониан

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{m} - \frac{e^2}{r}$$

отличается, естественно, от гамильтониана атома водорода лишь заменой массы электрона приведенной массой $m/2$. Уровни энергии позитрония поэтому вдвое меньше (по абсолютной величине) уровней атома водорода:

$$E = -\frac{me^4}{4\hbar^2n^2} \qquad (84.2)$$

(n — главное квантовое число).

Остальные члены в (84.1) приводят к расщеплению уровней (84.2) — появлению тонкой структуры. Возникающие уровни классифицируются прежде всего по значениям полного момента j. Мы видим также, что операторы спинов частиц входят в гамильтониан (84.1) только в виде суммы $\widehat{\mathbf{S}}$. Это значит, что гамильтониан коммутативен с оператором квадрата полного спина $\widehat{\mathbf{S}}^2$, т. е. полный спин продолжает сохраняться и в рассматриваемом (втором по $1/c$) приближении. Поэтому уровни энергии позитрония можно классифицировать также и по полному спину, принимающему значения $S = 0$ и $S = 1$. Уровни со спином 0 называют уровнями *парапозитрония*, а уровни со спином 1 — уровнями *ортопозитрония*.

Следует подчеркнуть, что сохранение полного спина в позитронии является в действительности точным законом, не связанным с тем или иным приближением по $1/c$; он следует из

[1]) В обычных единицах.

CP-инвариантности электромагнитных взаимодействий. Позитроний представляет собой истинно нейтральную систему, а потому его состояния характеризуются определенными зарядовой и комбинированной четностями. Последняя равна $(-1)^{S+1}$ (см. задачу к § 27); поскольку S может иметь лишь два значения, 0 и 1, то сохранение комбинированной четности эквивалентно сохранению полного спина.

При $S = 0$ полный момент j совпадает с орбитальным. При спине же $S = 1$ и заданном j число l пробегает значения j, $j \pm 1$, соответственно чему каждый уровень (n, j) ортопозитрония расщепляется, вообще говоря, на три уровня. Поскольку значениям $l = j$ и $l = j \pm 1$ отвечают различные четности, гамильтониан не имеет матричных элементов, связывающих эти состояния. Однако оператор возмущения (первый член в $\widehat{V}_3$), вообще говоря, имеет недиагональные элементы, связывающие состояния с $l = j + 1$ и $l = j - 1$, при этом число l теряет, разумеется, строгий смысл орбитального момента.

Специфическими свойствами обладает эффект Зеемана в позитронии (*В. Б. Берестецкий, И. Я. Померанчук,* 1949).

Орбитальный магнитный момент позитрония равен всегда нулю: поскольку в позитронии $[\mathbf{r}_+\mathbf{p}_+] = [\mathbf{r}_-\mathbf{p}_-]$, оператор

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_l = \mu_0([\mathbf{r}_+\widehat{\mathbf{p}}_+] - [\mathbf{r}_-\widehat{\mathbf{p}}_-]) = 0.$$

Оператор же спинового магнитного момента

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_s = \mu_0(\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-) \tag{84.3}$$

не пропорционален оператору полного спина $\widehat{\mathbf{S}} = {}^1\!/_2(\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-)$, а операторы $\widehat{\mathbf{S}}^2$ и $\widehat{\mu}^2$ не коммутативны. Поэтому состояния с определенными значениями полного спина S и его проекции S_z не являются, вообще говоря, собственными состояниями для магнитного момента.

Состояния с заданными S и S_z описываются спиновыми функциями χ_{SS_z}, имеющими вид

$$\begin{aligned}
&\chi_{11} = \alpha_+\alpha_-, \quad \chi_{1-1} = \beta_+\beta_-,\\
&\chi_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_+\beta_- + \alpha_-\beta_+),\\
&\chi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_+\beta_- - \alpha_-\beta_+),
\end{aligned} \tag{84.4}$$

где α и β — спиновые функции одной частицы, соответствующие проекциям спина $+{}^1\!/_2$ и $-{}^1\!/_2$ (индексы «+» или «−» указывают, что функция относится к позитрону или электрону). Из них первые две (χ_{11} и χ_{1-1}) — одновременно и собственные функции оператора μ_z, отвечающие собственному значению $\mu_z = 0$. Функ-

ции же χ_{10} и χ_{00} не являются собственными функциями μ_z; таковыми являются комбинации

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{10}+\chi_{00}) = \alpha_+\beta_-, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{10}-\chi_{00}) = \alpha_-\beta_+. \tag{84.5}$$

Легко видеть, что единственными отличными от нуля элементами матрицы $\langle S'S'_z|\mu_z|SS_z\rangle$, вычисленными по функциям (84.4), являются элементы

$$\langle 00|\mu_z|10\rangle = \langle 10|\mu_z|00\rangle = 2\mu_0. \tag{84.6}$$

В слабых магнитных полях (когда $\mu_0 H \ll \Delta$, где Δ — разность между энергиями уровней с $S = 0$ и $S = l$) исходным приближением для вычисления зеемановского расщепления являются состояния с определенными значениями полного спина. В первом приближении это расщепление дается средним значением оператора энергии возмущения

$$\widehat{V}_H = -\widehat{\mu}_z H.$$

Но все диагональные матричные элементы оператора $\widehat{\mu}_z$ (а тем самым и $\widehat{V}_H$), вычисленные по функциям (84.4), равны нулю. Таким образом, в слабых полях линейный эффект Зеемана в позитронии отсутствует.

В предельном случае сильных полей ($\mu_0 H \gg \Delta$) можно пренебречь взаимодействием спинов, приводящим к установлению определенных значений S. Компоненты расщепленного уровня будут в этом случае соответствовать состояниям с определенными значениями $\mu_z = \pm 2\mu_0$ (описываемым функциями (84.5)), а величина их сдвига будет составлять $\pm 2\mu_0 H$.

Задачи

1. Определить тонкую структуру уровней парапозитрония (*В. Б. Берестецкий*, 1949) [1]).

Решение. Искомая энергия расщепления уровня дается средними значениями поправочных членов в гамильтониане (84.1), вычисленными по волновым функциям невозмущенных состояний с различными значениями $j = l$ (равными $0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$). При $S = 0$ отличный от нуля вклад возникает только от $\widehat{V}_1$ и второго члена в $\widehat{V}_3$.

Невозмущенные волновые функции (обозначим их через ψ) удовлетворяют уравнению Шредингера [2])

$$\widehat{\mathbf{p}}^2\psi = -\Delta\psi = \left(E + \frac{1}{r}\right)\psi, \quad E = -\frac{1}{4n^2}.$$

[1]) Вычисление тонкой структуры ортопозитрония см. *Соколов А. А., Цытович В. Н.*//ЖЭТФ. — 1953. — Т. 24. — С. 253.

[2]) При вычислении удобно пользоваться атомными единицами.

Поэтому

$$\widehat{\mathbf{p}}^4\psi = \widehat{\mathbf{p}}^2\left(E+\frac{1}{r}\right)\psi = \left(E+\frac{1}{r}\right)^2\psi - \psi\Delta\frac{1}{r} - 2\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}\right)(\boldsymbol{\nabla}\psi) =$$

$$= \left(E+\frac{1}{r}\right)^2\psi + 4\pi\delta(\mathbf{r})\psi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Среднее значение

$$\overline{\mathbf{p}^4} = \overline{\left(E+\frac{1}{r}\right)^2} + 4\pi|\psi(0)|^2 + \int\int_0^\infty \frac{\partial|\psi|^2}{\partial r}dr\,do.$$

Последний интеграл равен $-\int|\psi(0)|^2 do$; поскольку $\psi(0)\neq 0$ только при $l = 0$, а волновые функции S-состояний сферически-симметричны, интеграл равен $-4\pi|\psi(0)|^2$ и сокращается со вторым членом.

Введя оператор орбитального момента $\widehat{\mathbf{l}} = [\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}}]$, запишем

$$-\widehat{\mathbf{p}}^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\widehat{\mathbf{l}}^2\psi}{r^2} = -\left(E+\frac{1}{r}\right)\psi.$$

Отсюда получаем для другого нужного нам среднего значения

$$\int\psi^*\frac{\mathbf{r}}{r^3}(\mathbf{r}\widehat{\mathbf{p}})\widehat{\mathbf{p}}\psi d^3x = -\int\psi^*\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}d^3x =$$

$$= \overline{\frac{1}{r}\left(E+\frac{1}{r}\right)} - 4\pi|\psi(0)|^2 - l(l+1)\overline{r^{-3}}$$

(при $l = 0$ последний член отсутствует).

Согласно известным формулам теории атома водорода (см. III, (36.14), (36.16)) с учетом замены массы электрона m на $m/2$ имеем

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{8\pi n^3}\delta_{l0},$$

$$\overline{r^{-1}} = \frac{1}{2n^2}, \quad \overline{r^{-2}} = \frac{1}{2n^3(2l+1)}, \quad \overline{r^{-3}} = \frac{1}{4n^3l(l+1)(2l+1)} \quad (l\neq 0).$$

С помощью написанных формул получим для искомых уровней энергии парапозитрония

$$E_{nl} = -\frac{1}{4n^2} - \alpha^2\frac{me^4}{\hbar^2}\frac{1}{2n^3}\left(\frac{1}{2l+1} - \frac{11}{32n}\right).$$

2. Определить разность энергий основных состояний ($n = 1$, $l = 0$) орто- и парапозитрония.

Р е ш е н и е. Зависимость энергии от полного спина S при $l = 0$ содержится лишь в среднем значении второго члена в $\widehat{V}_3$ (первый же член обращается в нуль при усреднении по углам в сферически-симметричном S-состоянии [1])). Основной уровень ортопозитрония ($^3S_1$) лежит выше основного уровня парапозитрония ($^1S_0$) на величину

$$E(^3S_1) - E(^1S_0) = \frac{7}{12}\alpha^2\frac{me^4}{\hbar^2} = 8,2\cdot 10^{-4}\text{эВ}.$$

---

[1]) Усреднение по углам должно производиться до интегрирования по r, как это видно из способа вычисления интеграла (83.14), приводящего к первому члену в $\widehat{V}_3$.

§ 85. Взаимодействие атомов на далеких расстояниях

Между двумя нейтральными атомами, находящимися на больших (по сравнению с их собственными размерами) расстояниях r, действуют силы притяжения. Обычное квантовомеханическое вычисление этих сил (см. III, § 89) становится, однако, неприменимым на слишком больших расстояниях. Дело в том, что в этом вычислении рассматривается лишь электростатическое взаимодействие, т. е. не учитываются эффекты запаздывания. Такое рассмотрение справедливо лишь до тех пор, пока расстояние r остается малым по сравнению с характерными длинами волн λ_0 в спектрах взаимодействующих атомов. В этом параграфе будет произведено вычисление, свободное от такого ограничения.

Поступим примерно так же, как в § 83, т. е. будем вычислять в первом не исчезающем приближении амплитуду упругого (без изменения внутреннего состояния) рассеяния двух различных атомов. Полученное выражение сравним с амплитудой, которая получилась бы при описании взаимодействия атомов потенциальной энергией $U(r)$.

В последнем случае первым не исчезающим элементом S-матрицы, описывающим данный процесс, был бы элемент первого приближения

$$S_{fi} = -i \int \psi'^*_1(\mathbf{r}_1)\psi'^*_2(\mathbf{r}_2)U(r)\psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2)d^3x_1 d^3x_2 \times \\ \times \int \exp\{-i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2)t\}dt. \quad (85.1)$$

Здесь $\psi_1,\ \psi_2$ и $\psi'_1,\ \psi'_2$ — не зависящие от времени части волновых функций (плоских волн), описывающих поступательное движение двух атомов с начальным и конечными импульсами; $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ и $\varepsilon'_1,\ \varepsilon'_2$ — кинетические энергии этого движения; координаты $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ атомов как целого можно понимать как координаты их ядер, а расстояние $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Временной интеграл в (85.1) дает, как обычно, δ-функцию, выражающую собой закон сохранения энергии. Для дальнейшего сравнения будет, однако, удобно формально рассматривать предельный случай бесконечно больших масс атомов; при заданных их импульсах этому пределу отвечают равные нулю энергии ε. Иначе можно сказать, что рассматриваются времена, малые по сравнению с периодами $1/\varepsilon$. Тогда (85.1) примет вид

$$S_{fi} = -it \int \psi'^*_1\psi'^*_2 U(r)\psi_1\psi_2 d^3x_1 d^3x_2, \quad (85.2)$$

где t — интервал интегрирования по времени.

Фактическое вычисление амплитуды упругого рассеяния можно при сделанных предположениях разбить на два этапа. Сначала усредняем S-оператор по волновым функциям неизменных (основных) состояний обоих атомов (при заданных координатах их ядер $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$), а также по фотонному вакууму — в начале и в конце процесса фотоны отсутствуют. В результате получим величину, являющуюся функцией от расстояния между ядрами; обозначим ее через $\langle S(r)\rangle$ [1]. Чтобы найти искомый матричный элемент перехода, надо вычислить затем интеграл

$$S_{fi} = \int \psi'^*_1 \psi'^*_2 \langle S(r)\rangle \psi_1 \psi_2 d^3x_1 d^3x_2. \tag{85.3}$$

Сравнив с (85.2), мы увидим, что если получить выражение для $\langle S(r)\rangle$ в виде

$$\langle S(r)\rangle = -itU(r),$$

то $U(r)$ и будет искомой энергией взаимодействия атомов.

Поскольку мы имеем дело в данном случае со столкновением не элементарных частиц, а сложных систем (атомов, которые в промежуточных состояниях могут быть возбуждены), обычные формальные правила диаграммной техники здесь непосредственно неприменимы, и мы начнем с исходного выражения для S-оператора в виде разложения (72.10).

Для взаимодействия атомов существенны компоненты полей с частотами порядка атомных (и меньшими). Соответствующие длины волн велики по сравнению с атомными размерами. Поэтому оператор электромагнитного взаимодействия может быть взят в виде

$$\widehat{V} = -\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1)\widehat{\mathbf{d}}_1 - \widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_2)\widehat{\mathbf{d}}_2, \tag{85.4}$$

где $\widehat{\mathbf{d}}_1$, $\widehat{\mathbf{d}}_2$ — операторы дипольных моментов атомов (имеются в виду зависящие от времени — гейзенберговские — операторы), а $\widehat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ — оператор электрического поля, который берется в точках нахождения соответствующих атомов.

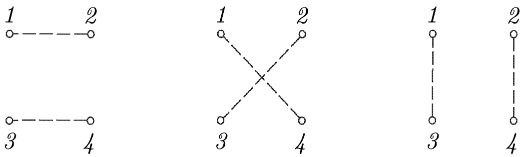
Как известно, средние значения дипольного момента атома в его стационарных состояниях равны нулю (см. III, § 75). Отсюда следует, что отличная от нуля амплитуда рассеяния появится только в четвертом приближении теории возмущений, т. е. как матричный элемент оператора

$$\widehat{S}^{(4)} = \frac{(-i)^4}{4!} \int dt_1 \ldots \int dt_4 \cdot \mathrm{T}\{\widehat{V}(t_1)\widehat{V}(t_2)\widehat{V}(t_3)\widehat{V}(t_4)\}. \tag{85.5}$$

[1]) Вместо более громоздкого обозначения диагонального матричного элемента — с указанием состояний атома и фотонного поля.

Действительно, в более низких порядках каждый член в произведениях операторов $\widehat{V}$ будет содержать хотя бы один из операторов $\widehat{\mathbf{d}}_1$ или $\widehat{\mathbf{d}}_2$ в первой степени и при усреднении по состоянию соответствующего атома обратится в нуль.

Усредним оператор (85.5) по фотонному вакууму. По теореме Вика среднее от произведения четырех операторов поля $\widehat{\mathbf{E}}$ сводится к сумме произведений их попарных средних (сверток). Разбиение на пары может быть произведено тремя способами, которые можно изобразить диаграммами:



(85.6)

где штриховые линии изображают свертки, а цифрам отвечают аргументы t_1, t_2, t_3, t_4. Кроме того, каждой точке могут отвечать пространственные координаты $\mathbf{r}_1$ или $\mathbf{r}_2$ (причем двум точкам $\mathbf{r}_1$ и двум $\mathbf{r}_2$; в противном случае в данном члене суммы один из операторов $\widehat{\mathbf{d}}_1$ или $\widehat{\mathbf{d}}_2$ войдет в первой степени и обратится в нуль при усреднении по состоянию атома). Очевидно, что в точках, соединенных линиями, должны стоять различные $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. В противном случае диаграмма (т. е. соответствующий ей член в матричном элементе) сведется к произведению независимых функций от $\mathbf{r}_1$ и от $\mathbf{r}_2$, вместо того чтобы быть функцией от разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$; такие члены не имеют отношения к рассеянию [1]). В соответствии с этими условиями можно расставить аргументы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ по четырем точкам диаграммы четырьмя способами. Учитывая также коммутативность операторов $\widehat{\mathbf{d}}_1$ и $\widehat{\mathbf{d}}_2$ и усредняя по состояниям каждого из атомов, находим, что все получающиеся таким образом $3 \cdot 4 = 12$ членов одинаковы (они различаются лишь обозначением переменных интегрирования). В результате получим

$$\langle S(r)\rangle = \frac{1}{2}\int dt_1 \ldots \int dt_4 \cdot \langle \mathrm{T}(E_i(\mathbf{r}_1,\, t_1)E_k(\mathbf{r}_2,\, t_2))\rangle \times$$
$$\times \langle \mathrm{T}(E_l(\mathbf{r}_2,\, t_3)E_m(\mathbf{r}_1,\, t_4))\rangle\langle \mathrm{T}(d_{1i}(t_1)d_{1m}(t_4))\rangle\langle \mathrm{T}(d_{2k}(t_2)d_{2l}(t_3))\rangle, \tag{85.7}$$

где i, $k, \ldots$ — трехмерные векторные индексы.

---

[1]) Они дают не интересующие нас здесь поправки к собственным энергиям каждого из атомов.

Для вычисления величин

$$D_{ik}^{E}(x_1 - x_2) = \langle \mathrm{T}(E_i(x_1)E_k(x_2))\rangle \tag{85.8}$$

воспользуемся калибровкой потенциалов, в которой скалярный потенциал $\Phi = 0$. Тогда $\widehat{\mathbf{E}} = -\partial\widehat{\mathbf{A}}/dt$, и мы имеем

$$D_{ik}^{E}(x_1 - x_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\langle \mathrm{T}(A_i(x_1)A_k(x_2))\rangle = i\frac{\partial^2}{\partial t^2}D_{ik}(x),$$

где $x = x_1 - x_2$, а $D_{ik}(x)$ — фотонный пропагатор в данной калибровке [1]).

Ниже нам будет удобнее пользоваться пропагатором $D_{ik}(\omega, \mathbf{r})$ в смешанном $\omega, \mathbf{r}$-представлении, который связан с $D_{ik}(t, \mathbf{r})$ соотношением

$$D_{ik}(t, \mathbf{r}) = \int D_{ik}(\omega, \mathbf{r})e^{-iwt}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

При этом

$$D_{ik}^{E}(t, \mathbf{r}) = -i\int \omega^2 D_{ik}(\omega, \mathbf{r})e^{-iwt}\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{85.9}$$

Величины

$$\alpha_{ik}(t_1 - t_2) = i\langle \mathrm{T}(d_i(t_1)d_k(t_2))\rangle \tag{85.10}$$

разлагаем в интеграл Фурье

$$\alpha_{ik}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\alpha_{ik}(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Положив для удобства $t_2 = 0$, $t_1 = t$, запишем по определению T-произведения

$$\alpha_{ik}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iwt}\alpha_{ik}(t)dt =$$

$$= i\int\limits_{-\infty}^{0} e^{iwt}\langle d_k(0)d_i(t)\rangle dt + i\int\limits_{0}^{\infty} e^{iwt}\langle d_i(t)d_k(0)\rangle dt. \tag{85.11}$$

[1]) Первая производная $\dfrac{\partial}{\partial t}D_{ik}(t)$ имеет конечный скачок при $t = 0$. Поэтому вторая производная, т. е. функция $D_{ik}^{E}(t)$, содержит также δ-функционный член ($\sim \delta^{(4)}(x_2 - x_1)$). Этот член, однако, равен нулю при всех $\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$ и нас здесь не интересует.

Входящие сюда средние (по основному состоянию атома) значения выражаются через матричные элементы дипольного момента:

$$\langle d_k(0)d_i(t)\rangle = \sum_n (d_k)_{0n}(d_i)_{n0}e^{i\omega_{n0}t},$$

$$\langle d_i(t)d_k(o)\rangle = \sum_n (d_i)_{0n}(d_k)_{n0}e^{-i\omega_{n0}t}.$$

Для сходимости интегралов в (85.11) в первом из них надо понимать ω как $\omega - i0$, а во втором — как $\omega + i0$. Произведя интегрирование, получим

$$\alpha_{ik}(\omega) = \sum_n \left\{ \frac{(d_i)_{0n}(d_k)_{n0}}{\omega_{n0} - \omega - i0} + \frac{(d_k)_{0n}(d_i)_{n0}}{\omega_{n0} + \omega - i0} \right\}. \tag{85.12}$$

Если основное состояние является S-состоянием, то этот тензор сводится к скаляру: $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$, где

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{3}\sum_n |\mathbf{d}_{0n}|^2 \left(\frac{1}{\omega_{n0} - \omega - i0} + \frac{1}{\omega_{n0} + \omega - i0} \right). \tag{85.13}$$

Если же атом обладает моментом, то тот же результат получится после усреднения по его направлениям, что и будет подразумеваться (нас интересует, конечно, взаимодействие атомов, усредненное по их взаимным ориентациям).

Сравнив (85.12) с выражением (59.17), мы увидим, что $\alpha_{ik}(\omega)$ совпадает с тензором когерентного рассеяния фотона частоты ω на атоме. Согласно (59.23) $\alpha(\omega)$ при $\omega > 0$ совпадет с поляризуемостью атома. Значения же $\alpha(\omega)$ при $\omega < 0$ выражаются через значения при $\omega > 0$ с помощью очевидного из (85.13) соотношения $\alpha(-\omega) = \alpha(\omega)$.

Подставив полученные выражения в (85.7), найдем

$$\langle S(r)\rangle = \frac{1}{2}\int dt_1 \ldots dt_4 \frac{d\Omega_1}{2\pi}\frac{d\Omega_2}{2\pi}\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi} \times$$
$$\times\, \alpha_1(\Omega_1)\alpha_2(\Omega_2)\omega_1^2 D_{ik}(\omega_1,\, \mathbf{r})\omega_2^2 D_{ik}(\omega_2,\, \mathbf{r}) \times$$
$$\times \exp\{-i\omega_1(t_1 - t_2) - i\omega_2(t_3 - t_4) - i\Omega_1(t_1 - t_4) - i\Omega_2(t_2 - t_3)\}$$

($\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$; мы учли также четность функции $D_{ik}(\omega,\, \mathbf{r})$ по $\mathbf{r}$). Интегрирование по трем временам дает δ-функции (в силу которых $-\Omega_1 = \Omega_2 = \omega_2 = \omega_1$), а по четвертому — множитель t:

$$\langle S(r)\rangle = -itU(r),$$

где

$$U(r) = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^4\alpha_1(\omega)\alpha_2(\omega)[D_{ik}(\omega,\, \mathbf{r})]^2\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{85.14}$$

Эта формула и определяет энергию взаимодействия двух атомов на любых расстояниях, больших по сравнению с атомными размерами a. Остается найти и подставить сюда явное выражение для функции $D_{ik}(\omega,\,\mathbf{r})$.

Сравнив друг с другом выражения (76.14) и (76.8), найдем, что

$$D_{ik}(\omega,\,\mathbf{k}) = \left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{\omega^2}\right) D(\omega,\,\mathbf{k}),$$

где D дается формулой (76.8). В ω, $\mathbf{r}$-представлении эта связь выразится, следовательно, равенством

$$D_{ik}(\omega,\,\mathbf{r}) = -\left(\delta_{ik} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\right) D(\omega,\,\mathbf{r}). \tag{85.15}$$

Подставив сюда $D(\omega,\,\mathbf{r})$ из (76.16) и произведя дифференцирования, найдем

$$D_{ik}(\omega,\,\mathbf{r}) = \left[\delta_{ik}\left(1 + \frac{i}{|\omega| r} - \frac{1}{\omega^2 r^2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{x_i x_k}{r^2}\left(\frac{3}{\omega^2 r^2} - \frac{3i}{|\omega| r} - 1\right)\right]\frac{e^{i|\omega| r}}{r}. \tag{85.16}$$

Наконец, подставив это выражение в (85.14), после простых преобразований с учетом четности функции $\alpha(\omega)$ получим следующее окончательное выражение для энергии взаимодействия атомов:

$$U(r) = \\ = \frac{i}{\pi r^2}\int\limits_0^\infty \omega^4 \alpha_1(\omega)\alpha_2(\omega) e^{2i\omega r}\left[1 + \frac{2i}{\omega r} - \frac{5}{(\omega r)^2} - \frac{6i}{(\omega r)^3} + \frac{3}{(\omega r)^4}\right] d\omega. \tag{85.17}$$

Это общее выражение можно упростить в предельных случаях «малых» ($a \ll r \ll \lambda_0$) и «больших» ($r \gg \lambda_0$) расстояний.

При $r \ll \lambda_0$ в интеграле существенны (см. ниже) значения $\omega{\sim}\omega_0$, где $\omega_0{\sim}c/\lambda_0$ — атомные частоты; поэтому $\omega r{\ll}1$. В этом случае можно оставить в квадратных скобках только последний член и заменить экспоненту единицей. Написав интеграл в пределах от $-\infty$ до ∞ (с целью дальнейшего преобразования), найдем

$$U(r) = \frac{3i}{2\pi r^6}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha_1(\omega)\alpha_1(\omega) d\omega. \tag{85.18}$$

Как и должно быть, мы получили для взаимодействия на этих расстояниях закон $1/r^6$. Интеграл в этой формуле легко вычис-

ляется, после подстановки в него $\alpha(\omega)$ из (85.13), путем замыкания контура интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в нижней полуплоскости комплексной переменной ω; при этом интеграл определяется вычетами подынтегрального выражения в полюсах $\omega = \omega_{n0} \sim \omega_0$. Предположив для упрощения записи результата оба атома одинаковыми, получим (в обычных единицах)

$$U(r) = -\frac{2}{3r^6} \sum_{n,n'} \frac{|\mathbf{d}_{0n}|^2 |\mathbf{d}_{0n'}|^2}{\hbar(\omega_{n0} + \omega_{n'0})}, \tag{85.19}$$

что совпадает с формулой Лондона (см. III, § 89, задача).

В предельном же случае больших расстояний, $r \gg \lambda_0$, в интеграле существенны значения $\omega \lesssim c/r \ll \omega_0$; при $\omega \gtrsim \omega_0$ интеграл погашается быстро осциллирующим множителем $\exp(2i\omega r)$. Поэтому можно заменить поляризуемости $\alpha_1(\omega)$ и $\alpha_2(\omega)$ их статическими значениями $\alpha_1(0)$ и $\alpha_2(0)$. После этого интегрирование производится элементарно (причем для обеспечения сходимости следует заменить в экспоненте $r \to r + i0$. В результате окончательно находим (в обычных единицах):

$$U(r) = -\frac{23}{4\pi} \frac{\hbar c \alpha_1(0) \alpha_2(0)}{r^7} \tag{85.20}$$

(*H.B.G. Casimir, D. Polder,* 1948) [1]).

---

[1]) В изложенном выводе мы частично следовали *И. Е. Дзялошинскому* (1956).

ГЛАВА X

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ С ФОТОНАМИ

§ 86. Рассеяние фотона электроном

Сохранение 4-импульса при рассеянии фотона свободным электроном (*эффект Комптона*) выражается равенством

$$p + k = p' + k' \tag{86.1}$$

где p и k — 4-импульсы электрона и фотона до столкновения, а p' и k' — их 4-импульсы после столкновения. Введенные в § 66 кинематические инварианты:

$$\begin{gathered} s = (p+k)^2 = (p'+k')^2 = m^2 + 2pk = m^2 + 2p'k', \\ t = (p-p')^2 = (k'-k)^2 = 2(m^2 - pp') = -2kk', \\ u = (p-k')^2 = (p'-k)^2 = m^2 - 2pk' = m^2 - 2p'k, \\ s + t + u = 2m^2. \end{gathered} \tag{86.2}$$

Рассматриваемый процесс изображается двумя диаграммами Фейнмана (74.14), и его амплитуда

$$M_{fi} = -4\pi e^2 e'^*_\mu e_\nu (\overline{u}' Q^{\mu\nu} u), \tag{86.3}$$

где

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{s-m^2}\gamma^\mu(\gamma p + \gamma k + m)\gamma^\nu - \frac{1}{u-m^2}\gamma^\nu(\gamma p - \gamma k' + m)\gamma^\mu. \tag{86.4}$$

Здесь e, e' — 4-векторы поляризации начального и конечного фотонов; u, u' — биспинорные амплитуды начального и конечного электронов.

Согласно изложенным в § 65 правилам, для произвольных поляризационных состояний частиц квадрат $|M_{fi}|^2$ заменяется на

$$|M_{fi}|^2 \to 16\pi^2 e^4 \operatorname{Sp}\left\{\rho^{(e)'} \rho^{(\gamma)'}_{\lambda\mu} Q^{\mu\nu} \rho^{(e)} \rho^{(\gamma)}_{\nu\sigma} \overline{Q}^{\lambda\sigma}\right\}. \tag{86.5}$$

Здесь $\rho^{(e)}$, $\rho^{(e)'}$ — матрицы плотности начального и конечного электронов, $\rho^{(\gamma)}$, $\rho^{(\gamma)'}$ — то же для фотонов; фотонные (тензорные) индексы выписаны явно, а электронные (биспинорные) подразумеваются; знак Sp относится именно к последним индексам. К этим же индексам относится знак эрмитова сопряжения в определении $\overline{Q}_{\mu\nu} = \gamma^0 Q^+_{\mu\nu}\gamma^0$.

Рассмотрим рассеяние неполяризованного фотона на неполяризованном электроне, не интересуясь при этом их поляризациями после рассеяния. Усреднение по поляризациям всех частиц достигается с помощью матриц плотности:

$$\rho^{(\gamma)}_{\lambda\mu} = \rho^{(\gamma)\prime}_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2}g_{\lambda\mu}, \quad \rho^{(e)} = \frac{1}{2}(\gamma p + m), \quad \rho^{(e)\prime} = \frac{1}{2}(\gamma p' + m);$$

переход к суммированию по поляризациям конечных частиц осуществляется умножением еще на $2 \cdot 2 = 4$.

По формуле (64.23) (в которой надо положить теперь $I^2 = \frac{1}{4}(s - m^2)^2$ — см. (64.15а)) получим для сечения

$$d\sigma = \frac{\pi e^4}{4} \frac{dt}{(s-m^2)^2} \operatorname{Sp}\big\{(\gamma p' + m)Q^{\lambda\mu}(\gamma p + m)\overline{Q}_{\lambda\mu}\big\}.$$

С помощью формул (65.2а) находим, что $\overline{Q}_{\mu\lambda} = Q_{\lambda\mu}$. Отделив члены, переходящие друг в друга при замене $k \leftrightarrow -k'$ (и соответственно $s \leftrightarrow u$), представим сечение в виде

$$d\sigma = dt \frac{\pi e^4}{(s-m^2)^2} \left[f(s,\, u) + g(s,\, u) + f(u,\, s) + g(u,\, s)\right],$$

где обозначено

$$f(s,\, u) = \frac{1}{4(s-m^2)^2} \times$$
$$\times \operatorname{Sp}\left\{(\gamma p' + m)\gamma^{\mu}(\gamma p + \gamma k + m)\gamma^{\nu}(\gamma p + m)\gamma_{\nu}(\gamma p + \gamma k + m)\gamma_{\mu}\right\},$$
$$g(s,\, u) = \frac{1}{4(s-m^2)(u-m^2)} \times$$
$$\times \operatorname{Sp}\left\{(\gamma p' + m)\gamma^{\mu}(\gamma p + \gamma k + m)\gamma^{\nu}(\gamma p + m)\gamma_{\mu}(\gamma p - \gamma k' + m)\gamma_{\nu}\right\}$$

(в этих обозначениях мы заранее имеем в виду, что результат будет зависеть лишь от инвариантных величин).

Суммирование по μ и ν выполняется с помощью формул (22.6); отбросив затем члены с нечетным числом множителей γ, получим

$$f(s,\, u) = \frac{1}{(s-m^2)^2} \operatorname{Sp}\big\{(\gamma p')(\gamma p + \gamma k)(\gamma p)(\gamma p + \gamma k) +$$
$$+ 4m^2(\gamma p + \gamma k)(\gamma k - \gamma p') + m^2(\gamma p)(\gamma p') + 4m^4\big\}.$$

Вычислив след с помощью формул (22.13) и выразив все величины через инварианты s, u, найдем после простых преобразований

$$f(s,\, u) = \frac{2}{(s-m^2)^2} \left\{4m^2 - (s-m^2)(u-m^2) + 2m^2(s-m^2)\right\}.$$

Аналогичным образом вычисляется g:

$$g(s,\, u) = \frac{2m^2}{(s-m^2)(u-m^2}\left\{4m^2 + (s-m^2) + (u-m^2)\right\}.$$

В результате для сечения получим

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2 dt}{(s-m^2)^2}\Biggl\{\left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2}\right)^2 + \\ + \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{s-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{s-m^2}\right)\Biggr\}, \quad (86.6)$$

где $r_e = e^2/m$. Эта формула выражает сечение через инвариантные величины. С ее помощью легко выразить сечение через параметры столкновения в любой конкретной системе отсчета.

Сделаем это для лабораторной системы отсчета, в которой электрон до столкновения покоился: $p = (m,\, 0)$. Здесь

$$s - m^2 = 2m\omega, \quad u - m^2 = -2m\omega'. \quad (86.7)$$

Написав уравнение сохранения 4-импульса в виде $p + k - k' = p'$ и возведя его в квадрат, получим

$$pk - pk' - kk' = 0,$$

откуда (в лабораторной системе)

$$m(\omega - \omega') - \omega\omega'(1 - \cos\vartheta) = 0,$$

где ϑ — угол рассеяния фотона. Этим равенством определяется связь между изменением энергии фотона и углом рассеяния:

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos\vartheta) = 0. \quad (86.8)$$

Инвариант t:

$$t = -2kk' = -2\omega\omega'(1 - \cos\vartheta) = 0.$$

При заданной энергии ω находим (с помощью (86.8))

$$dt = 2\omega'^2 d\cos\vartheta = \frac{1}{\pi}\omega'^2 do', \quad do' = 2\pi\sin\vartheta d\vartheta.$$

Подстановка написанных выражений в (86.6) приводит к следующей формуле для сечения рассеяния в лабораторной системе отсчета:

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\vartheta\right)do' \quad (86.9)$$

(*O. Klein, Y. Nishina,* 1929; *И. Е. Тамм,* 1930).

Поскольку угол ϑ однозначно связан с ω' соотношением (86.8), сечение может быть выражено через энергию рассеянного фотона ω':

$$d\sigma = \pi r_e^2 \frac{m d\omega'}{\omega^2}\left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + \left(\frac{m}{\omega'} - \frac{m}{\omega}\right)^2 - 2m\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}\right)\right], \quad (86.10)$$

причем ω' меняется в пределах

$$\frac{\omega}{1+2\omega/m} \leqslant \omega' \leqslant \omega. \tag{86.11}$$

При $\omega \ll m$ в (86.9) можно положить $\omega' \approx \omega$, и получается, как и должно быть, классическая нерелятивистская формула Томсона

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_e^2 (1+\cos^2\vartheta) do' \tag{86.12}$$

(см. II, (78.7)).

Для вычисления полного сечения вернемся к формуле (86.6). (входящие в нее инварианты s, t, u пробегают значения, удовлетворяющие неравенствам

$$s \geqslant m^2, \quad t \leqslant 0, \quad us \leqslant m^4. \tag{86.13}$$

Они были уже получены в § 67 (соответствующая им физическая область — I на рис. 7, с. 299). Легко убедиться в них и непосредственно, написав выражения инвариантов в системе центра инерции. Здесь $\mathbf{p}+\mathbf{k}=0$, а энергии электрона ε и фотона ω связаны посредством $\varepsilon = \sqrt{\omega^2+m^2}$. Инварианты:

$$\begin{aligned} s &= (\varepsilon+\omega)^2 = m^2 + 2\omega(\omega+\varepsilon), \\ u &= m^2 - 2\omega(\varepsilon + \omega\cos\theta), \\ t &= -2\omega^2(1-\cos\theta), \end{aligned} \tag{86.14}$$

где θ — угол рассеяния (угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ или между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$). Три неравенства (86.13) получаются из условий: $\omega \geqslant 0$, $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$.

При заданном s (заданной энергии частиц) интегрирование по t можно заменить интегрированием по $u = 2m^2 - s - t$ в интервале

$$m^4/s \geqslant u \geqslant 2m^2 - s.$$

Введя вместо s, u величины

$$x = \frac{s-m^2}{m^2}, \quad y = \frac{m^2-u}{m^2}, \tag{86.15}$$

получим

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{x^2} \int\limits_{x/(x+1)}^{x} \left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right] dy$$

и после элементарного интегрирования

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{4}{x}-\frac{8}{x^2}\right)\ln(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2}\right\}. \tag{86.16}$$

Первые члены разложения при $x \ll 1$ (нерелятивистский случай) дают

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3}(1-x) \quad \text{(н. р.)}. \tag{86.17}$$

Первый член есть классическое томсоновское сечение. В обратном, ультрарелятивистском случае $x \gg 1$, и разложение формулы (86.16) дает

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x}\left(\ln x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{(у. р.)}. \tag{86.18}$$

В лабораторной системе отсчета

$$x = 2\omega/m, \tag{86.19}$$

так что формулы (86.16)–(86.18) прямо дают зависимость сечения рассеяния на неподвижном электроне от энергии фотона. На рис. 13 дан график зависимости σ от ω/m.

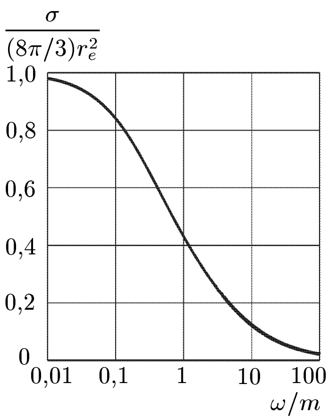


Рис. 13

Отметим, что в ультрарелятивистском случае сечение падает с увеличением энергии как в лабораторной системе отсчета ($\sigma \propto \omega^{-1}\ln\omega$), так и в системе центра инерции $x \approx 4\omega^2/m^2$, $\sigma \propto \omega^{-2}\ln\omega$). Угловое же распределение в ультрарелятивистском случае носит в этих двух системах отсчета совершенно различный характер.

В лабораторной системе дифференциальное сечение имеет резкий максимум в направлении вперед. В узком конусе $\vartheta \lesssim \sqrt{m/\omega}$ имеем $\omega' \sim \omega$ и сечение $d\sigma/do' \sim r_e^2$ (достигая значения r_e^2 при $\vartheta \to 0$). Вне этого конуса сечение убывает, и в области $\vartheta^2 \gg m/\omega$ (где $\omega' \approx m/(1-\cos\vartheta)$) имеем

$$\frac{d\sigma}{do'} = \frac{r_e^2}{2}\frac{m}{\omega(1-\cos\vartheta)},$$

т. е. сечение уменьшается в $\sim \omega/m$ раз.

В системе же центра инерции дифференциальное сечение имеет максимум в направлении назад. При $\pi - \theta \ll 1$ имеем из (86.14)

$$\frac{s-m^2}{m^2} \approx \frac{4\omega^2}{m^2}, \qquad \frac{m^2-u}{m^2} \approx 1 + \frac{\omega^2}{m^2}(\pi-\theta)^2.$$

Наибольший член в сечении (86.6)

$$d\sigma \approx 8\pi r_e^2 \frac{m^2 dt}{4(s-m^2)(m^2-u)},$$

откуда

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{2}\frac{do'}{1+(\pi-\theta)^2\omega^2/m^2}. \tag{86.20}$$

Сечение $d\sigma/do' \sim r_e^2$ в узком конусе $\pi - \theta \lesssim m/\omega$, а вне его уменьшается по порядку величины в ω^2/m^2 раз.

§ 87. Рассеяние фотона электроном. Поляризационные эффекты

Вернемся к исходным формулам предыдущего параграфа и покажем, каким образом должны производиться вычисления с учетом поляризации начальных и конечных фотонов и электронов.

Матрица плотности фотона выражается, согласно (8.17), с помощью пары единичных 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, удовлетворяющих условиям (8.16). В данном случае можно выбрать эти векторы единым образом для обоих фотонов. Это — введенные в § 70 4-векторы [1])

$$e^{(1)} = \frac{N}{\sqrt{-N^2}}, \quad e^{(2)} = \frac{P}{\sqrt{-P^2}}, \tag{87.1}$$

где

$$\begin{gathered} P^\lambda = \left(p^\lambda + p'^\lambda\right) - K^\lambda\frac{pK+p'K}{K^2}, \quad N^\lambda = e^{\lambda\mu\nu\rho}P_\mu q_\nu K_\rho, \\ K^\lambda = k^\lambda + k'^\lambda, \quad q^\lambda = k'^\lambda - k^\lambda = p^\lambda - p'^\lambda. \end{gathered} \tag{87.2}$$

Величины $Q^{\mu\nu}$ в (86.5) даются формулой (86.4). Их можно рассматривать как компоненты 4-тензора (в том смысле, что они образуют 4-тензор после образования величин $\overline{u}'Q^{\mu\nu}u$, как говорят, «в обкладках»). Все компоненты 4-тензора можно исчерпать, проецируя его на четыре взаимно ортогональных 4-вектора, например на определенные выше P, N, q, K. Поскольку тензоры $\rho_{\mu\nu}^{(\gamma)'}$, $\rho_{\mu\nu}^{(\gamma)}$ содержат только компоненты по P и N, фактически нам нужны будут компоненты $Q_{\mu\nu}$ тоже лишь по этим 4-векторам.

---

[1]) Альтернативный способ вычисления состоит в том, чтобы с самого начала рассматривать определенную систему отсчета (скажем, лабораторную) и для каждого фотона выбрать в качестве $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ два чисто пространственных ($e = (0, \mathbf{e})$) вектора, ортогональных по отношению к импульсу фотона и по отношению друг к другу. При этом, однако, все вычисления будут производиться в трехмерной форме, а результат не будет иметь инвариантного вида.

Другими словами, достаточно искать в $Q_{\mu\nu}$ лишь члены вида

$$Q_{\mu\nu} = Q_0\bigl(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}\bigr) + Q_1\bigl(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)}\bigr) - \\ - iQ_2\bigl(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)}\bigr) + Q_3\bigl(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}\bigr); \quad (87.3)$$

остальные члены при подстановке в (86.5) все равно выпали бы. Величины Q_0 и Q_3 являются скалярами — в том же смысле, как и $Q_{\mu\nu}$ есть 4-тензор; они содержат поэтому матрицы γ лишь в «инвариантных» комбинациях: γK и т. п. В том же смысле Q_1 и Q_2 — псевдоскаляры (N — псевдовектор!) и должны содержать матрицу γ^5.

Непосредственным проецированием тензора $Q_{\mu\nu}$ находим

$$Q_0 = \frac{1}{2}Q^{\mu\nu}\bigl(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}\bigr)$$

и т. д. Для вычисления удобно сначала выразить $Q_{\mu\nu}$ через взаимно ортогональные 4-векторы P, N, q, K:

$$Q^{\mu\nu} = \gamma^\mu\frac{\gamma P/2 + m}{s - m^2} + \gamma^\nu\frac{\gamma P/2 + m}{u - m^2}\gamma^\nu - \frac{1}{t}\left[\gamma^\mu(\gamma K)\gamma^\nu - \gamma^\nu(\gamma K)\gamma^\mu\right].$$

Дальнейшее вычисление сводится к чисто алгебраическим преобразованиям с помощью приведенных в § 22 формул. Кроме того, можно сделать в $Q^{\mu\nu}$ замены, которые не отразятся на результате при дальнейшем образовании произведения $\overline{u}'Q^{\mu\nu}u$. Например, поскольку

$$\overline{u}'(\gamma p + \gamma p')u = 2m\overline{u}'u,$$
$$\overline{u}'\gamma^5(\gamma q)u = \overline{u}'[\gamma^5(\gamma p) + (\gamma p')\gamma^5]u = 2m\overline{u}'\gamma^5 u,$$

то можно заменить в $Q^{\mu\nu}$ слагаемые

$$\gamma p + \gamma p' \to 2m, \quad \gamma^5(\gamma q) \to 2m\gamma^5. \quad (87.4)$$

Опустив детали вычислений, приведем результат [1]:

$$Q_0 = -ma_+, \qquad Q_1 = \frac{i}{2}a_+\gamma^5(\gamma K), \quad (87.5)$$
$$Q_2 = -ma_+\gamma^5, \qquad Q_3 = ma_+ + \frac{1}{2}a_-(\gamma K),$$

где

$$a_\pm = \frac{1}{s - m^2} \pm \frac{1}{u - m^2}.$$

[1]) Выражение (87.3) со значениями (87.5) соответствует виду (70.11)–(70.13), установленному в § 70 из общих соображений. Помимо равенств $f_3 = f_6 = 0$, следующих из T-инвариантности, здесь оказывается равной нулю еще одна инвариантная амплитуда (f_2). Это — свойство рассматриваемого приближения теории возмущений, и оно исчезло бы в более высоких приближениях.

Для дальнейших вычислений удобно применить к $Q_{\mu\nu}$ тот же формальный прием, который был описан в § 8 для матрицы плотности фотона: четыре компоненты тензора (87.3) по направлениям $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ объединим в двухрядную матрицу Q, которую затем разложим по матрицам Паули. Аналогично формуле (8.18) получим

$$Q = Q_0 + \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3) \tag{87.6}$$

Что касается фигурирующего в (86.5) тензора $\overline{Q}_{\mu\nu} = \gamma^0 Q^+_{\mu\nu}\gamma^0$, то используя (87.3) и (87.5), легко убедиться (с помощью правил ((65.2a))), что его компоненты получаются из компонент $Q_{\mu\nu}$ заменой величин $Q_0,\ Q_1,\ \ldots$ на $\overline{Q}_0,\ \overline{Q}_1,\ \ldots$, где

$$\overline{Q}_0 = Q_0, \quad \overline{Q}_1 = -Q_1, \quad \overline{Q}_2 = -Q_2, \quad \overline{Q}_3 = Q_3, \tag{87.7}$$

и одновременной перестановкой индексов $\mu\nu$ [1]). В матричном виде это значит, что

$$\overline{Q} = \overline{Q}_0 + \overline{\mathbf{Q}}\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{87.8}$$

Уточним теперь смысл 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ в их отношении к поляризации фотонов. Для каждого из фотонов независимые направления поляризации будут определяться поперечными (по отношению к импульсу фотона $\mathbf{k}$) составляющими 3-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ [2]). Легко видеть, что как в системе центра инерции, так и в лабораторной системе (системе покоя начального электрона) вектор $\mathbf{P}$ лежит в плоскости $\mathbf{k}\mathbf{k}'$, а вектор $\mathbf{N}$ перпендикулярен этой плоскости. Поэтому направление $\mathbf{e}^{(1)}$ имеет смысл поляризации перпендикулярно плоскости рассеяния, а направление $\mathbf{e}^{(2)}$ — поляризации в плоскости рассеяния. Надо также учесть, что параметры Стокса $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ определяются по отношению к осям xyz, образующим правовинтовую систему (с осью z вдоль направления $\mathbf{k}$). Легко видеть, что для начального фотона такую систему составляют векторы $\mathbf{N},\ -\mathbf{P}_\perp,\ \mathbf{k}$, а для конечного фотона — векторы $\mathbf{N},\ \mathbf{P}'_\perp,\ \mathbf{k}'$ ($\mathbf{P}_\perp,\ \mathbf{P}'_\perp$ — составляющие $\mathbf{P}$, перпендикулярные соответственно $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$). Изменение знака $e^{(2)}$ в матрице плотности фотона (8.17) эквивалентно изменению знака ξ_1 и ξ_2. Поэтому матрицы плотности начального и конечного

[1]) Для матрицы $Q_{\mu\nu}$ в исходной форме (86.4) мы имели бы просто $\overline{Q}_{\mu\nu} = Q_{\nu\mu}$. Это свойство, однако, теряется в результате преобразований, включающих замены типа (87.4) и т. п.

[2]) Продольные же компоненты $\mathbf{e}$ (как и временные компоненты 4-векторов e) можно при этом просто игнорировать: их несущественность обеспечивается калибровочной инвариантностью.

фотонов, отнесенные к 4-ортам $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, будут

$$\begin{aligned} \rho^{(\gamma)} &= \frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\xi\sigma}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3); \\ \rho^{(\gamma)'} &= \frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\sigma}), \quad \boldsymbol{\xi} = (-\xi_1',\, -\xi_2',\, \xi_3'). \end{aligned} \tag{87.9}$$

Теперь тензорный след

$$\rho^{(\gamma)'}_{\lambda\mu} Q^{\mu\nu} \rho^{(\gamma)}_{\nu\rho} \widetilde{\overline{Q}}^{\rho\lambda}$$

вычисляется как след матричного произведения матриц (87.6)–(87.9) с помощью (33.5). В результате получается

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 = 8\pi^2 e^4\, \mathrm{Sp}\{(\rho^{(e)'} Q_0 \rho^{(e)} \overline{Q}_0 + \rho^{(e)'} \mathbf{Q} \rho^{(e)} \overline{\mathbf{Q}}) + \\ + (\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}')(\rho^{(e)'} Q_0 \rho^{(e)} \overline{\mathbf{Q}} + \rho^{(e)'} \mathbf{Q} \rho^{(e)} \overline{Q}_0) - i(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}')[\rho^{(e)'} \mathbf{Q} \rho^{(e)} \overline{\mathbf{Q}}] + \\ + (\boldsymbol{\xi\xi}')(\rho^{(e)'} Q_0 \rho^{(e)} \overline{Q}_0 - \rho^{(e)'} \mathbf{Q} \rho^{(e)} \overline{\mathbf{Q}}) + \rho^{(e)'} (\boldsymbol{\xi}'\mathbf{Q}) \rho^{(e)} (\boldsymbol{\xi}\overline{\mathbf{Q}}) + \\ + \rho^{(e)'} (\boldsymbol{\xi}\mathbf{Q}) \rho^{(e)} (\boldsymbol{\xi}'\overline{\mathbf{Q}}) - i[\boldsymbol{\xi\xi}'](\rho^{(e)'} Q_0 \rho^{(e)} \overline{\mathbf{Q}} - \rho^{(e)'} \mathbf{Q} \rho^{(e)} \overline{Q}_0)\}. \end{aligned} \tag{87.10}$$

Рассеяние на неполяризованных электронах. Вычислим до конца сечение рассеяния поляризованных фотонов неполяризованным электроном, просуммированное по поляризациям конечного электрона. Для этого надо положить в (87.10)

$$\rho^{(e)} = \frac{1}{2}(\gamma p + m), \quad \rho^{(e)'} = \frac{1}{2}(\gamma p' + m)$$

и удвоить результат, который должен быть подставлен вместо $|M_{fi}|^2$ в формулу для сечения (64.22)

$$d\sigma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{dt\, d\varphi}{(s-m^2)^2} |M_{fi}|^2$$

(φ — азимут в системе центра инерции или в лабораторной системе). Ряд членов в (87.10) обращается тождественно в нуль. Вычисление остальных членов приводит к следующему окончательному результату (в обозначениях (86.15)):

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{1}{2} d\overline{\sigma} + 2r_e^2 \frac{dy d\varphi}{x^2} \Big\{ (\xi_3 + \xi_3') \Big[-\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big) \Big] + \\ + \xi_1 \xi_1' \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2}\Big) + \xi_2 \xi_2' \cdot \frac{1}{4} \Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Big) \Big(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{y}\Big) + \\ + \xi_3 \xi_3' \Big[\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big) + \frac{1}{2} \Big] \Big\}, \end{aligned} \tag{87.11}$$

где $d\overline{\sigma}$ — сечение рассеяния неполяризованных фотонов, даваемое формулой (86.9); множитель $1/2$ связан с тем, что в (87.11) нет суммирования по поляризациям конечного фотона.

В лабораторной системе формула (87.11) принимает вид

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{4}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 do'\left\{F_0 + F_3\left(\xi_3+\xi_3'\right) + F_{11}\xi_1\xi_1' + F_{22}\xi_2\xi_2' + F_{33}\xi_3\xi_3'\right\},$$
$$do' = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \quad (87.12)$$

где

$$F_0 = \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\vartheta, \quad F_3 = \sin^2\vartheta,$$
$$F_{11} = 2\cos\vartheta, \quad F_{22} = \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega}\right)\cos\vartheta, \quad F_{33} = 1+\cos^2\vartheta \quad (87.13)$$

(*U. Fano*, 1949). Заметим, что хотя выражение (87.12) не содержит явной зависимости от азимута плоскости рассеяния φ, но имеется неявная зависимость, поскольку параметры ξ_1, ξ_2 ,ξ_3 определяются относительно осей x, y, z, связанных с плоскостью рассеяния. Напомним, что ось x для обоих фотонов одинакова и перпендикулярна плоскости рассеяния:

$$x \parallel [\mathbf{k}\mathbf{k}'],$$

а оси y лежат в плоскости рассеяния:

$$y \parallel [\mathbf{k}[\mathbf{k}\mathbf{k}']], \quad y' \parallel [\mathbf{k}'[\mathbf{k}\mathbf{k}']].$$

Взяв сумму сечений, различающихся знаком $\boldsymbol{\xi}'$ (т. е. положив $\boldsymbol{\xi}' = 0$ и удвоив результат), мы получим полное (просуммированное по поляризациям конечного фотона) сечение рассеяния поляризованного фотона на неполяризованном электроне. Обозначив его через $d\sigma(\boldsymbol{\xi})$, имеем

$$d\sigma(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} r_e^2\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 F\, do', \quad (87.14)$$

где

$$F = F_0 + \xi_3 F_3 = \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - (1-\xi_3)\sin^2\vartheta. \quad (87.15)$$

Мы видим, что сечение рассеяния фотонов, поляризованных перпендикулярно плоскости рассеяния ($\xi_3 = 1$), больше, чем для фотонов, поляризованных в плоскости рассеяния ($\xi_3 = -1$). От циркулярной же поляризации сечение не зависит. Оно не зависит также и от параметра ξ_1. Поэтому сечение рассеяния совпадает с сечением для неполяризованных фотонов, если отсутствует линейная поляризация относительно осей x или y ($\xi_3 = 0$) или даже если имеется поляризация относительно направлений, составляющих 45° с этими осями.

Аналогичными свойствами обладает сечение рассеяния неполяризованных фотонов с детектированием поляризованного фо-

тона. Это сечение (обозначим его через $d\sigma(\boldsymbol{\xi}')$) получится из формулы (87.12), если положить в ней $\boldsymbol{\xi} = 0$:

$$d\sigma(\boldsymbol{\xi}') = \frac{1}{4} r_e^2 \Big(\frac{\omega'}{\omega}\Big)^2 F' do', \quad F' = F_0 + \xi_3' F_3. \tag{87.16}$$

Из формулы (87.12) можно найти также поляризацию вторичного фотона как такового; параметры этой поляризации обозначим через $\boldsymbol{\xi}^{(f)}$ в отличие от детектируемой поляризации $\boldsymbol{\xi}'$. Согласно изложенным в § 65 правилам величины $\xi_i^{(f)}$ равны отношениям коэффициентов при ξ_i' к члену, не содержащему $\boldsymbol{\xi}'$:

$$\xi_1^{(f)} = \frac{F_{11}}{F}\xi_1, \quad \xi_2^{(f)} = \frac{F_{22}}{F}\xi_2, \quad \xi_3^{(f)} = \frac{F_3 + F_{33}\xi_3}{F}. \tag{87.17}$$

В частности, при рассеянии неполяризованного фотона

$$\xi_1^{(f)} = \xi_2^{(f)} = 0, \quad \xi_3^{(f)} = \frac{\sin^2\vartheta}{\omega/\omega' + \omega'/\omega - \sin^2\vartheta}. \tag{87.18}$$

При этом $\xi_3^{(f)} > 0$, т.е. вторичный фотон поляризуется перпендикулярно плоскости рассеяния. Циркулярная же поляризация вторичного фотона возникает, лишь если первичный фотон циркулярно поляризован: $\xi_2^{(f)} \neq 0$ только при $\xi_2 \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда падающий фотон полностью поляризован линейно ($\xi_2 = 0$, $\xi_1^2 + \xi_3^2 = 1$), и найдем сечение рассеяния, в котором детектируется тоже линейная поляризация вторичного фотона. Выразив параметры ξ_i и ξ_i' через компоненты векторов поляризации фотонов $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$, получим следующее выражение для сечения рассеяния:

$$d\sigma = \frac{r_e^2}{4}\Big(\frac{\omega'}{\omega}\Big)^2 \Big(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - 2 + 4\cos^2\Theta\Big) do', \tag{87.19}$$

где Θ — угол между направлениями поляризации падающего и рассеянного фотонов [1]).

Согласно этой формуле сечение ведет себя существенно различным образом в случаях, когда поляризации $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ взаимно

[1]) Формулу (87.19) саму по себе было бы проще получить, положив с самого начала в амплитуде рассеяния (86.3) $e = (0,\ \mathbf{e})$, $e' = (0,\ \mathbf{e}')$ и произведя дальнейшее вычисление квадрата амплитуды в трехмерном виде (т. е. разделив временные и пространственные компоненты 4-векторов).

Усреднив $\cos^2\Theta = (\mathbf{e}\mathbf{e}')^2$ по направлениям $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ (с помощью (45.4а)) и удвоив сечение (переход к суммированию по $\mathbf{e}'$), мы вернемся, конечно, к (86.9)

перпендикулярны и когда они лежат в одной плоскости. Отличая эти два случая индексами $\perp$ и $\|$, имеем в нерелятивистском пределе ($\omega \ll m,\ \omega' \approx \omega$)

$$d\sigma_\perp = 0, \quad d\sigma_{||} = r_e^2 \cos^2\Theta\, do' \tag{87.20}$$

в согласии с классическими формулами. В обратном, ультрарелятивистском, случае имеем $\omega \gg m,\ \omega' \approx m/(1-\cos\vartheta)$. Здесь надо различать области больших и малых углов (ω/ω' велико или мало):

$$\begin{aligned} &d\sigma_\perp = d\sigma_{||} = \frac{1}{4} r_e^2 \frac{\omega'}{\omega} do' = \frac{1}{4} r_e^2 \frac{m do'}{\omega(1-\cos\vartheta)}, \quad \vartheta^2 \gg \frac{m}{\omega}; \\ &d\sigma_\perp = 0, \quad d\sigma_{||} = r_e^2 \cos^2\Theta do', \quad \vartheta^2 \ll \frac{m}{\omega}. \end{aligned} \tag{87.21}$$

Мы видим, что в области очень малых углов сечение рассеяния совпадает с классическим. Равенство же $d\sigma_\perp \approx d\sigma_{||}$ при не слишком малых углах означает, что в этой области в ультрарелятивистском случае рассеянное излучение не поляризовано; подчеркнем, однако, что это заключение относится именно к линейно поляризованному падающему фотону: из (87.17) видно, что для циркулярно поляризованного фотона в ультрарелятивистском случае $\xi_2^{(f)} \approx \cos\vartheta \cdot \xi_2$.

Рассеяние на поляризованных электронах. Для поляризованных электронов вычисление следов в формуле (87.10) становится очень громоздким, хотя и не представляет принципиальных затруднений. Мы приведем здесь некоторые окончательные результаты такого расчета [1]).

В общем случае сечение зависит как от поляризационных параметров начального и конечного фотонов $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\xi}'$, так и от поляризаций начального и конечного электронов, характеризующихся векторами $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\zeta}'$. Зависимость сечения от каждого из этих параметров линейна. Сечение имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma = &\frac{1}{2} d\sigma(\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{\xi}') + \\ &+ \frac{r_e^2}{8}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 do' \left\{ f\boldsymbol{\zeta}\xi_2 + f'\boldsymbol{\zeta}\xi_2' + g\boldsymbol{\zeta}'\xi_2 + g'\boldsymbol{\zeta}'\xi_2' + G_{ik}\zeta_i\zeta_k' + \ldots \right\}. \end{aligned} \tag{87.22}$$

Здесь $d\sigma(\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{\xi}')$ — сечение (87.12). Выписаны все члены, содержащие произведения двух поляризационных параметров. Опущены

[1]) Более подробные сведения можно найти в обзорных статьях: *Tolhoek H. A.*//Rev. Mod. Phys. — 1956. — V. 28. — P. 277; *McMaster W. H.*//Rev. Mod. Phys. — 1961. — V. 33. — P. 8.

члены, содержащие произведения трех или четырех параметров; эти члены несущественны, если нас интересуют корреляции между поляризациями лишь двух частиц: они выпадают, когда поляризационные параметры двух других частиц полагаются равными нулю. Приведем значения некоторых из коэффициентов в лабораторной системе отсчета:

$$\mathbf{f} = -\frac{1-\cos\vartheta}{m}(\mathbf{k}\cos\vartheta + \mathbf{k}'),$$

$$\mathbf{f}' = -\frac{1-\cos\vartheta}{m}(\mathbf{k} + \mathbf{k}'\cos\vartheta),$$

$$\mathbf{g} = -\frac{1-\cos\vartheta}{m}\left[(\mathbf{k}\cos\vartheta + \mathbf{k}') - (1+\cos\vartheta)\frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'+2m}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\right],$$

$$\mathbf{g}' = -\frac{1-\cos\vartheta}{m}\left[(\mathbf{k} + \mathbf{k}'\cos\vartheta) - (1+\cos\vartheta)\frac{\omega+\omega'}{\omega-\omega'+2m}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\right]. \tag{87.23}$$

В сечении (87.22) отсутствует член вида $\mathbf{G}\boldsymbol{\zeta}$; это значит, что поляризация электрона не влияет на полное (просуммированное по $\boldsymbol{\xi}'$ и $\boldsymbol{\zeta}'$) сечение рассеяния поляризованных фотонов. Отсутствует также член вида $\mathbf{G}'\boldsymbol{\zeta}'$; это значит, что при рассеянии неполяризованных фотонов электрон отдачи не поляризуется.

Мы видим также, что в члены, билинейные по поляризациям электрона и фотона, входят только параметры ξ_2, ξ_2', отвечающие круговой поляризации фотона. Векторы же поляризации электронов $\boldsymbol{\zeta}$ и $\boldsymbol{\zeta}'$ входят в виде скалярных произведений $\mathbf{f}\boldsymbol{\zeta}$, ..., содержащих лишь проекции этих векторов на плоскость рассеяния. Поэтому, например, сечение рассеяния поляризованного фотона поляризованным электроном

$$d\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) = d\sigma(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2}r_e^2\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\xi_2\mathbf{f}\boldsymbol{\zeta}\,do' \tag{87.24}$$

отличается от $d\sigma(\boldsymbol{\xi})$ только при наличии у фотона круговой поляризации, а у электронов — отличной от нуля проекции среднего спина на плоскость рассеяния. По той же причине электрон отдачи поляризуется только в случае, если фотон обладает круговой поляризацией; вектор же возникающей поляризации электрона лежит при этом в плоскости рассеяния:

$$\boldsymbol{\zeta}^{(f)} = \frac{1}{F}\xi_2\mathbf{g}. \tag{87.25}$$

Соотношения симметрии. В заключение укажем, что качественные свойства поляризационных эффектов при рассеянии фотонов на электронах следуют уже из общих требований симметрии.

Параметр ξ_2 циркулярной поляризации — псевдоскаляр (см. § 8). Поэтому в силу требования P-инвариантности члены вида $\propto \xi_2$ (или $\propto \xi_2'$) в сечении рассеяния могли бы возникнуть лишь как произведение ξ_2 на какой-либо псевдоскаляр, составленный из имеющихся в нашем распоряжении векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ [1]). Но из двух полярных векторов нельзя составить псевдоскаляр. Отсюда и следует, что указанных членов в сечении не может быть.

Параметры линейной поляризации ξ_1 и ξ_2 связаны с компонентами двумерного (в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$) симметричного тензора

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\rho^{(\gamma)}_{\alpha\beta} + \rho^{(\gamma)}_{\beta\alpha}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 \\ \xi_1 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}.$$

В данном случае одна из осей поляризации выбрана вдоль вектора $\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{k}\mathbf{k}']$, а другая лежит в плоскости $\mathbf{k}\,\mathbf{k}'$ (вдоль вектора $[\mathbf{k}\boldsymbol{\nu}]$ или $[\mathbf{k}'\boldsymbol{\nu}]$ для одного или другого фотона). Члены $\propto \xi_1$ могли бы возникнуть в сечении лишь как произведения $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha[\mathbf{k}'\boldsymbol{\nu}]_\beta$ (или, что то же, $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha k'_\beta$) и т. п. Но поскольку $\boldsymbol{\nu}$ — аксиальный и $\mathbf{k}$ — полярный векторы, а $S_{\alpha\beta}$ — истинный тензор, то такие произведения не инвариантны по отношению к инверсии. Поэтому членов $\propto \xi_1$ (или $\propto \xi_1'$) в сечении тоже не может быть. Члены же $\propto \xi_3$ (или $\propto \xi_3'$) возникают как произведения $S_{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta$ и т. п. и соображениями симметрии не запрещаются.

Члены в сечении, пропорциональные электронной поляризации $\boldsymbol{\zeta}$, не запрещены по четности: такие члены могли бы быть образованы как произведения двух аксиальных векторов: $\boldsymbol{\zeta\nu}$. Они, однако, должны отсутствовать в рассмотренном нами первом не исчезающем приближении теории возмущений как следствие эрмитовости матрицы рассеяния в этом приближении (см. § 71).

В силу этой эрмитовости квадрат амплитуды рассеяния (а с ним и сечение) не меняется при перестановке начального и конечного состояний. В то же время сечение должно быть инвариантно по отношению к обращению времени — перестановке начального и конечного состояний вместе с одновременным изменением знака векторов импульса и момента всех частиц (параметры же Стокса ξ_1, ξ_2, ξ_3 при этом не меняются — см. § 8). Комбинируя оба эти требования, заключаем, что в рассматриваемом приближении сечение не должно меняться при одновременном изменении знака всех импульсов и моментов без перестановки

[1]) Рассматриваем процесс в лабораторной системе, где $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$. Очевидно, что интересующие нас следствия требований симметрии (наличие или отсутствие тех или иных членов в сечении) не зависят от выбора системы отсчета.

начального и конечного состояний, т. е. при преобразовании

$$\mathbf{k} \to -\mathbf{k}', \quad \mathbf{k}' \to -\mathbf{k}', \quad \boldsymbol{\zeta} \to -\boldsymbol{\zeta}' \quad \boldsymbol{\zeta}' \to -\boldsymbol{\zeta}' \tag{87.26}$$

и неизменных параметрах $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi}'$.

Преобразование (87.26) меняет знак произведения $\boldsymbol{\zeta\nu}$, и потому такпе члены не могут фигурировать в сечении. Подчеркнем, однако, что этот запрет не является следствием строгих требований симметрии и может нарушаться в следующих приближениях теории возмущений.

Заметим, что симметрия по четности запрещает члены вида $\xi_1\xi_3$ и $\xi_2\xi_3$ в двойной корреляции между поляризациями фотонов друг с другом и не накладывает никаких ограничений на вид корреляции фотонов с электронами. Однако все члены вида $\xi_1\xi_2$, $\xi_1\boldsymbol{\zeta}$, $\xi_3\boldsymbol{\zeta}$ запрещены в первом приближении требованием инвариантности относительно преобразования (87.26). Так, члены вида $\xi_1\xi_2'$ и $\xi_1\boldsymbol{\zeta}$ можно было бы образовать (с точки зрения соблюдения четности) как скаляры, например $\xi_2'(S_{\alpha\beta}k_\alpha'\nu_\beta)$ и $(S_{\alpha\beta}k_\alpha'\nu_\beta)(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{k})$; эти комбинации, однако, меняют знак при преобразовании (87.26).

Разрешенные корреляционные члены вида $\xi_2\boldsymbol{\zeta}$ могут быть образованы как произведения типа $\xi_2(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{k})$. Векторы поляризации электронов входят в них лишь в виде проекций на плоскость рассеяния.

Наконец, ряд соотношений между коэффициентами в разрешенных членах возникает из требований кросс-универсальности. Каналы реакции, различающиеся перестановкой начального и конечного фотонов, отвечают одному процессу — рассеянию фотона на электроне. Поэтому квадрат модуля амплитуды, а с ним и сечение рассеяния должны быть инвариантны по отношению к преобразованию, выражающему переход от одного из этих каналов к другому:

$$k \leftrightarrow -k', \quad e \leftrightarrow e'^*$$

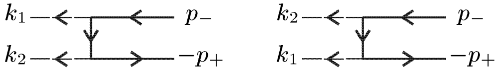
при неизменных импульсах и поляризациях электронов. В трехмерном виде это преобразование означает замены:

$$\omega \leftrightarrow -\omega', \quad \mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}', \quad \xi_1 \leftrightarrow \xi_1', \quad \xi_2 \leftrightarrow -\xi_2', \quad \xi_3 \leftrightarrow \xi_3'. \tag{87.27}$$

Изменение знака параметра ξ_2 очевидно из выражения $\xi_2 = i[\mathbf{ee}^*]n$, в котором вектор $[\mathbf{ee}^*]$ при замене $\mathbf{e} \leftrightarrow -\mathbf{e}^*$ меняет знак, а вектор $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ при замене $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$, $\omega \leftrightarrow -\omega$ не меняется. Преобразование (87.27), не затрагивая импульсов электронов, оставляет лабораторную систему, лабораторной. Поэтому сечение (87.22) не должно менять своего вида при этом преобразовании; формулы (87.12), (87.22),(87.23) действительно удовлетворяют этому условию.

§ 88. Двухфотонная аннигиляция электронной пары

Аннигиляции электрона и позитрона (4-импульсы p_- и p_+) с образованием двух фотонов (k_1 и k_2) отвечают две диаграммы:



(88.1)

Они отличаются от диаграмм рассеяния фотона на электроне заменой

$$p \to p_-, \quad p' \to -p_+, \quad k \to -k_1, \quad k' \to k_2. \tag{88.2}$$

Оба процесса — два перекрестных канала одной и той же (обобщенной) реакции. После замены (88.2) кинематические инварианты (86.2) приобретают следующий смысл:

$$\begin{aligned} s &= (p_- - k_1)^2, \\ t &= (p_- + p_+)^2 = (k_1 + k_2)^2, \\ u &= (p_- - k_2)^2. \end{aligned} \tag{88.3}$$

Если рассеяние фотона было s-каналом, то аннигиляция есть t-канал.

Квадрат $|M_{fi}|^2$ для аннигиляции (усредненный по поляризациям электронов и просуммированный по поляризациям фотонов) будучи выражен через инварианты s, u, совпадает с аналогичной величиной для рассеяния с изменением лишь смысла инвариантов [1]). В формуле же для сечения (64.23), в множителях при $|M_{fi}|^2$, надо заменить: $s \leftrightarrow t$, причем для величины I имеем теперь, согласно (64.15а),

$$I^2 = \frac{1}{4}t(t - 4m^2).$$

Произведя соответствующие изменения в формуле (86.6), получим в результате сечение аннигиляции

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 \frac{m^2 ds}{t(t-4m^2)} \left\{ \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{s-m^2}{u-m^2} + \frac{u-m^2}{s-m^2} \right) \right\} \tag{88.4}$$

Физическая область аннигиляционного канала есть область II на рис. 7 (см. с. 299). При заданном t (заданной энергии в системе

---

[1]) При этом учитывается, что фотоны и электроны имеют одинаковое число (два) независимых поляризаций и потому несущественно, по которым $|M_{fi}|^2$ усредняется, а по которым суммируется.

центра инерции) интервал изменения s определяется уравнением границы $su = m^4$. Вместе с соотношением $s + t + u = 2m^2$ это дает

$$-\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{t(t-4m^2)} \leqslant s - m^2 \leqslant -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t(t-4m^2)}. \qquad (88.5)$$

Интегрирование выражения (88.4) элементарно; результат надо еще разделить на 2, учитывая тождественность двух конечных частиц (фотонов). Таким образом, получим

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{2\tau^2(\tau-1)}\left[\left(\tau^2 + \tau - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{\sqrt{\tau}+\sqrt{\tau-1}}{\sqrt{\tau}-\sqrt{\tau-1}} - (\tau+1)\sqrt{\tau(\tau-1)}\right], \qquad (88.6)$$

где $\tau = t/4m^2$ (*P. A. M. Dirac,* 1930).

В нерелятивистском пределе ($\tau \to 1$) находим отсюда

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{2\sqrt{\tau-1}} \text{ (н. р.)}. \qquad (88.7)$$

В ультрарелятивистском же случае ($\tau \to \infty$)

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{2\tau}(\ln 4\tau - 1) \text{ (у. р.)}. \qquad (88.8)$$

В лабораторной системе, в которой одна из частиц (скажем, электрон) до столкновения покоилась, инвариант τ есть

$$\tau = \frac{1}{2}(1+\gamma), \quad \gamma = \frac{\varepsilon_+}{m}. \qquad (88.9)$$

Формулы (88.6)–(88.8) дают зависимость полного сечения от энергии налетающего позитрона:

$$\sigma = \frac{\pi r_e^2}{2\gamma+1}\left[\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\ln(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}) - \frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right]. \qquad (88.10)$$

В частности, в нерелятивистском пределе [1])

$$\sigma = \pi r_e^2/v_+ \text{ (н. р.)}, \qquad (88.11)$$

где v_+ — скорость позитрона.

В системе центра инерции электрон, позитрон и оба фотона имеют одинаковые энергии $\varepsilon = \omega$. Инварианты:

$$m^2 - s = 2\varepsilon(\varepsilon - |\mathbf{p}|\cos\theta), \quad m^2 - u = 2\varepsilon(\varepsilon + |\mathbf{p}|\cos\theta),$$
$$t = 4\varepsilon^2, \qquad (88.12)$$

где θ — угол между импульсами электрона и одного из фотонов.

[1]) Эта формула, однако, неприменима, когда $v_+ \lesssim \alpha$, и нельзя пренебрегать кулоновым взаимодействием компонент пары (ср. конец § 94).

Подставив (88.12) в (88.4), получим угловое распределение аннигиляционных фотонов

$$d\sigma = \frac{r_e^2 m^2}{4\varepsilon|\mathbf{p}|}\left[\frac{\varepsilon^2 + \mathbf{p}^2(1+\sin^2\theta)}{\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2\cos^2\theta} - \frac{2\mathbf{p}^4\sin^4\theta}{(\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2\cos^2\theta)^2}\right] do. \qquad (88.13)$$

В ультрарелятивистском случае оно имеет симметричные максимумы в направлениях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Вблизи $\theta = 0$

$$d\sigma \approx \frac{r_e^2 m^2 do}{2\varepsilon^2(\theta^2 + m^2/\varepsilon^2)} \text{ (у. р.)}. \qquad (88.14)$$

Полное сечение получается из (88.6):

$$\sigma = \pi r_e^2 \frac{1-v^2}{4v}\left[\frac{3-v^4}{v}\ln\frac{1+v}{1-v} - 2(2-v^2)\right], \qquad (88.15)$$

где $v = |\mathbf{p}|/\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}/\varepsilon$ — скорость сталкивающихся частиц.

Мы не будем рассматривать здесь в деталях поляризационные эффекты при аннигиляции [1]. Остановимся лишь на некоторых качественных особенностях этих эффектов в предельных случаях больших и малых скоростей v сталкивающихся частиц. Будем рассматривать процесс в системе центра инерции.

В пределе $v \to 0$ отличный от нуля вклад в сечение даст лишь состояние с орбитальным моментом относительного движения $l = 0$. Но S-состояние системы «электрон + позитрон» имеет отрицательную четность (см. задачу к § 27). В нечетных же состояниях системы двух фотонов их поляризации взаимно ортогональны (см. § 9). Таким же свойством должны, следовательно, обладать в нерелятивистском случае и аннигиляционные фотоны.

Если электрон и позитрон поляризованы, то в том же нерелятивистском случае можно утверждать, что их аннигиляция возможна лишь при антипараллельных спинах. Действительно, поскольку аннигиляция происходит в S-состоянии, полный момент системы совпадает с полным спином частиц, равным 1 при параллельных спинах. Система же двух фотонов вообще не имеет состояний с полным моментом 1 (см. § 9).

В ультрарелятивистском пределе ($v \to 1$) аннигиляция продольно поляризованных (спиральных) электрона и позитрона возможна лишь при разных знаках их спиральностей [2]. В этом пределе спиральные частицы ведут себя как нейтрино (см. конец § 80), а потому аннигилирующие электрон и позитрон должны быть аналогичны нейтрино и антинейтрино, откуда и следует сделанное утверждение.

[1] См. *McMaster W. H.*//Rev. Mod. Phys. — 1961. — V. 33. — P. 8.

[2] Поскольку направления импульсов частиц в системе центра инерции противоположны, различным по знаку спиральностям отвечают параллельные спины.

Аннигиляция же электрона и позитрона с одинаковыми спиральностями возникает в ультрарелятивистском случае лишь при учете членов, содержащих m. По порядку величины амплитуда этого процесса отличается множителем m/ε от амплитуды аннигиляции пары с параллельными спинами; сечение же отличается соответственно множителем $(m/\varepsilon)^2$

Задача

Найти сечение образования электронной пары при столкновении двух фотонов (*G. Breit, J. A. Wheeler,* 1934).

Решение. Этот процесс обратен двухфотонной аннигиляции электронной пары. Квадраты амплитуды обоих процессов одинаковы, а их связи с сечением различаются лишь тем, что теперь $I^2 = (k_1k_2)^2 = t^2/4$. Поэтому

$$d\sigma_{\text{обр}} = d\sigma_{\text{анн}}(t - 4m^2)/t.$$

В системе центра инерции ($t = 4\varepsilon^2 = 4\omega^2$)

$$d\sigma_{\text{обр}} = v^2 d\sigma_{\text{анн}},$$

где v — скорость компонент пары. При интегрировании с целью нахождения полного сечения надо учесть, что ввиду нетождественности двух конечных частиц (электрон и позитрон) не надо делить результат на 2, как в случае аннигиляции. Поэтому (в системе центра инерции)

$$\sigma_{\text{обр}} = v^2\sigma_{\text{анн}} = \frac{\pi r_e^2}{2}(1 - v^2)\left\{(3 - v^4)\ln\frac{1+v}{1-v} - 2(2 - v^2)\right\}. \qquad (1)$$

В произвольной системе отсчета K, в которой два фотона k_1 и k_2 летят навстречу друг другу, имеем (из инвариантности k_1k_2)

$$\omega_1\omega_2 = \omega^2,$$

где ω — энергия фотонов в системе центра инерции. Поскольку в этой системе энергии фотонов и компонент пары совпадают, то $\omega = \varepsilon = m/\sqrt{1 - m^2}$. Поэтому для перехода к системе K надо положить в (1)

$$v = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_1\omega_2}}.$$

§ 89. Аннигиляция позитрония

В силу сохранения импульса аннигиляция электрона и позитрона в позитронии должна сопровождаться испусканием по крайней мере двух фотонов. Такой распад, однако, возможен (в основном состоянии) только для парапозитрония. В § 9 было показано, что полный момент системы двух фотонов не может быть равен 1. Поэтому ортопозитроний, находящийся в состоянии $^3S_1$, не может распасться на два фотона. Более того, поскольку в состоянии $^3S_1$ позитроний представляет собой зарядово-нечетную систему (см. задачу к § 27), то в силу теоремы Фарри (см. § 79) невозможен его распад и вообще на любое четное число фотонов. Напротив, в состоянии $^1S_0$ позитроний зарядово-четен, и потому запрещен распад парапозитрония на любое нечетное число фотонов.

Основным процессом, определяющим время жизни позитрония, является, таким образом, двухфотонная аннигиляция в случае парапозитрония и трехфотонная аннигиляция в случае ортопозитрония (*И. Я. Померанчук,* 1948). Вероятность распада можно связать с сечением аннигиляции свободной пары.

Импульсы электрона и позитрона в позитронии $\sim me^2/\hbar$, т. е. малы по сравнению с mc. Поэтому при вычислении вероятности аннигиляции можно перейти к пределу двух частиц, покоящихся в начале координат. Пусть $\overline{\sigma}_{2\gamma}$ — сечение двухфотонной аннигиляции свободной пары, усредненное по направлениям спинов обеих частиц. В нерелятивистском пределе, согласно (88.11) [1],

$$\overline{\sigma}_{2\gamma} = \pi \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{c}{v}, \tag{89.1}$$

где v — относительная скорость частиц. Мы получим вероятность аннигиляции $\overline{w}_{2\gamma}$, умножив $\overline{\sigma}_{2\gamma}$ на плотность потока, равную $v|\psi(0)|^2$. Здесь $\psi(r))$ — нормированная на 1 волновая функция основного состояния позитрония:

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad a = \frac{2\hbar^2}{me^2} \tag{89.2}$$

(боровский радиус позитрония a в два раза больше радиуса атома водорода из-за вдвое меньшей приведенной массы). Эта вероятность, однако, отвечает усредненному по спинам начальному состоянию. Между тем в позитронии из четырех возможных спиновых состоянии системы двух частиц способно к двухфотонной аннигиляции лишь одно (с полным спином 0). Поэтому средняя вероятность распада $\overline{w}_{2\gamma}$ связана с вероятностью распада парапозитрония w_0 соотношением $\overline{w}_{2\gamma} = w_0/4$. Таким образом,

$$w_0 = 4|\psi(0)|^2 (v\overline{\sigma}_{2\gamma})_{v\to 0}. \tag{89.3}$$

Подставив значения величин из (89.1),(89.2), получим для продолжительности жизни парапозитрония

$$\tau_0 = \frac{2\hbar}{mc^2\alpha^5} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ с}. \tag{89.4}$$

Обратим внимание на то, что ширина уровня $\Gamma_0 = \hbar/\tau_0$ мала по сравнению с его энергией

$$|E_{\text{осн}}| = \frac{me^4}{4\hbar^2} = mc^2 \frac{\alpha^2}{4}.$$

Именно это обстоятельство и позволяет рассматривать позитроний как квазистационарную систему.

[1]) Формулы (89.1)–(89.7) написаны в обычных единицах.

Аналогичным образом найдем, что вероятность распада ортопозитрония связана с усредненным по спинам сечением трехфотонной аннигиляции свободной пары соотношением

$$w_1 = \frac{4}{3}\overline{w}_{3\gamma} = \frac{4}{3}|\psi(0)|^2(v\overline{\sigma}_{3\gamma})_{v\to 0} \tag{89.5}$$

($^3/_4$ — относительный статистический вес состояния со спином 1). Забегая вперед, укажем, что

$$\overline{\sigma}_{3\gamma} = \frac{4(\pi^2-9)c}{3v}\alpha\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \tag{89.6}$$

Поэтому продолжительность жизни ортопозитрония

$$\tau_1 = \frac{9\pi}{2(\pi^2-9)}\frac{\hbar}{mc^2\alpha^6} = 1,4\cdot 10^{-7}\ \text{с}. \tag{89.7}$$

Неравенство $\Gamma_1 \ll |E_{\text{осн}}|$ в этом случае, разумеется, выполняется еще в большей степени, чем для парапозитрония.

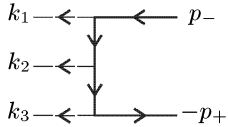
Вычислим сечение трехфотонной аннигиляции свободной пары (*A. Ore, J. L. Powell,* 1949).

Согласно (64.18) сечение рассматриваемого процесса в системе центра инерции выражается через квадрат амплитуды формулой

$$d\sigma_{3\gamma} = \frac{(2\pi)^4|M_{fi}|^2}{4I}\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3-2m)\times \\ \times\frac{d^3k_1d^3k_2d^3k_3}{(2\pi)^9 2\omega_1\cdot 2\omega_2\cdot 2\omega_3}, \tag{89.8}$$

причем, согласно (64.16), $I = 2m\frac{m}{2}v = m^2v$, где v — относительная скорость позитрона и электрона (которую предполагаем малой); $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ и ω_1, ω_2, ω_3 — волновые векторы и частоты возникающих фотонов; δ-функции выражают законы сохранения энергии и импульса. В силу этих законов три частоты ω_1, ω_2, ω_3 должны изображаться длинами сторон треугольника с периметром $2m$. Другими словами, величины импульсов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ и углы между ними полностью определяются заданием двух частот.

Трехфотонной аннигиляции отвечают диаграмма



и еще пять диаграмм, получающихся перестановкой фотонов k_1, k_2, k_3. Соответствующую амплитуду запишем в виде

$$M_{fi} = (4\pi)^{3/2}e_\lambda^{(3)*}e_\mu^{(2)*}e_\nu^{(1)*}\overline{u}(-p_+)Q^{\lambda\mu\nu}u(p_-), \tag{89.9}$$

где

$$Q^{\lambda\mu\nu} = \sum_{\text{пер}} \gamma^\lambda G(k_3 - p_+)\gamma^\mu G(p_- - k_1)\gamma^\nu, \tag{89.10}$$

причем сумма берется по всем перестановкам номеров фотонов 1, 2, 3 вместе с одновременными такими же перестановками соответствующих тензорных индексов $\lambda\mu\nu$. Квадрат модуля амплитуды, усредненный по поляризациям электрона и позитрона и просуммированный по поляризациям фотонов:

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{поляр}} |M_{fi}|^2 = (4\pi)^3 \operatorname{Sp}\left\{\rho_+ Q^{\lambda\mu\nu}\rho_-\overline{Q}_{\lambda\mu\nu}\right\}, \tag{89.11}$$

где

$$\rho_-=\frac{1}{2}(\gamma p_- + m), \quad \rho_+ = \frac{1}{2}(\gamma p_+ - m).$$

Матрицы $\overline{Q}^{\lambda\mu\nu}$ отличаются от матриц $Q^{\lambda\mu\nu}$ обращением порядка множителей в каждом члене суммы. В интересующем нас предельном случае малых скоростей электрона и позитрона можно положить их 3-импульсы $\mathbf{p}_-$ и $\mathbf{p}_+$ равными нулю, т. е. положить $\mathbf{p}_- = \mathbf{p}_+ = (m,\ 0)$. Тогда электронные функции Грина

$$G(p_- - k_1) = \frac{\gamma p_- - \gamma k_1 + m}{(p_- - k_1)^2 - m^2} \approx \frac{-\gamma k_1 + m(\gamma^0 + 1)}{-2m\omega_1}$$

и т. п., а матрицы плотности сводятся к

$$\rho_\pm = \frac{m}{2}(\gamma^0 \pm 1).$$

При перемножении в (89.11) возникает большое количество членов. Однако число подлежащих вычислению членов можно сильно уменьшить, если воспользоваться в полной мере симметрией по отношению к перестановкам фотонов. Так, достаточно перемножить шесть членов в $Q^{\lambda\mu\nu}$ (89.10) лишь с одним каким-либо членом в $\overline{Q}^{\lambda\mu\nu}$. В оставшихся, таким образом, шести следах тоже можно выделить некоторые части, переходящие друг в друга при различных перестановках фотонов. Возникающие при раскрытии следов произведения 4-векторов $p,\ k_1,\ k_2,\ k_3$ выражаются через частоты $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$. Поскольку $p = (m,\ 0)$, то $pk_1 = m\omega_1,\ \ldots$ Произведения же $k_1k_2,\ \ldots$ определяются из уравнения сохранения 4-импульса: $2p = k_1 + k_2 + k_3$; так, переписав это равенство в виде $2p - k_3 = k_1 + k_2$ и возведя его в квадрат, получим

$$k_1k_2 = 2m(m - \omega_3),\ \ldots \tag{89.12}$$

В результате все же довольно длинного вычисления получается

$$\frac{1}{4}\sum_{\text{поляр}} |M_{fi}|^2 = (4\pi)^3 e^6 \cdot 16\left[\left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2\right].$$

Подставив это выражение в (89.8), найдем дифференциальное сечение трехфотонной аннигиляции:

$$d\overline{\sigma}_{3\gamma} = \frac{e^6}{\pi^2 m^2 v}\left[\left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2\right] \times$$
$$\times\, \delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3)\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3-2m)\frac{d^3k_1d^3k_2d^3k_3}{\omega_1\omega_2\omega_3}. \quad (89.13)$$

Здесь надо еще исключить δ-функции. Первая из них устраняется интегрированием по d^3k_3, после чего заменяем остальные дифференциалы:

$$d^3k_1d^3k_2 \to 4\pi\omega_1^2 d\omega_1 \cdot 2\pi\omega_2^2 d(\cos\theta_{12})d\omega_2,$$

где θ_{12} — угол между $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$; подразумевается, что уже произведено интегрирование по направлениям $\mathbf{k}_1$ и азимуту $\mathbf{k}_2$ относительно $\mathbf{k}_1$. Дифференцируя равенство

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+2\omega_1\omega_2\cos\theta_{12}},$$

находим

$$d\cos\theta_{12} = \frac{\omega_3}{\omega_1\omega_2}d\omega_3.$$

Интегрированием по ω_3 устраняем вторую δ-функцию. В результате получим сечение для аннигиляции с образованием фотонов с заданными энергиями в виде

$$d\overline{\sigma}_{3\gamma} = \frac{1}{6}\frac{8e^6}{vm^2}\left\{\left(\frac{m-\omega_3}{\omega_1\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_2}{\omega_1\omega_3}\right)^2 + \left(\frac{m-\omega_1}{\omega_2\omega_3}\right)^2\right\}d\omega_1 d\omega_2 \quad (89.14)$$

(имея в виду дальнейшее интегрирование по частотам, мы ввели сюда множитель $^1/_6$, учитывающий тождественность фотонов (ср. примеч. на с. 286)).

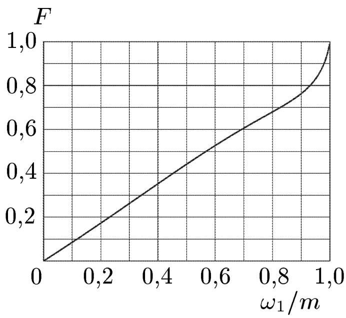


Рис. 14

Каждая из частот $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ может пробегать значения между 0 и m (значение m достигается двумя частотами, когда третья равна нулю). При заданном ω_1 частота ω_2 меняется между $m-\omega_1$ и m. Интегрируя (89.14) по ω_2 в этих пределах, получаем спектральное распределение фотонов распада:

$$d\overline{\sigma}_{3\gamma} = \frac{8e^6}{3vm^3}F(\omega_1)d\omega_1,$$

$$F(\omega_1) = \frac{\omega_1(m-\omega_1)}{(2m-\omega_1)^2} + \frac{2m-\omega_1}{\omega_1} + \left[\frac{2m(m-\omega_1)}{\omega_1^2} - \frac{2m(m-\omega_1)^2}{(2m-\omega_1)^3}\right]\ln\frac{m-\omega_1}{m}.$$

Функция $F(\omega_1)$ монотонно возрастает от нуля при $\omega_1 = 0$ до 1 при $\omega_1 = m$; на рис. 14 изображен ее график.

Полное сечение аннигиляции получается интегрированием (89.14) по обеим частотам:

$$\overline{\sigma}_{3\gamma} = \frac{4e^6}{3vm^2} \cdot 3 \int\limits_0^m \int\limits_{m-\omega_1}^m \frac{(\omega_1 + \omega_2 - m)^2}{\omega_1^2 \omega_2^2} d\omega_1 d\omega_2.$$

Стоящий здесь двойной интеграл равен $(\pi^2 - 9)/3$, и мы приходим к приведенной выше формуле (89.6).

§ 90. Магнитотормозное излучение

Согласно классической теории (см. II, § 74) ультрарелятивистский электрон, движущийся в постоянном магнитном поле H, излучает квазинепрерывный спектр с максимумом, приходящимся на частоту

$$\omega \sim \omega_0 \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3, \tag{90.1}$$

где

$$\omega_0 = \frac{v|e|H}{|\mathbf{p}|} \approx \frac{|e|H}{\varepsilon} \tag{90.2}$$

— частота обращения электрона с энергией ε по круговой орбите (в плоскости, перпендикулярной полю) [1]. Будем считать, что продольная (вдоль $\mathbf{H}$) составляющая скорости электрона равна нулю; этого всегда можно добиться надлежащим выбором системы отсчета.

Квантовые эффекты в магнитотормозном излучении имеют двоякое происхождение: квантование движения электрона и квантовая отдача при испускании фотона. Последняя определяется отношением $\hbar\omega/\varepsilon$, и условие применимости классической теории требует его малости. В этой связи удобно ввести параметр

$$\chi = \frac{H}{H_0} \frac{|\mathbf{p}|}{m} \approx \frac{H\varepsilon}{H_0 m} \approx \frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3, \tag{90.3}$$

где $H_0 = m^2/(|e|\hbar) (= m^2c^3/(|e|\hbar)) = 4{,}4 \cdot 10^{13}$ Гс. В классической области $\chi \sim \hbar\omega/\varepsilon \ll 1$. В случае $\chi \gtrsim 1$ энергия излученного фотона $\hbar\omega \sim \varepsilon$, причем при $\chi \gg 1$ (как мы увидим в дальнейшем) существенная область спектра простирается до частот, при которых энергия электрона после испускания

$$\varepsilon' \sim m\frac{H_0}{H} \ll \varepsilon. \tag{90.4}$$

[1]) В этом параграфе полагаем $c = 1$, но сохраняем множители $\hbar$.

Для того чтобы электрон оставался ультрарелятивистским, поле должно удовлетворять условию

$$\frac{H}{H_0} \ll 1. \tag{90.5}$$

Что касается квантования самого движения электрона, то оно характеризуется отношением $\hbar\omega_0/\varepsilon$; $\hbar\omega_0$ есть расстояние между соседними уровнями энергии при движении в магнитном поле. Поскольку

$$\frac{\hbar\omega_0}{\varepsilon} = \frac{H}{H_0}\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2,$$

то ввиду (90.5) $\hbar\omega_0 \ll \varepsilon$, т. е. движение электрона квазиклассично вне зависимости от значения χ. Другими словами, можно пренебречь некоммутативностью операторов динамических переменных электрона друг с другом (величины $\approx \hbar\omega_0/\varepsilon$), учитывая в то же время их некоммутативность с операторами фотонного поля (величины $\sim \hbar\omega_0/\varepsilon$) [1]).

Квазиклассические волновые функции стационарных состояния электрона во внешнем поле могут быть представлены в символическом виде

$$\psi = (2\widehat{H})^{-1/2} u(\widehat{p}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}t\right)\varphi(\mathbf{r}), \tag{90.6}$$

где $\varphi(\mathbf{r}) \sim \exp(iS/\hbar)$ — квазиклассические волновые функции бесспиновой частицы ($S(\mathbf{r})$ — ее классическое действие); $u(\widehat{p})$ — операторный биспинор

$$u(\widehat{p}) = \begin{pmatrix} (\widehat{H}+m)^{1/2} w \\ (\widehat{H}+m)^{-1/2}(\boldsymbol{\sigma}\widehat{\mathbf{p}}) w \end{pmatrix},$$

получающийся из биспинорной амплитуды плоской волны $u(p)$ (23.9) заменой $\mathbf{p}$ и ε операторами [2])

$$\widehat{\mathbf{p}} = \widehat{\mathbf{P}} - e\mathbf{A} = -i\hbar\nabla - e\mathbf{A}, \quad \widehat{H} = (\widehat{\mathbf{p}}^2 + m^2)^{1/2},$$

$\mathbf{P}$ — обобщенный импульс частицы в поле с векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$; порядок, в котором стоят операторные множители

[1]) Полное решение квантовой задачи о магнитотормозном излучении было дано *Н. П. Клепиковым* (1954), а первая квантовая поправка к классической формуле — *А. А. Соколовым, Н. П. Клепиковым* и *И. М. Терновым* (1952). Излагаемый в этом параграфе вывод, использующий явным образом квазиклассичность движения, принадлежит *В. Н. Байеру* и *В. М. Каткову* (1967). Аналогичный метод был использован ранее *Швингером* (*J. Schwinger*, 1967) для получения первой квантовой поправки в интенсивности излучения.

[2]) В этом параграфе (в отличие от гл. IV) обобщенный импульс обозначается прописной буквой $\mathbf{P}$; обозначение же $\mathbf{p}$ применяется для обычного (кинетического) импульса.

в ψ, несуществен, поскольку их некоммутативностью мы пренебрегаем; спиновое состояние электрона определяется 3-спинором w).

Для вычисления вероятности излучения фотона в квазиклассическом случае удобнее исходить не из окончательной формулы теории возмущений (44.3), а из формулы, в которой еще не произведено интегрирование по времени. Для полной (за все время) дифференциальной вероятности имеем [1])

$$dw = \sum_f |a_{fi}|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad a_{fi} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V_{fi}(t)dt \tag{90.7}$$

(ср. III, (41.2)); суммирование производится по конечным состояниям электрона.

Использовав (90.6), запишем матричный элемент для испускания фотона ω, $\mathbf{k}$ в операторном виде

$$V_{fi}(t) = -\frac{e\sqrt{4\pi}}{\sqrt{2\hbar\omega}} \int \left[\varphi_f^* \exp\left(\frac{i}{H}\widehat{H}t\right) \frac{u^+(\widehat{p})}{(2\widehat{H})^{1/2}}\right] \times \\ \times e^{i\omega t - i\mathbf{kr}}(\mathbf{e}^*\boldsymbol{\alpha})\frac{u(\widehat{p})}{(2\widehat{H})^{1/2}} \exp\left(-\frac{i}{H}\widehat{H}t\right) \varphi_i d^3x,$$

где в квадратных скобках операторы действуют налево; поле фотона выбрано в трехмерно поперечной калибровке. Множители $\exp(\pm i\widehat{H}t/\hbar)$ превращают стоящие между ними шредингеровские операторы в зависящие явно от времени операторы гейзенберговского представления. Запишем $V_{fi}(t)$ в виде

$$V_{fi}(t) = e\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega}}\langle f|Q(t)|i\rangle e^{i\omega t},$$

где $Q(t)$ обозначает гейзенберговский оператор

$$\widehat{Q}(t) = \frac{u_f^+(\widehat{p})}{(2\widehat{H})^{1/2}}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^*)e^{-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}(t)}\frac{u_i(\widehat{p}\,)}{(2\widehat{H})^{1/2}}, \tag{90.8}$$

а матричный элемент берется по отношению к функциям φ_f, φ_i.

---

[1]) Подставив

$$V_{fi}(t) = V_{fi}\exp(i\omega_{fi}t),$$

получим $a_{fi} = 2\pi V_{fi}\delta(\omega_{fi})$. Учитывая, что квадрат δ-функции надо понимать как

$$|\delta(\omega)|^2 \to (t/2\pi)\delta(\omega),$$

где t — полное время наблюдения (ср. вывод (64.5)), получаем из (90.7) для вероятности в единицу времени формулу (44.3).

Суммирование в (90.7) производится по всем конечным волновым функциям φ_f; оно осуществляется с помощью равенства

$$\sum_f \varphi_f^*(\mathbf{r}')\varphi_f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

выражающего полноту системы функций φ_f. В результате получим

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega}\frac{d^3k}{4\pi^2}\int dt_1 \int dt_2 \cdot e^{i\omega(t_1-t_2)}\langle i|Q^+(t_2)Q(t_1)|i\rangle. \tag{90.9}$$

Если интегрирование производится по достаточно большому промежутку времени, можно ввести вместо t_1, t_2 новые переменные

$$\tau = t_2 - t_1, \quad t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

и в интеграле по dt рассматривать подынтегральное выражение как вероятность испускания в единицу времени. Умножив ее на $\hbar\omega$, получим интенсивность

$$dI = \frac{e^2}{4\pi^2}d^3k \int e^{-i\omega\tau}\langle i|Q^+\Big(t+\frac{\tau}{2}\Big)Q\Big(t-\frac{\tau}{2}\Big)|i\rangle d\tau. \tag{90.10}$$

Ультрарелятивистский электрон излучает в узкий конус под углами $\theta \sim m/\varepsilon$ относительно его скорости $\mathbf{v}$. Поэтому излучение в заданном направлении $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$ формируется на участке траектории, на котором $\mathbf{v}$ поворачивается на угол $\sim m/\varepsilon$. Этот участок проходится за время τ такое, что $\tau|\dot{\mathbf{v}}| \approx \tau\omega_0 \sim m/\varepsilon \ll 1$. Именно эта область даст основной вклад в интеграл по τ. Поэтому в дальнейших вычислениях мы будем систематически разлагать все величины по степеням $\omega_0\tau$. При этом, однако, может оказаться необходимым сохранять более чем один старший член разложения ввиду сокращений, происходящих из-за того, что $1 - \mathbf{nv} \sim \theta^2 \sim (m/\varepsilon)^2$.

Если привести оператор $\widehat{Q}^+\widehat{Q}$ к виду произведения коммутативных (с требуемой точностью) операторов, то взятие диагонального матричного элемента $\langle i|\ldots|i\rangle$ сведется к замене этих операторов классическими значениями (функциями времени) соответствующих величин. Эта цель достигается следующим образом.

Согласно сказанному выше, в выражении для $\widehat{Q}(t)$ надо учитывать некоммутативность электронных операторов лишь с оператором $\exp[-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}(t)]$, связанным с фотонным полем. Имеем

$$\begin{gathered}\widehat{\mathbf{p}}\exp(-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}) = \exp(-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}})(\widehat{\mathbf{p}} - \hbar\mathbf{k}),\\ H(\widehat{\mathbf{p}})\exp(-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}) = \exp(-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}})H(\widehat{\mathbf{p}} - \hbar\mathbf{k})\end{gathered} \tag{90.11}$$

Эти формулы — следствие того, что $\exp(-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}})$ есть оператор сдвига в импульсном пространстве. С помощью (90.11) выносим в (90.8) оператор $\exp(-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}(t))$ налево и записываем $\widehat{Q}(t)$ в виде

$$\widehat{Q}(t) = \exp\bigl[-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}(t)\bigr]\widehat{R}(t), \quad \widehat{R}(t) = \frac{u_f^+(\widehat{p}')}{(2\widehat{H}')^{1/2}}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^*)\frac{u_i(\widehat{p})}{(2\widehat{H})^{1/2}}, \tag{90.12}$$

где $\widehat{H}' = \widehat{H} - \hbar\omega$, $\widehat{\mathbf{p}}' = \widehat{\mathbf{p}} - \hbar\mathbf{k}$.

Теперь

$$\widehat{Q}_2^+\widehat{Q}_1 = \widehat{R}_2\exp(i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}_2)\exp(-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}_1)\widehat{R}_1 \tag{90.13}$$

(здесь и ниже индексы 1 и 2 отмечают значения величины в моменты времени $t_1 = t - \tau/2$ и $t_2 = t + \tau/2$). Остается вычислить произведение двух некоммутативных операторов $\exp(i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}_2)$ и $\exp(-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}_1)$. Само это произведение уже можно считать коммутативным с остальными множителями.

Обозначим

$$\widehat{L}(\tau) = \exp(-i\omega\tau)\exp(i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}_2)\exp(-i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}_1); \tag{90.14}$$

именно эта комбинация операторов входит в (90.10). По смыслу оператора $\exp\left(i\widehat{H}\tau/\hbar\right)$ как оператора сдвига по времени имеем

$$\exp(i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}_2) = \exp\left(i\widehat{H}\frac{\tau}{\hbar}\right)\exp(i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}_1)\exp\left(-i\widehat{H}\frac{\tau}{\hbar}\right).$$

Подставив это выражение в (90.14) и учтя, что $\exp(i\mathbf{k}\widehat{\mathbf{r}}_1)$ есть оператор сдвига в импульсном пространстве, преобразуем L к виду

$$\widehat{L}(\tau) = \exp\left\{i[\widehat{H} - \hbar\omega]\frac{\tau}{\hbar}\right\}\exp\left\{-i\widehat{H}(\widehat{\mathbf{p}}_1 - \hbar\mathbf{k})\frac{\tau}{\hbar}\right\}. \tag{90.15}$$

Продифференцировав (90.15) по τ и снова использовав свойства оператора сдвига по времени, запишем [1])

$$\frac{d\widehat{L}}{d\tau} = \frac{i}{\hbar}\exp\left\{i[\widehat{H} - \hbar\omega]\frac{\tau}{\hbar}\right\}[\widehat{H} - \hbar\omega - \widehat{H}(\widehat{\mathbf{p}}_1 - \hbar\mathbf{k})] \times \\ \times \exp\left\{-i\widehat{H}(\widehat{\mathbf{p}}_1 - \hbar\mathbf{k})\frac{\tau}{\hbar}\right\} = \frac{\tau}{\hbar}[\widehat{H} - \hbar\omega - \widehat{H}(\widehat{\mathbf{p}}_2 - \hbar\mathbf{k})]\widehat{L}(\tau). \tag{90.16}$$

После того как некоммутативность операторов таким образом использована, можно заменить вое операторы соответствующими классическими величинами (в том числе гамильтониан

---

[1]) В силу сохранения энергии гейзенберговские операторы $\widehat{H}(\widehat{\mathbf{p}}_1)$ и $\widehat{H}(\widehat{\mathbf{p}}_2)$ совпадают, поэтому в таких случаях аргумент у $\widehat{H}$ не пишем. Но, конечно, $\widehat{H}(\widehat{\mathbf{p}}_1 - \hbar\mathbf{k})$ отнюдь не совпадает с $\widehat{H}(\widehat{\mathbf{p}}_2 - \hbar\mathbf{k})$.

$\widehat{H}$ энергией электрона ε). Имеем тождественно

$$\varepsilon(\mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}) = [(\mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k})^2 + m^2]^{1/2} = [(\varepsilon - \hbar\omega)^2 + 2\hbar(\omega\varepsilon - \mathbf{k}\mathbf{p}_2)]^{1/2}.$$

Разность

$$\omega\varepsilon - \mathbf{k}\mathbf{p}_2 = \omega\varepsilon(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_2)$$

мала, поскольку, согласно сказанному выше, $1 - \mathbf{v}\mathbf{n} \sim (m/\varepsilon)^2$. С точностью до первого порядка по этой разности имеем

$$\varepsilon(\mathbf{p}_2 - \hbar\mathbf{k}) \approx \varepsilon' + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\hbar(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_2),$$

где $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$. Из (90.16) находим теперь дифференциальное уравнение для функции $L(\tau)$:

$$i\hbar\frac{dL}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\hbar(\omega - \mathbf{v}_2\mathbf{k})L. \tag{90.17}$$

Это уравнение должно решаться с очевидным начальным условием $L(0) = 1$. Заметив, что

$$\int_0^\tau \mathbf{v}_2 d\tau = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

получим

$$L(\tau) = \exp\left\{i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\mathbf{k}\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}\mathbf{r}_1 - \omega\tau)\right\}. \tag{90.18}$$

До сих пор мы не использовали конкретного вида траектории электрона. Выразим теперь $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ в (90.18) через $\mathbf{p}_1$ с помощью уравнения движения электрона в плоскости, перпендикулярной полю $\mathbf{H}$ (см. II, § 21):

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{eH}\sin\frac{eH\tau}{\varepsilon} + \frac{[\mathbf{p}_1\mathbf{H}]}{eH^2}\left(1 - \cos\frac{eH\tau}{\varepsilon}\right).$$

Разлагая по степеням τ, имеем отсюда

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \omega\tau \approx \omega\tau\left\{(\mathbf{v}_1\mathbf{n} - 1) + \tau\frac{e\mathbf{n}[\mathbf{p}_1\mathbf{H}]}{2\varepsilon^2} - \tau^2\frac{e^2H^2}{6\varepsilon^2}\right\} \tag{90.19}$$

(в последнем члене положено $\mathbf{n}\mathbf{v}_1 \approx 1$).

Преобразуем остальные множители в (90.13). Прямым раскрытием произведения в $R(t)$ (с матрицей $\boldsymbol{\alpha}$ из (21.20)) находим

$$R(t) = w_f^*\mathbf{e}^*(A + i[\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}])w_i,$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p}}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2\varepsilon'}\mathbf{v}, \tag{90.20}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{p}}{\varepsilon + m} - \frac{\mathbf{p}'}{\varepsilon' + m}\right) \approx \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon'}\left(\mathbf{n} - \mathbf{v} + \mathbf{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$

где $p'(t) = p(t) - \hbar\mathbf{k}$; опущены члены высших порядков по m/ε. Таким образом, окончательно имеем

$$\exp(-i\omega t)\langle i|Q_2^+Q_1|i\rangle = R_2^*R_1L(\tau), \tag{90.21}$$

$$R_2^*R_1 = \mathrm{Sp}\,\frac{1+\boldsymbol{\zeta}_i\boldsymbol{\sigma}}{2}((\mathbf{A}_2 - i[\mathbf{B}_2\boldsymbol{\sigma}])\mathbf{e})\frac{1+\boldsymbol{\zeta}_f\boldsymbol{\sigma}}{2}((\mathbf{A}_1 - i[\mathbf{B}_1\boldsymbol{\sigma}])\mathbf{e}^*).$$

Множители $(1+\boldsymbol{\zeta\sigma})/2$ — двухрядные поляризационные матрицы плотности начального и конечного электронов.

Рассмотрим интенсивность излучения, просуммированную по поляризациям фотона и конечного электрона и усредненную по поляризациям начального электрона. В результате указанных операций получим после простого вычисления [1])

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{поляр}} R_2^*R_1 = \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{2\varepsilon'^2}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon'}\right)^2\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^2.$$

С требуемой точностью

$$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}^2 - \frac{\tau^2}{4}\dot{\mathbf{v}}^2 + \frac{\tau^2}{4}\mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}} = 1 - \frac{m^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\omega_0^2\tau^2.$$

Подставив эти выражения в (90.21), а затем в (90.10), получим

$$dI = -\frac{e^2}{4\pi^2}\omega^2 d\omega do_{\mathbf{n}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m^2}{\varepsilon\varepsilon'} + \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{4\varepsilon'^2}\omega_0^2\tau^2\right)\exp\left\{-\frac{i\omega\tau\varepsilon}{\varepsilon'}\left(1 - \mathbf{vn} + \frac{\tau^2}{24}\omega_0^2\right)\right\}d\tau. \tag{90.22}$$

Эта формула дает спектральное и угловое распределение интенсивности излучения.

Для нахождения спектрального распределения произведем интегрирование по $do_{\mathbf{n}}$. Выбирая направление $\mathbf{v}$ в качестве полярной оси с углом ϑ между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, имеем

$$\mathbf{nv} = v\cos\vartheta, \quad do_{\mathbf{n}} = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi,$$

---

[1]) Здесь использовано также следующее обстоятельство. При суммировании по $\mathbf{e}$:

$$\sum_{\mathbf{e}} = (\mathbf{v}_1\mathbf{e})(\mathbf{v}_2\mathbf{e}^*) = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1\mathbf{n})(\mathbf{v}_2\mathbf{n}).$$

Но при подстановке (90.21) в (90.10) можно произвести интегрирование по частям, заметив, что

$$(\mathbf{v}_1\mathbf{n})\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\varepsilon'}\mathbf{kr}_1\right) = \frac{i\varepsilon'}{\varepsilon\omega}\frac{d}{dt_1}\exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\varepsilon'}\mathbf{kr}_1\right)$$

и аналогично для $\mathbf{v}_2\mathbf{n}$. В результате найдем, что для дальнейшего интегрирования $\mathbf{v}_1\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}_2\mathbf{n}$ можно заменить здесь единицей.

и интеграл

$$\int \exp\left(\frac{i\omega\tau\varepsilon}{\varepsilon'}\mathbf{nv}\right) do_{\mathbf{n}} = \frac{2\pi\varepsilon'}{i\omega\tau\varepsilon v}\left\{\exp\left(\frac{i\omega\tau\varepsilon v}{\varepsilon'}\right) - \exp\left(-\frac{i\omega\tau\varepsilon v}{\varepsilon'}\right)\right\}.$$

При подстановке этого выражения в (90.22) мы получим два члена, показатели экспонент которых имеют разный порядок величины. Показатель экспоненты второго члена оказывается гораздо большим, поскольку содержит множитель $1+v \approx 2$ и вместо малого множителя $1-v \approx m^2/(2\varepsilon^2)$ в первом члене. Сместив контур интегрирования по τ в нижнюю полуплоскость комплексного переменного τ, можно сделать второй член малым и пренебречь им. После этого можно снова совместить контур интегрирования с вещественной осью. Из вывода видно, однако, что имеющийся теперь полюс в подынтегральном выражении при $\tau = 0$ должен обходиться снизу. Таким образом,

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{ie^2\omega}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2\tau} + \frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{4\varepsilon\varepsilon'}\omega_0^2\tau^2\right)\exp\left\{-\frac{i\omega\tau\varepsilon}{\varepsilon'}\left(1 - v + \frac{\tau^2}{24}\omega_0^2\right)\right\}d\tau,$$

причем контур интегрирования выбирается указанным выше способом. Используя интегральное представление функции Эйри Φ (см. III, § b), нетрудно показать, что первый член сводится к интегралу от функции Эйри, а второй — к производной от нее. Окончательно находим

$$\frac{dI}{d\omega} = -\frac{e^2m^2\omega}{\sqrt{\pi}\varepsilon^2}\left[\int\limits_x^{\infty}\Phi(\xi)d\xi + \left(\frac{2}{x} + \frac{\hbar\omega}{\varepsilon}\chi x^{1/2}\right)\Phi'(x)\right], \qquad (90.23)$$

$$x = \left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon'\chi}\right)^{1/2} = \frac{m^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{\varepsilon\omega}{\varepsilon'\omega_0}\right)^{2/3} \qquad (90.24)$$

(*А. И. Никишов, В. И. Ритус,* 1967). Максимум в частотном распределении лежит при $x \sim 1$; при $\chi \ll 1$ отсюда следует (90.1), а при $\chi \gg 1$ — (90.4). В классическом предельном случае имеем $\hbar\omega \ll \varepsilon$, так что $\varepsilon' \approx \varepsilon$, $x \approx (\omega/\omega_0)^{2/3}(m/\varepsilon)^2$; второй член в круглых скобках мал и (90.23) переходит в классическую формулу (74.13) (см. II).

На рис. 15 изображены графики спектрального распределения при различных значениях χ. Отложена величина

$$\frac{1}{{}^3\!/_2 I_{\text{кл}}}\frac{dI}{d(\omega/\omega_c)}$$

как функция отношения ω/ω_c, где

$$\hbar\omega_c = \frac{\varepsilon\chi}{{}^2\!/_3 + \chi}, \qquad I_{\text{кл}} = \frac{2e^2m^2\chi^2}{3\hbar^2} = \frac{2e^4H^2\varepsilon^2}{3m^4}.$$

Величина $I_{\text{кл}}$ есть классическая полная интенсивность излучения (ср. II, (74.2)).

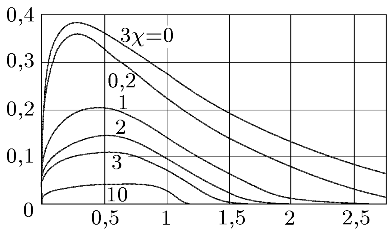


Рис. 15

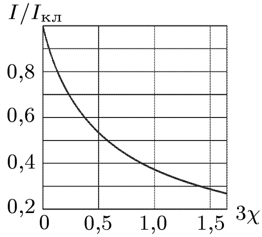


Рис. 16

Для вычисления полной интенсивности излучения выражение (90.23) надо проинтегрировать по ω от 0 до ε. Перейдем к интегрированию по x, заметив, что

$$\hbar\omega = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{1+\chi x^{3/2}}\right),$$

а следовательно, x меняется от 0 до ∞. Произведя в первом члене в (90.23) дважды интегрирование по частям, получим

$$I = -\frac{e^2m^2\chi^2}{2\sqrt{\pi}\hbar^2}\int\limits_0^\infty \frac{4+5\chi x^{3/2}+4\chi^2x^3}{(1+\chi x^{3/2})^4}\Phi'(x)x\,dx. \tag{90.25}$$

На рис. 16 изображен график функции $I(\chi)/I_{\text{кл}}$.

При $\chi \ll 1$ в интеграле существенна область $x \sim 1$. Разлагая подынтегральное выражение по χ и интегрируя это разложение с помощью формулы

$$\int\limits_0^\infty x^\nu \Phi'(x)\,dx = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}3^{(4\nu-1)/6}\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+1\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{3}+\frac{1}{3}\right),$$

получаем

$$I = I_{\text{кл}}\left(1 - \frac{55\sqrt{3}}{16}\chi + 48\chi^2 - \ldots\right). \tag{90.26}$$

При $\chi \gg 1$ в интеграле существенна область, в которой $\chi x^{3/2} \sim 1$, т. е. $x \ll 1$. В первом приближении можно поэтому заменить $\Phi'(x)$ на $\Phi'(0) = -3^{1/6}\Gamma(2/3)/(2\sqrt{\pi})$, после чего интегрирование дает

$$I \approx \frac{32\Gamma(2/3)e^2m^2}{243\hbar^2}(3\chi)^{2/3} = 0,37\frac{e^2m^2}{\hbar^2}\left(\frac{H\varepsilon}{H_0 m}\right)^{2/3}. \tag{90.27}$$

Магнитотормозное излучение приводит к возникновению поляризации движущихся электронов (*А. А. Соколов, И. М. Тернов,*

1963). Для рассмотрения этого вопроса надо найти вероятность радиационного перехода с обращением направления спина.

Положив в (90.21) $\boldsymbol{\zeta}_i = -\boldsymbol{\zeta}_f \equiv \boldsymbol{\zeta}$, $|\boldsymbol{\zeta}| = 1$, получим

$$R_2^* R_1 = (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2) - (\mathbf{e}^*\mathbf{B}_1)(\mathbf{e}\mathbf{B}_2) - \\ - (\mathbf{e}^*[\mathbf{B}_1\boldsymbol{\zeta}])(\mathbf{e}[\mathbf{B}_2\boldsymbol{\zeta}]) - i(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{e}^*)(\mathbf{e}[\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2]).$$

Суммирование по поляризациям фотона дает после простых преобразований

$$\sum_{\mathbf{e}} R_2^* R_1 = (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)(1 - (\boldsymbol{\zeta}\mathbf{n})^2) + (\boldsymbol{\zeta}\mathbf{n})(\mathbf{n}\mathbf{B}_1)(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{B}_2) + \\ + (\boldsymbol{\zeta}\mathbf{n})(\mathbf{n}\mathbf{B}_2)(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{B}_1) - i(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\boldsymbol{\zeta}))[\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2]. \quad (90.28)$$

Будем предполагать, что $\chi \ll 1$, и будем искать лишь главный член разложения вероятности по степеням $\hbar$. Поскольку выражение (90.28) (с $\mathbf{B}$ из (90.20)) уже содержит $\hbar^2$, то все остающиеся (в том числе в показателе экспоненты в (90.18)) величины ε' можно заменить на ε.

Разложив

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(\mathbf{n} - \mathbf{v} + \frac{\tau}{2}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$
$$\mathbf{B}_2 = \frac{\omega}{2\varepsilon}\left(\mathbf{n} - \mathbf{v} - \frac{\tau}{2}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{v}\frac{m}{\varepsilon}\right),$$
$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \tau\mathbf{v} + \frac{\tau^3}{24}\ddot{\mathbf{v}}$$

и подставив (90.28) в (90.21) и затем в (90.10), найдем дифференциальную вероятность перехода в единицу времени ($dw = dI/\hbar\omega$). Она интегрируется с помощью формулы

$$\int f(k_\mu) e^{-ikx}\frac{d^3k}{\omega} = -f(i\partial_\mu)\frac{4\pi}{(x_0 - i0)^2 - \mathbf{x}^2}, \quad (90.29)$$

где в данном случае

$$x_0 = \tau, \quad \mathbf{x} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad x^2 = x_0^2 - \mathbf{x}^2 = \tau^2\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2} + \frac{\tau^2\omega_0^2}{12}\right).$$

Вычисление приводит к результату

$$w = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\hbar^2}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5 \omega_0^3 \oint \frac{dz}{(1 + z^2/12)^3} \times \\ \times \left[\frac{3}{z^4} - \frac{5}{12z^2} + \left(\frac{1}{z^4} + \frac{5}{12z^2}\right)(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{v})^2 - \frac{2i}{z^3\omega_0}(\boldsymbol{\zeta}[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v}])\right],$$

где сделана замена: $z = \tau\omega_0\varepsilon/m$, а контур интегрирования по z проходит ниже вещественной оси и замыкается в нижней полуплоскости. Выполнив это последнее интегрирование, получим

окончательно полную вероятность радиационного перехода с обращением спина:

$$w = \frac{5\sqrt{3}\alpha}{16}\frac{\hbar^2}{m^2}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^5\omega_0^3\left(1 - \frac{2}{9}\zeta_{||}^2 - \frac{8\sqrt{3}}{15}\frac{e}{|e|}\zeta_\perp\right), \tag{90.30}$$

где $\zeta_{||} = \boldsymbol{\zeta}\mathbf{v}$, $\zeta_\perp = \boldsymbol{\zeta}\mathbf{H}/H$. Эта формула пригодна как для электронов ($e < 0$), так и для позитронов ($e > 0$).

Вероятность (90.30) не зависит от знака продольной поляризации $\zeta_{||}$, но зависит от знака $\zeta_\perp$. Поэтому и возникающая в результате излучения поляризация поперечна [1]). Для электронов вероятность перехода из состояния со спином «по полю» ($\zeta_\perp = 1$) в состояние со спином «против поля» больше вероятности обратного перехода. Поэтому радиационная поляризация электронов направлена против поля, а ее степень в стационарном состоянии равна (при $\zeta_{||} = 0$)

$$\frac{w(\zeta_\perp = -1) - w(\zeta_\perp = 1)}{w(\zeta_\perp = -1) + w(\zeta_\perp = 1)} = \frac{8\sqrt{3}}{15} = 0,92.$$

Позитроны поляризуются (с такой же степенью) в направлении по полю.

§ 91. Образование пар фотоном в магнитном поле

Образование электрон-позитронной пары фотоном в магнитном поле и магнитотормозное излучение — два перекрестных канала одной и той же реакции. Поэтому амплитуда M_{fi} процесса образования пары получается из амплитуды тормозного излучения просто путем замены

$$\varepsilon,\, \mathbf{p} \to -\varepsilon_+,\, -\mathbf{p}_+; \quad \varepsilon',\, \mathbf{p}' \to -\varepsilon_-,\, -\mathbf{p}_-; \quad \omega,\, \mathbf{k} \to -\omega,\, -\mathbf{k} \tag{91.1}$$

(здесь ε_-, $\mathbf{p}_-$ и ε_+, $\mathbf{p}_+$ — энергии и импульсы электрона и позитрона в паре; ε, $\mathbf{p}$ и ε', $\mathbf{p}'$ — начальные и конечные энергии и импульсы электрона при тормозном излучении). В терминах углов и абсолютных значений преобразование импульсов есть

$$|\mathbf{p}| \to |\mathbf{p}_+|,\ |\mathbf{p}'| \to |\mathbf{p}_-|,\ \theta \to \pi - \theta_+,\ \theta' \to \theta_-,\ \varphi \to \varphi - \pi, \tag{91.2}$$

где $\theta_\pm$ — углы между $\mathbf{p}_\pm$ и $\mathbf{k}$, φ — угол между плоскостями $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{k}$, $\mathbf{p}_-$. В случае тормозного излучения сечение процесса выра-

[1]) Это обстоятельство, впрочем, ясно заранее: аксиальный вектор возникающей поляризации может быть направлен лишь вдоль единственного фигурирующего в задаче аксиального вектора $\mathbf{H}$.

жается через амплитуду формулой [1])

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8|\mathbf{p}|\varepsilon'\omega}\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)\frac{d^3p'd^3k}{(2\pi)^5} \tag{91.3}$$

(см. (64.25)); δ-функция устраняется интегрированием по ε'. Помня, что в данном случае $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{k}$ — независимые переменные, и замечая, что

$$d^3p' = |\mathbf{p}'|\varepsilon' d\varepsilon' do', \quad d^3k = \omega^2 d\omega do_{\mathbf{k}},$$

надо просто заменить

$$\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega)d^3p'd^3k \to \omega^2|\mathbf{p}'|\varepsilon' do_{\mathbf{k}}do'd\omega.$$

Тогда

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{\omega|\mathbf{p}'|}{8(2\pi)^5|\mathbf{p}|}do_{\mathbf{k}}do'd\omega. \tag{91.4}$$

В случае же образования пары фотоном сечение выражается через амплитуду согласно

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{8\omega\varepsilon_-\varepsilon_+}\delta(\omega - \varepsilon_+ - \varepsilon_-)\frac{d^3p_+d^3p_-}{(2\pi)^5}$$

или, после исключения δ-функции:

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}_+||\mathbf{p}_-|}{8(2\pi)^5\omega}do_+do_-d\varepsilon_+. \tag{91.5}$$

Сравнив с (91.4), мы увидим, что для получения сечения образования пары из сечения тормозного излучения надо произвести в последнем замену (91.1), умножить его на

$$\frac{\mathbf{p}_+^2}{\omega^2}\frac{d\varepsilon_+}{d\omega} \tag{91.6}$$

и заменить $do'do_{\mathbf{k}}$ на do_+do_-.

В ультрарелятивистском случае ($\omega \gg m$) [2]) это можно сделать в формулах, полученных в предыдущем параграфе. При этом предполагается, что обе частицы пары являются ультрарелятивистскими; легко проследить, что в таком случае остаются справедливыми все использованные в § 90 приближения.

В частности, вероятность рождения пары неполяризованным фотоном, просуммированную по проекциям спина электрона и позитрона и проинтегрированную по направлениям вылета электрона, получим, произведя замену (91.1) в формуле (90.22) (точ-

---

[1]) В этом параграфе снова полагаем не только $c = 1$, но и $\hbar = 1$.

[2]) Точнее, должно быть $\omega \sin\vartheta \gg m$, где ϑ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$; при $\vartheta = 0$ пары вообще не рождаются. Ниже полагаем $\vartheta = \pi/2$.

нее — в выражении для dI/ω), при этом $d^3k = \omega^2 d\omega do_{\mathbf{n}}$ заменяется на d^3p_+:

$$dw = \frac{e^2}{4\pi^2}\frac{d^3p_+}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-} - \frac{\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2}{4\varepsilon_-^2}\omega_{0+}^2\tau^2\right)\times$$
$$\times\exp\left\{i\frac{\omega\tau\varepsilon_+}{\varepsilon_-}\left(1-\mathbf{n}\mathbf{v}_+ + \frac{\tau^2}{24}\omega_{0+}^2\right)\right\}d\tau, \qquad (91.7)$$

где $\omega_{0+} = |e|H/\varepsilon_+$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении импульса фотона, лежащего в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Интегрирование производится так же, как это было сделано в § 90, причем (поскольку выражение (91.7) зависит только от угла между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}_+$) безразлично — интегрировать по do_+ или по $do_{\mathbf{n}}$. Поэтому ответ можно получить непосредственно по аналогии с (90.23):

$$dw = \frac{m^2e^2}{\sqrt{\pi}}\frac{d\varepsilon_+}{\omega^2}\left[\int\limits_x^{\infty}\Phi(\xi)d\xi + \left(\frac{2}{x} - \varkappa x^{1/2}\right)\Phi'(x)\right], \qquad (91.8)$$

где теперь

$$x = \left(\frac{m^3\omega}{|e|H\varepsilon_+\varepsilon_-}\right)^{2/3}, \quad \varkappa = \frac{|e|H\omega}{m^3}\left(=\frac{\hbar^2|e|H\omega}{m^3c^5}\right). \qquad (91.9)$$

Полная вероятность рождения пары в единицу времени получается интегрированием (91.8) по ε_+ (причем, ввиду очевидной симметрии по отношению к ε_+ н $\varepsilon_- = \omega - \varepsilon_+$, достаточно интегрировать от 0 до $\omega/2$ и затем удвоить результат). Производя замену переменной интегрирования ε_+ на x и интегрируя первый член в (91.8) дважды по частям, получаем

$$w = -\frac{|e|^3H}{m\varkappa\sqrt{\pi}}\int\limits_{(4/\varkappa)^{2/3}}^{\infty}\frac{2(x^{3/2}+1/\varkappa)\Phi'(x)}{x^{11/4}(x^{3/2}-4/\varkappa)^{1/2}}dx \qquad (91.10)$$

(*А. И. Никишов, В. И. Ритус,* 1967).

В предельном случае слабых полей ($\varkappa \ll 1$) в интеграле (91.10) существенны значения x вблизи нижнего предела. Поскольку эти значения велики, можно воспользоваться асимптотическим выражением для функции Эйри

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2x^{1/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

(см. III, § b). Введя переменную интегрирования $y = x^{3/2} - 4/\varkappa$ и положив $y = 0$ везде, где это возможно, получим в результате

вычисления

$$w = \frac{3^{3/2}|e|^3 H}{2^{9/2} m} \exp\left(-\frac{8}{3\varkappa}\right), \quad \varkappa \ll 1. \tag{91.11}$$

Экспоненциальное убывание вероятности при $\varkappa \to 0$ отвечает невозможности рождения пар в классическом пределе.

В обратном предельном случае сильных полей ($\varkappa \gg 1$) в интеграле (91.10) существен только второй член, причем он определяется областью значений x, в которой $x^{3/2} \sim 1/\varkappa \ll 1$. В этой области можно заменить функцию $\Phi'(x)$ ее значением

$$\Phi'(0) = -\frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\pi^{1/2}}.$$

Использовав значение интеграла

$$\int\limits_1^\infty y^{-\nu}(y-1)^{\mu-1} dy = \frac{\Gamma(\nu-\mu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu)},$$

получим

$$w = \frac{3^{1/6}\cdot 5\Gamma^2(2/3)}{2^{4/3}\cdot 7\pi^{1/2}\Gamma(7/6)} \frac{|e|^3 H}{m\varkappa^{1/3}} = 0,38\frac{|e|^3 H}{m\varkappa^{1/3}}, \quad \varkappa \gg 1. \tag{91.12}$$

Функция $mw(x)/|e|^3 H$ имеет максимум, равный 0,11, при $\varkappa \approx 11$.

§ 92. Тормозное излучение электрона на ядре. Нерелятивистский случай

Этот и несколько следующих параграфов посвящены важному явлению *тормозного излучения*, сопровождающего столкновения частиц. Начнем с нерелятивистского столкновения электрона с ядром. Будем считать, что ядро остается неподвижным, т. е. рассмотрим излучение при рассеянии электрона в кулоновом поле неподвижного центра (*A. Sommerfeld,* 1931).

Исходим из формулы (45.5) для вероятности дипольного излучения

$$dw = \frac{\omega^3}{2\pi}|\mathbf{e}^*\mathbf{d}_{fi}|^2 do_{\mathbf{k}}. \tag{92.1}$$

В данном случае начальное и конечное состояния электрона относятся к непрерывному спектру, а частота фотона

$$\omega = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}'^2), \tag{92.2}$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'$ — начальный и конечный импульсы электрона. Если начальная и конечная волновые функции электрона нормированы на одну частицу в объеме $V = 1$, то выражение

(92.1), умноженное на $d^3p'/(2\pi)^3$ и деленное на плотность падающего потока, $v/V = v$, даст сечение $d\sigma_{\mathbf{k}\mathbf{p}'}$ излучения фотона $\mathbf{k}$ в телесный угол $do_{\mathbf{k}}$ с рассеянием электрона в интервал состояний d^3p'. Заменив матричный элемент дипольного момента $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ матричным элементом импульса согласно

$$\mathbf{d}_{fi} = -\frac{1}{i\omega}\frac{e}{m}\mathbf{p}_{fi},$$

запишем выражение для сечения в виде [1])

$$d\sigma_{\mathbf{k}\mathbf{p}'} = \frac{\omega e^2}{(2\pi)^4 mp}|\mathbf{e}^*\mathbf{p}_{fi}|^2 do_{\mathbf{k}} d^3p', \tag{92.3}$$

где

$$\mathbf{p}_{fi} = \int \psi_f^* \widehat{\mathbf{p}} \psi_i d^3x = -i\int \psi_f^* \boldsymbol{\nabla} \psi_i d^3x.$$

В качестве ψ_i и ψ_f надо воспользоваться точными волновыми функциями в кулоновом поле притяжения, причем теми функциями, которые асимптотически содержат в себе плоскую и сферическую волны; в ψ_f сферическая волна должна быть сходящейся, а в ψ_i — расходящейся (см. III, § 136). Эти функции имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_i &= A_i e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} F(i\nu,\, 1,\, i(pr - \mathbf{p}\mathbf{r})), \qquad && \nu = \frac{Ze^2 m}{p}; \\ \psi_f &= A_f e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}} F(-i\nu',\, 1,\, -i(p'r + \mathbf{p}'\mathbf{r})), && \nu' = \frac{Ze^2 m}{p'} \end{aligned} \tag{92.4}$$

с нормировочными коэффициентами

$$A_i = e^{\pi\nu/2}\Gamma(1 - i\nu),\ A_f = e^{\pi\nu'/2}\Gamma(1 + i\nu'). \tag{92.5}$$

Заметив, что

$$\boldsymbol{\nabla} F(i\nu,\, 1,\, i(pr - \mathbf{p}\mathbf{r})) = i\left(p\frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p}\right)F' = -\frac{p}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}\right)_\nu,$$

запишем $\boldsymbol{\nabla}\psi_i$ в виде

$$\boldsymbol{\nabla}\psi_i = i\mathbf{p}\psi_i - A_i e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}\frac{p}{r}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}\right)_\nu.$$

При умножении на ψ_f^* и интегрировании первый член обращается в нуль ввиду ортогональности ψ_i и ψ_f. Поэтому для матричного элемента $\mathbf{p}_{fi}$ имеем

$$\mathbf{p}_{fi} = iA_i A_f p\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}}, \tag{92.6}$$

где

$$J = \int \frac{e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{r} F(i\nu',\, 1,\, i(p'r + \mathbf{p}'\mathbf{r}))F(i\nu,\, 1,\, i(pr - \mathbf{p}\mathbf{r}))d^3x, \tag{92.7}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}.$$

---

[1]) В этом параграфе обозначаем $p = |\mathbf{p}|,\ p' = |\mathbf{p}'|$.

Мы вынесли $\partial/\partial\mathbf{p}$ из-под знака интеграла, подразумевая, что при дифференцировании J величины ν, ν', $\mathbf{q}$ должны рассматриваться как независимые параметры и лишь после проведения дифференцирования следует выразить ν и $\mathbf{q}$ через $\mathbf{p}$.

Интеграл вычисляется путем замены каждой из вырожденных гипергеометрических функций их выражениями в виде контурных интегралов. Мы приведем здесь лишь результат [1]:

$$J = BF(i\nu', i\nu, 1, z),$$
$$B = 4\pi e^{-\pi\nu}(-\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{qp})^{-i\nu}(\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{qp}')^{-i\nu'}(\mathbf{q}^2)^{i\nu+i\nu'-1},$$
$$z = 2\frac{\mathbf{q}^2(pp' + \mathbf{pp}') - 2(\mathbf{qp})(\mathbf{qp}')}{(\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{qp}')(\mathbf{q}^2 + 2\mathbf{qp})}. \tag{92.8}$$

Здесь $F(i\nu', i\nu, 1, z)$ — полная гипергеометрическая функция.

После дифференцирования в (92.6) можно положить $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$; при этом

$$z = -2\frac{pp' - \mathbf{pp}'}{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}, \quad \mathbf{q}^2 = (p - p')^2(1 - z) \tag{92.9}$$

$(z < 0)$. Отметим также, что

$$-\mathbf{q}^2 - 2\mathbf{qp} = \mathbf{q}^2 - 2\mathbf{qp}' = \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}'^2 > 0.$$

В результате находим для матричного элемента следующее окончательное выражение:

$$\mathbf{p}_{fi} = A_i A_f \frac{8\pi i e^{-\pi\nu}}{(p - p')^3(p + p')}\left(\frac{p + p'}{p - p'}\right)^{-i(\nu+\nu')} \times$$
$$\times (1 - z)^{i(\nu+\nu')-1}[i\nu p\mathbf{q}F(z) + (1 - z)F'(z)(p'\mathbf{p} - p\mathbf{p}')], \tag{92.10}$$

где для краткости обозначено

$$F(z) = F(i\nu', i\nu, 1, z). \tag{92.11}$$

Сечение получается подстановкой (92.10) в (92.3), но общая формула очень громоздка и трудно обозрима. Поэтому мы сразу перейдем к вычислению спектрального распределения излучения, т. е. проинтегрируем сечение по направлениям фотона и конечного электрона.

Интегрирование по $do_{\mathbf{k}}$ и суммирование по поляризациям фотона сводится к усреднению по всем направлениям $\mathbf{e}$ и умножению на $2 \cdot 4\pi$, т. е. к замене

$$e_i e_k^* do_{\mathbf{k}} \to \frac{8\pi}{3}\delta_{ik}.$$

После этого сечение

$$d\sigma_{\mathbf{p}'} = \frac{4\omega e^2}{3mp}|\mathbf{p}_{fi}|^2\frac{d^3p'}{(2\pi)^3} = \frac{\omega e^2 p'}{6\pi^3 p}|\mathbf{p}_{fi}|^2 d\omega do_{\mathbf{p}'}. \tag{92.12}$$

[1]) Вычисления см. *Nordsieck A.*//Phys. Rev. — 1954. — V. 93. — P. 785.

Квадрат $|\mathbf{p}_{fi}|^2$ вычисляем, используя (92.9)–(92.11) и учитывая, что

$$|\Gamma(1-i\nu)|^2 = \frac{\pi\nu}{\operatorname{sh}\pi\nu}.$$

Получаем

$$|\mathbf{p}_{fi}|^2 = \frac{2^8\pi^4(Ze^2)^2m^2}{(p+p')^2(p-p')^4(1-e^{-2\pi\nu'})(e^{2\pi\nu}-1)} \times \\ \times\left\{\frac{\nu\nu'}{1-z}|F|^2 - z|F'|^2 + i\frac{\nu+\nu'}{2}\frac{z}{1-z}(FF'^* - F^*F')\right\}. \quad (92.13)$$

Для интегрирования сечения (92.12) $do_{\mathbf{p}'} = 2\pi\sin\vartheta d\vartheta$ перейдем от переменной ϑ (угол рассеяния) к переменной

$$z = -\frac{2pp'}{(p-p')^2}(1-\cos\vartheta),\ do_{\mathbf{p}'} \to \frac{\pi(p-p')^2}{pp'}dz.$$

Чтобы взять интеграл по dz, преобразуем выражение в фигурных скобках в (92.13). Согласно дифференциальному уравнению гипергеометрических функций (см. III, (e. 2)) имеем

$$z(1-z)F'' + [1-(1+i\nu+i\nu')z]F' + \nu\nu'F = 0,$$
$$z(1-z)F''^* + [1-(1-i\nu-i\nu')z]F'^* + \nu\nu'F^* = 0.$$

Умножив эти два уравнения соответственно на F^* и F и сложив их, получим

$$(1-z)\left[\frac{d}{dz}z(F'F^* + F'^*F) - 2z|F'|^2 + \right. \\ \left. + \frac{i(\nu+\nu')z}{1-z}(F'^*F + F'F^*) + \frac{2\nu\nu'}{1-z}|F|^2\right] = 0.$$

Отсюда видно, что выражение в фигурных скобках в (92.13) равно

$$\{\ldots\} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}z(F'F^* + F'^*F) \quad (92.14)$$

и интегрируется непосредственно.

Собрав полученные формулы, найдем окончательное выражение для сечения тормозного излучения в интервале частот $d\omega$ [1])

$$d\sigma_\omega = \frac{64\pi^2}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{m^2c^2}{(p-p')^2}\frac{p'}{p}\frac{1}{(1-e^{-2\pi\nu'})(e^{2\pi\nu}-1)}\left(-\frac{d}{d\xi}|F(\xi)|^2\right)\frac{d\omega}{\omega}, \quad (92.15)$$

где

$$\nu = \frac{Z\alpha mc}{p} = \frac{Ze^2}{\hbar v}, \quad \nu' = \frac{Ze^2}{\hbar v'}, \quad p' = \sqrt{p^2 - 2m\hbar\omega},$$
$$F(\xi) = F(i\nu',\, i\nu,\, 1,\, \xi),\ \xi = -\frac{4pp'}{(p-p')^2}.$$

[1]) Формулы (92.15)–(92.25) пишем в обычных единицах.

Рассмотрим предельный случай, когда обе скорости v и v' настолько велики, что $\nu \ll 1$, $\nu' \ll 1$ (но, разумеется, по-прежнему $v \ll 1$, так что $Z\alpha \ll \nu \ll 1$; это возможно лишь для малого Z). Для вычисления в этом случае производной $F'(\xi)$) воспользуемся формулой

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\,\beta+1,\,\gamma+1,\,z),$$

которую легко получить простым дифференцированием гипергеометрического ряда. Имеем

$$F'(\xi) = i\nu\cdot i\nu' F(l,\,1,\,2,\,\xi) = \frac{\nu\nu'}{\xi}\ln(l-\xi)$$

(последнее равенство очевидно из прямого сравнения соответствующих рядов). Для самой же функции $F(\xi)$ имеем просто

$$F(\xi) \approx F(0,\,0,\,1,\,\xi) = 1.$$

В результате из (92.15) находим

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{c^2}{v^2}\ln\frac{v+v'}{v-v'}\frac{d\omega}{\omega}, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v'} \ll 1. \tag{92.16}$$

Малость ν и ν' есть как раз условие применимости борновского приближения в случае кулонова взаимодействия. Поэтому саму по себе формулу (92.16) проще получить непосредственно с помощью теории возмущений (см. задачу 1).

Пусть теперь быстрый ($\nu \ll 1$) электрон теряет на излучение значительную долю своей энергии, так что $v' \ll v$ и ν' может быть не малым. Тогда

$$-\xi \approx 4p'/p = 4\nu/\nu' \ll 1,\; F(\xi) \approx F(i\nu',\,0,\,1,\,\xi) = 1,$$
$$F'(\xi) \approx -\nu\nu' F(1+i\nu',\,1,\,2,\,\xi) \approx -\nu\nu',$$

и сечение

$$d\sigma_\omega = \frac{64\pi}{3}Z^3\alpha^2 r_e^2\left(\frac{c}{v}\right)^3\frac{1}{1-\exp(-2\pi Ze^2/\hbar v')}\frac{d\omega}{\omega}, \tag{92.17}$$
$$\frac{Ze^2}{\hbar v} \ll 1, \quad \frac{Ze^2}{\hbar v'} \gtrsim 1.$$

При $\nu' \ll 1$ эта формула дает такое же предельное выражение

$$d\sigma_\omega = \frac{32}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{c^2 v'}{v^3}\frac{d\omega}{\omega},$$

как и формула (92.16) при $v' \ll v$.Поэтому формулы (92.16), (92.17) вместе перекрывают (при $\nu \ll 1$) весь диапазон значений ν'.

При $\omega \to \omega_0$ (где $\hbar\omega_0 = mv^2/2$) скорость $v' \to 0$ и $\nu' \to \infty$. В этом пределе (92.17) дает

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3 \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \frac{\hbar d\omega}{mv^2}. \tag{92.18}$$

Таким образом, $d\sigma_\omega/d\omega$ стремится при $\omega \to \omega_0$ к конечному пределу. Это обстоятельство можно обосновать в общем виде соображениями, аналогичными изложенным в т. III, § 147. Физически оно связано с тем, что частота $\omega = \omega_0$ является границей лишь непрерывного тормозного спектра. Электрон может излучить также и частоту $\omega > \omega_0$, перейдя в связанное состояние. Но сильно возбужденные связанные состояния в кулоновом поле по своим свойствам мало отличаются от близких к их границе свободных состояний. Поэтому граница, отделяющая непрерывный спектр от дискретного, по существу не является физически выделенной точкой.

Перейдем к случаю, когда оба параметра $\nu,\ \nu' \gg 1$. В этом случае движение как начального, так и конечного электронов квазиклассично. Мы будем считать, что $p^2/(2m) \sim \hbar\omega$; тогда нам понадобится асимптотическое выражение для функции $F(\xi)$ при $\nu,\ \nu' \to \infty$ и $\xi \sim 1$ (более точное условие будет сформулировано ниже, см. (92.24)).

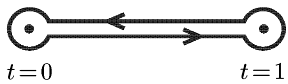


Рис. 17

Для получения этого выражения исходим из интегрального представления гипергеометрической функции (е. 3) (см. III), которое запишем в виде

$$F(i\eta\nu',\, i\nu',\, 1,\, \xi) = \frac{e^{-\pi\eta\nu'}}{2\pi i} \oint\limits_{C'} t^{i\eta\nu'-1}(1-t)^{-i\eta\nu'}(1-t\xi)^{-i\nu'}\, dt', \tag{92.19}$$

где введено обозначение

$$\eta = \nu/\nu', \quad 0 < \eta < 1,$$

так что

$$\xi = -\frac{4\eta}{(1-\eta)^2}. \tag{92.20}$$

В качестве же контура интегрирования выбираем показанный на рис. 17 путь, проходящий вдоль отрезка вещественной оси и обходящий точки $t = 0$ и $t = 1$ [1]).

[1]) Для гипергеометрической функции $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \xi)$ контур должен быть выбран так, чтобы при его обходе функция

$$V(t) = e^t t^{\alpha-\gamma+1}(t-1)^{1-\alpha}$$

возвращалась к исходному значению. При целом γ (в данном случае $\gamma = 1$) указанный контур этому условию удовлетворяет.

При $\nu,\ \nu' \gg 1$ значение подынтегрального выражения на нижней части этого контура мало и им можно пренебречь: при обходе точки $t = 0$ сверху вниз подынтегральное выражение умножается на малый множитель $\exp(-2\pi\eta\nu')$, а при обходе точки $t = 1$ снизу вверх оно умножается на $\exp(2\pi\eta\nu')$. Интеграл

$$E = \frac{e^{-\pi\eta\nu'}}{2\pi i}\int e^{\nu' f(t)}\frac{dt}{t'}, \quad f(t) = i\ln\frac{t^{\eta}}{(1-t)^{\eta}(1-\xi t)} \tag{92.21}$$

вычисляем методом перевала. Перевальная точка t_0 определяется условием $f'(t_0) = 0$, откуда $t_0 = (1-\eta)/2$. В этой точке, однако, обращается в нуль также и производная $f''(t_0)$, так что надо писать

$$f(t) \approx f(t_0) + \frac{ia}{3}\tau^3, \qquad \tau = t - t_0,$$

где

$$f(t_0) = 2\pi\eta + i(1+\eta)\ln\frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad a = \frac{1}{2i}f'''(t_0) = \frac{16\eta}{(1-\eta^2)^2}.$$

Предэкспоненциальный же множитель l/t в подынтегральном выражении пишем в виде

$$\frac{1}{t} \approx \frac{1}{t_0} - \frac{\tau}{t_0^2}$$

(ограничиться членом $1/t_0$ здесь нельзя, так как это привело бы к обращению в нуль фигурирующей в (92.15) производной $d|F(\xi)|^2/d\xi$). Таким образом, находим, после очевидной подстановки в интегралах,

$$F \approx \frac{1}{2\pi i t_0(\alpha\nu')^{1/3}}\exp\{-\pi\eta\nu' + \nu' f(t_0)\} \times \\ \times \left[-\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^3/3}dx + \frac{i}{t_0(\alpha\nu')^{1/3}}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{ix^3/3}dx\right]. \tag{92.22}$$

Интегралы здесь равны соответственно

$$2\int_0^{\infty}\cos\frac{x^3}{3}\,dx = \frac{2\pi}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}, \qquad 2\int_0^{\infty} x\sin\frac{x^3}{3}\,dx = 3^{1/6}\Gamma(2/3).$$

Аналогичным образом вычисляется производная $F'(\xi)$, согласно (92.19) она дается интегралом, отличающимся от (92.21) лишь

заменой предэкспоненциального множителя $1/it$ на $\nu'/(l-\xi t)$. После этого простое вычисление приводит к результату

$$-\frac{d}{d\xi}|F(\xi)|^2 = \frac{(1-\eta)^2 e^{2\pi\nu}}{4\sqrt{3}\pi\nu}.$$

Наконец, подставив это выражение в формулу (92.15), найдем, с требуемой точностью, следующий простой результат:

$$d\sigma_\omega = \frac{16\pi}{3^{3/2}} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m^2c^2}{p^2}\frac{d\omega}{\omega}. \tag{92.23}$$

Условие применимости этой формулы, т. е. условие применимости асимптотического выражения (92.23), состоит в требовании малости в последнем второго члена по сравнению с первым: $(1-\eta)\nu \gg 1$, или после выражения параметров гипергеометрической функции через физические величины:

$$\omega \gg \frac{v}{Ze^2}\frac{mv^2}{2}. \tag{92.24}$$

Условие (92.24) совпадает с условием, определяющим «высокочастотный предел» при классическом излучении в кулоновом поле притяжения, а величина $\hbar\omega d\sigma_\omega$ с $d\sigma_\omega$ из (92.23) совпадает с выражением (70.22) (см. II) для «эффективного торможения» в этом пределе. Этот результат нуждается в некотором обсуждении. Может показаться, что для применимости классической формулы излучения требуется, кроме квазиклассичности движения, также и малость энергии кванта по сравнению с энергией электрона, т. е. условие $\hbar\omega \ll mv^2/2$, что не предполагалось при выводе (92.23). В действительности, однако, значение $\hbar\omega$ должно быть мало не но сравнению с энергией электрона на бесконечности, а по сравнению с его кинетической энергией на том участке траектории, где в основном происходит излучение. Эта энергия гораздо больше начальной из-за ускорения электрона в поле иона.

Действительно, излучение высоких частот происходит в основном на малых расстояниях от иона, где

$$v(r)/r \sim \omega. \tag{92.25}$$

(Мы обозначили через $v(r)$ скорость электрона на расстоянии r от иона, в отличие от скорости v на бесконечности.) Учитывая, что при этом $Ze^2/r \sim mv^2(r)$, находим, что кинетическая энергия на участке, где происходит излучение:

$$\frac{mv^2(r)}{2} \sim \frac{m}{2}\left(\frac{\omega Ze^2}{m}\right)^{2/3} \sim \frac{mv^2}{2}\left(\frac{\omega Ze^2}{mv^3}\right)^{2/3} \gg \frac{mv^2}{2}.$$

Поэтому излучение даже кванта с энергией порядка $mv^2/2$ не меняет существенно движения на участке излучения и дополнительного условия малости $\hbar\omega$ не требуется.

Отметим также, что движение на участке (92.25) при заданным моменте импульса $\hbar l$ не зависит от начальной энергии. Соответственно и энергия, излучаемая при пролете по траектории (обозначаемая в II, § 70 как $d\mathcal{E}_\omega$), зависит только от l. Сечение $d\sigma_\omega$ можно получить, умножая вероятность излучения $d\mathcal{E}_\omega/\hbar\omega$ на $2\pi\rho d\rho$ (ρ — прицельное расстояние) и интегрируя по всем ρ. Поскольку в квазиклассическом случае

$$\rho d\rho = \hbar^2 l dl/(m^2 v^2),$$

это приводит к зависимости $d\sigma_\omega = 1/v^2$, соответствующей (92.23). Приведенное рассуждение объясняет, почему в эту формулу входит именно начальная (а не конечная) скорость электрона.

Для того чтобы перейти к классическим формулам во всей области $(1-\eta)\nu \sim 1$, $\nu \gg 1$, надо было бы найти асимптотику, гипергеометрической функции в условиях близости перевальной точки к особой точке $t = 0$; мы не будем останавливаться здесь на этом ввиду очевидности окончательного результата.

Все написанные формулы относятся к кулонову полю притяжения. Сечение излучения в поле отталкивания получается из (92.15) заменой: $\nu \to -\nu$, $\nu' \to -\nu'$. При этом, в частности, предельная борновская формула (92.16) вообще не меняется. В пределе же: $\nu \ll 1$, $\nu' \to \infty$ получим вместо (92.18)

$$d\sigma_\omega = \frac{128\pi}{3} Z^3 \alpha^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^3 \exp\left(-\frac{\sqrt{2mc^2}\pi Z\alpha}{\sqrt{\hbar(\omega_0-\omega)}}\right) \frac{\hbar d\omega}{mv^2}, \tag{92.26}$$

т. е. дифференциальное сечение стремится при $\omega \to \omega_0$ к нулю по экспоненциальному закону. Этот результат снова естествен; в поле отталкивания связанные состояния отсутствуют и частота $\omega = \omega_0$ является истинной границей спектра излучения.

Задачи

1. Найти в борновском приближении сечение тормозного излучения при нерелятивистском столкновении двух частиц с различными отношениями e/m.

Решение. Дипольный момент двух частиц с зарядами e_1, e_2 и массами m_1, m_2 в системе их центра инерции равен

$$\mathbf{d} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\mathbf{r},$$

где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Отсюда

$$\ddot{\mathbf{d}} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\nabla\frac{e_1 e_2}{r}.$$

Матричный элемент

$$\mathbf{d}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = -\frac{1}{\omega^2}(\ddot{\mathbf{d}})_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}, \quad \omega = \frac{p^2 - p'^2}{2\mu}$$

($\mathbf{p} = \mu\mathbf{v}$, $\mathbf{p}' = \mu\mathbf{v}'$ — импульсы относительного движения) вычисляется по плоским волнам [1])

$$\psi_{\mathbf{p}} = e^{i\mathbf{pr}}, \quad \psi_{\mathbf{p}'} = e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}$$

с помощью формулы

$$\left(\nabla \frac{1}{r}\right)_{\mathbf{pp}'} = \frac{4\pi i \mathbf{q}}{q^2}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}.$$

В результате находим

$$d\sigma_{\mathbf{k}\mathbf{p}'} = \frac{e_1^2 e_2^2}{\pi^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{v'}{v}\frac{\mu^2}{q^4}(\mathbf{eq})(\mathbf{e}^*\mathbf{q})\frac{d\omega}{\omega}do_{\mathbf{p}'}do_{\mathbf{k}}.$$

После суммирования по поляризациям угловое распределение излучения дается множителем $\sin^2\Theta$, где Θ — угол между направлением фотона $\mathbf{k}$ и вектором $\mathbf{q}$, лежащим в плоскости рассеяния (см. (45.4а)). После интегрирования по направлениям фотона

$$d\sigma_{\omega\theta} = \frac{16}{3}e_1^2 e_2^2\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{v'}{v}\frac{d\omega}{\omega}\frac{\sin\theta d\theta}{v^2 + v'^2 - 2vv'\cos\theta},$$

где θ — угол рассеяния. Наконец, интегрирование по $d\theta$ дает

$$d\sigma_{\omega} = \frac{16}{3}e_1^2 e_2^2\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{1}{v^2}\ln\frac{v + v'}{v - v'}\frac{d\omega}{\omega}.$$

Для излучения в поле неподвижного кулонова центра эта формула совпадает с (92.16).

2. Найти в борновском приближении сечение тормозного излучения при нерелятивистском столкновении двух электронов [2]).

Р е ш е н и е. Дипольное излучение в этом случае отсутствует, так что надо рассматривать квадрупольное излучение. В классической теории спектральное распределение полной интенсивности квадрупольного излучения дается формулой

$$I_{\omega} = (1/90)|(\dddot{D}_{ik})_{\omega}|^2,$$

где $D_{ik} = \sum e(3x_i x_k - r^2\delta_{ik})$ — тензор квадрупольного момента системы зарядов [3]). Для двух электронов в системе их центра инерции

$$D_{ik} = \frac{e}{2}(3x_i x_k - r^2\delta_{ik}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

При переходе к квантовой теории компоненты Фурье надо заменить матричными элементами (ср. сказанное в § 45 о дипольном излучении), и при надлежащей нормировке волновых функций (плоских волн) получится — после деления на энергию фотона ω — сечение излучения с рассеянием электронов в интервал состояний d^3p':

$$d\sigma_{\mathbf{p}'} = \frac{1}{90\omega}|(\dddot{D}_{ik})_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2\frac{d^3p'}{v(2\pi)^3},$$

[1]) Замена двух частиц одной частицей с приведенной массой допустима, конечно, только в нерелятивистском случае.

[2]) Скорость столкновения v удовлетворяет условиям $\alpha \ll e^2/(\hbar v) \ll 1$. Классический случай ($e^2/(\hbar v) \gg 1$) рассмотрен в задаче к II, § 71.

[3]) Эта формула получается из (71.5) (см. II) так же, как (67.11) (см. II) получается из (67.8) (см. II).

$v = 2p/m$ — начальная скорость относительного движения; излучаемая частота $\omega = (p^2 - p'^2)/m$.

Оператор $\dddot{\widehat{D}}_{ik}$ вычисляется путем трехкратного коммутирования D_{ik} с гамильтонианом

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{m} + \frac{e^2}{r}$$

и равен [1])

$$\dddot{\widehat{D}}_{ik} = \frac{2e^3}{m}\left[6\left(\frac{x_i}{r^3}\widehat{p}_k + \widehat{p}_k\frac{x_i}{r^3}\right) + 6\left(\frac{x_k}{r^3}\widehat{p}_i + \widehat{p}_i\frac{x_k}{r^3}\right) - \right.$$
$$\left. - 9\left(\frac{x_i x_k x_l}{r^5}\widehat{p}_l + \widehat{p}_l\frac{x_i x_k x_l}{r^3}\right) - \delta_{ik}\left(\frac{x_l}{r^3}\widehat{p}_l + \widehat{p}_l\frac{x_l}{r^3}\right)\right].$$

С учетом тождественности обеих частиц (электронов) матричные элементы вычисляются по волновым функциям

$$\psi_{\mathbf{p}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\mathbf{pr}} \pm e^{-i\mathbf{pr}}), \quad \psi_{\mathbf{p}'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}} \pm e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}}),$$

где знаки «+» и «-» соответствуют суммарным спинам электронов 0 и 1 (перестановке электронов отвечает замена $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$).

Громоздкие вычисления приводят к следующей формуле для спектрального распределения излучения:

$$d\sigma_\omega = \frac{4}{15}\alpha r_e^2\left\{17 - \frac{3x^2}{(2-x)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{12(2-x)^4 - 7(2-x)^2x^2 - 3x^4}{(2-x)^3\sqrt{1-x}}\operatorname{Arch}\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}\frac{\sqrt{1-x}}{x}dx,$$

где $x = \omega/\varepsilon$, а $\varepsilon = p^2/m$ — начальная энергия относительного движения электронов; сечение усреднено по значениям полного спина электронов. Эффективное торможение

$$\varkappa_{\text{изл}} = \hbar\int_0^\varepsilon \omega\, d\sigma_\omega = 8{,}1\alpha r_e^2\varepsilon$$

(*Б. К. Федюшин*, 1952).

3. Определить энергию излучения, возникающего при испускании ядром нерелятивистского электрона в s-состоянии.

Р е ш е н и е. Волновая функция испущенного ядром электрона — расходящаяся сферическая s-волна, нормированная на равнй единице полный поток:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{4\pi v}}\frac{e^{ipr}}{r}$$

---

[1]) Это выражение аналогично классической формуле

$$\dddot{D}_{ik} = \frac{4e^3}{m^2}\left[6\frac{x_i}{r^3}p_k + 6\frac{x_k}{r^3}p_i - 9\frac{x_i x_k}{r^5}\mathbf{pr} - \frac{l}{r^3}\delta_{ik}\mathbf{pr}\right],$$

которая получилась бы в результате дифференцирования D_{ik} с учетом классического уравнения движения

$$\frac{m}{2}\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2\mathbf{r}}{r^3}.$$

(см. III, (33.14)). В качестве волновой функции конечного (после испускания фотона) состояния электрона выберем плоскую волну

$$\psi_f = e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}}.$$

Матричный элемент перехода

$$\mathbf{p}_{fi} = (\mathbf{p}_{if})^* = \left(\int \psi_i^* \widehat{\mathbf{p}} \psi_f d^3x\right)^* = \frac{\mathbf{p}'}{\sqrt{4\pi v}} \int e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{r}+ipr} \frac{d^3x}{r} =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{v}} \frac{\mathbf{p}'}{\mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}^2} = -\sqrt{\frac{\pi}{v}} \frac{\mathbf{v}'}{\omega}$$

(интеграл вычисляется согласно (57.6а)). Энергия излучения получается из формулы (45.8), умноженной на $d^3p'/(2\pi)^3$ и проинтегрированной по направлениям $\mathbf{p}'$ (что сводится к умножению на 4π). В результате получим спектральное распределение излученной энергии

$$dE_\omega = \frac{2e^2 v'^3}{3\pi v} d\omega.$$

При $\omega \to 0$ конечная скорость электрона $v' \to v$, и эта формула совпадает, как и должно быть, с нерелятивистским пределом классического результата (см. задачу к II, § 69). Полная излученная энергия (в обычных единицах)

$$E = \frac{4}{15\pi} \alpha \left(\frac{v}{c}\right)^2 \varepsilon,$$

где $\varepsilon = mv^2/2$ — начальная энергия электрона.

4. Определить энергию излучения, возникающего при отражении нерелятивистского электрона от бесконечно высокой «потенциальной стенки».

Р е ш е н и е. Пусть электрон движется нормально к стенке. Хотя фотон может быть испущен в любом направлении, но поскольку в нерелятивистском случае импульс фотона мал по сравнению с импульсом электрона, можно считать, что и отраженный электрон будет двигаться нормально к плоскости стенки. Пусть стенка находится при $x = 0$, а электрон движется со стороны $x > 0$. Волновые функции стационарных состояний одномерного движения, нормированные на $\delta(p/2\pi)$ ($p = p_x$), имеют вид стоячих волн (см. III, § 21):

$$\psi_i = 2\sin px, \quad \psi_f = 2\sin p'x.$$

Матричный элемент оператора $\widehat{p} = \widehat{p}_x$:

$$p_{fi} = -4i \int_0^\infty \sin p'x \frac{d}{dx} \sin px dx = -\frac{4ipp'}{p^2 - p'^2}.$$

(интегралы такого вида надо понимать как предел при $\delta \to +0$ от значения, получающегося путем введения в подынтегральное выражение множителя $e^{-\delta x}$).

Энергия, излучаемая при однократном отражении электрона, получается из (45.8) умножением на $dp' = d\omega/v'$ и делением на $v/2\pi$ (плотность потока бегущей к барьеру волны в начальной функции ψ_i):

$$dE_\omega = \frac{4\omega^2 e^2}{3m^2} |p_{fi}|^2 \frac{2\pi d\omega}{vv'} = \frac{8}{3\pi} e^2 vv' d\omega. \tag{1}$$

При малых частотах ($\omega \ll \varepsilon = mv^2/2$) имеем $v' \approx v$ и (1) переходит в классическую формулу (69.5) (см. II), которую надо интегрировать по углам

и учесть, что $v = \Delta v/2$, где Δv — изменение скорости электрона при отражении; так и должно быть, поскольку при отражении от стенки условие малости времени столкновения (69.1) (см. II) во всяком случае выполняется. Квантовая формула (1) позволяет, однако, найти также и полную излучаемую энергию:

$$E = \int\limits_0^\varepsilon \frac{dE_\omega}{d\omega} d\omega = \frac{16}{9\pi}\alpha\varepsilon\frac{v^2}{c^2}$$

(в обычных единицах).

5. Определить энергию тормозного излучения при рассеянии медленного электрона на атоме.

Р е ш е н и е. При условии $pa \ll 1$ (где a — атомные размеры) рассеяние на атоме изотропно и не зависит от энергии электрона (см. Ill, § 132). Волновые функции начального и конечного состоянии электрона пишем в виде

$$\psi_i = e^{i\mathbf{pr}} + f\frac{e^{ipr}}{r}, \quad \psi_f = e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}} + f\frac{e^{-ip'r}}{r},$$

где f — постоянная вещественная амплитуда рассеяния. Эти выражения относятся к асимптотической области расстояний $r \gg a$, которые в данном случае как раз и существенны: $r \sim 1/p \gg a$. Вычисленный по этим функциям матричный элемент

$$\mathbf{p}_{fi} = \frac{2\pi f}{\omega}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$$

(интегралы вычисляются, как в задаче 3). Подставив это выражение в (92.12), получим сечение излучения с рассеянием электрона в направлении $\mathbf{p}'$ (обычные единицы):

$$d\sigma_{\omega\mathbf{p}'} = \frac{2\alpha p'}{3\pi p c^2}(\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2 d\sigma_{\text{упр}}\frac{d\omega}{\omega}, \tag{1}$$

где $d\sigma_{\text{упр}} = f^2 do_{\mathbf{p}'}$ — дифференциальное сечение упругого рассеяния. При $\hbar\omega \ll p^2/(2m)$ можно положить $p \approx p'$, и тогда эта формула переходит, как и следовало ожидать, в нерелятивистскую формулу для излучения мягких фотонов (см. § 98) [1].

Интегрируя (1) по направлениям $\mathbf{p}'$, получаем

$$d\sigma_\omega = \frac{2\alpha p'}{3\pi p c^2 p}(v^2 + v'^2)\sigma_{\text{упр}}\frac{d\omega}{\omega}, \tag{2}$$

где $\sigma_{\text{упр}} = 4\pi f^2$ — полное сечение упругого рассеяния. Наконец, умножив на $\hbar\omega$ и проинтегрировав по ω от 0 до $p^2/(2m) = \varepsilon$, получим «эффективное торможение»

$$\varkappa_{\text{изл}} = \int \hbar\omega d\sigma_\omega = \frac{32}{45\pi}\alpha\sigma_{\text{упр}}\varepsilon\left(\frac{v}{c}\right)^2. \tag{3}$$

[1]) Тот факт, что «факторизация» сечения (выделение множителя $\sigma_{\text{упр}}$) произошла в данном случае при произвольных ω, в известном смысле случаен и связан с независимостью амплитуды рассеяния от энергии.

§ 93. Тормозное излучение электрона на ядре. Релятивистский случай

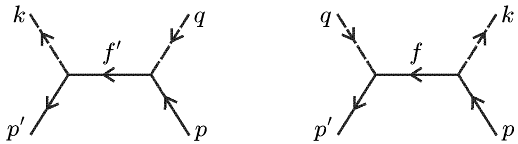
Обратимся к тормозному излучению электрона на ядре в случае релятивистских скоростей электрона [1]). При этом будем предполагать выполненным условие применимости борновского приближения, т. е. как для начальной (v), так и для конечной (v') скоростей электрона: $Ze^2/\hbar v \ll 1$, $Ze^2/\hbar v' \ll 1$. При этом во всяком случае заряд ядра не должен быть слишком велик: $Z\alpha \ll 1$.

Как и в предыдущем параграфе, будем пренебрегать отдачей ядра, так что ядро играет лишь роль источника внешнего поля (об оправдании такого пренебрежения см. § 97).

Согласно (91.4) сечение тормозного излучения выражается через его амплитуду формулой

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{\omega|\mathbf{p}'|}{8(2\pi)^5|\mathbf{p}|} do_{\mathbf{k}} do' d\omega. \qquad (93.1)$$

В первом не исчезающем приближении матричному элементу M_{fi} отвечают две диаграммы:



(93.2)

Свободный конец q соответствует внешнему полю, так что $q = p'-p+k$ есть 4-вектор передачи импульса ядру. Пренебрежение отдачей означает, что временная компонента $q^0 = 0$.

Согласно диаграммам (93.2) имеем

$$M_{fi} = -e^2 A_0^{(e)}(\mathbf{q})\sqrt{4\pi} e_\mu^* \overline{u}' \left(\gamma^\mu \frac{\gamma f' + m}{f'^2 - m^2}\gamma^0 + \gamma^0 \frac{\gamma f + m}{f^2 - m^2}\gamma^\mu \right) u. \qquad (93.3)$$

Промежуточные 4-импульсы $f = p - k$, $f' = p' + k$; введем обозначения:

$$f^2 - m^2 = -2kp \equiv -2\varkappa\omega, \quad f'^2 - m^2 = -2kp' \equiv -2\varkappa'\omega, \qquad (93.4)$$

$A_0^{(e)}$ — скалярный потенциал внешнего поля; для чисто кулонова поля

$$A_0^{(e)}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi Ze}{\mathbf{q}^2}. \qquad (93.5)$$

[1]) Большая часть излагаемых ниже результатов была получена *Бете* и *Гайтлером* (*H. A. Bethe, W. Heitler,* 1934) и независимо *Заутером* (*F. Sauter,* 1934).

Подставляя в (93.1), имеем для сечения

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^6}{4\pi^2} \frac{|\mathbf{p}'|\omega}{|\mathbf{p}|\mathbf{q}^4} e_\mu^* e_\nu (\overline{u}' Q^\mu u)(\overline{u}\overline{Q}^\nu u') do_\mathbf{k} do' d\omega, \tag{93.6}$$

где

$$Q^\mu = \gamma^\mu \frac{\gamma f' + m}{2\omega\varkappa'} \gamma^0 - \gamma^0 \frac{\gamma f + m}{2\omega\varkappa} \gamma^\mu,$$

$$\overline{Q}^\nu = \gamma^0 Q^{\nu+} \gamma^0 = \gamma^0 \frac{\gamma f' + m}{2\omega\varkappa'} \gamma^\nu - \gamma^\nu \frac{\gamma f + m}{2\omega\varkappa} \gamma^0.$$

Не рассматривая поляризационных эффектов, усредним сечение по направлениям спина начального электрона и просуммируем по поляризациям конечных электрона и фотона. Это сводится к замене

$$e_\mu^* e_\nu (\overline{u}' Q^\mu u)(\overline{u}\overline{Q}^\nu u') \to -\frac{1}{2} \operatorname{Sp} Q_\mu (\gamma p + m) \overline{Q}^\mu (\gamma p' + m).$$

Вычисление следа производится по стандартным формулам (см. § 22). Некоторое упрощение выкладок достигается использованием равенства

$$\gamma^0 (\gamma p) \gamma^0 = \gamma \widetilde{p},$$

где $\widetilde{p} = (\varepsilon, -\mathbf{p})$, если $p = (\varepsilon, \mathbf{p})$. Кроме того, число подлежащих вычислению членов можно сократить, если учесть симметрию по отношению к замене $p \leftrightarrow p'$, $k \to -k$, $q \to -q$ (такая замена приводит лишь к циклической перестановке множителей в произведении матриц и поэтому не меняет его следа).

В результате получается следующее выражение для дифференциального сечения тормозного излучения с испусканием фотона заданных частоты и направления и с вылетом вторичного электрона в заданном направлении [1]:

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha r_e^2}{4\pi^2} \frac{p' m^4}{p q^4} \frac{d\omega}{\omega} do_\mathbf{k} do' \times$$
$$\times \left\{ \frac{q^2}{\varkappa\varkappa' m^2} (2\varepsilon^2 + 2\varepsilon/2 - q^2) + \left(q^2 \left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\varkappa'}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa'} - \frac{\varepsilon'}{\varkappa}\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{2\omega q^2}{m^2} \left(\frac{1}{\varkappa'} - \frac{1}{\varkappa}\right) - \frac{2\omega^2}{m^2} \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{\varkappa'}\right) \right\}, \tag{93.7}$$

где

$$\varkappa = \varepsilon - \mathbf{n}\mathbf{p}, \quad \varkappa' = \varepsilon' - \mathbf{n}\mathbf{p}' \quad (\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega), \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} - \mathbf{p}.$$

[1]) Здесь и ниже в этом параграфе p, p', q обозначают абсолютные значения трехмерных векторов: $p = |\mathbf{p}|$, $p = |\mathbf{p}|'$, $q = |\mathbf{q}|$.

Простыми преобразованиями можно придать этой формуле вид, несколько более удобный для исследования:

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha r_e^2}{2\pi}\frac{d\omega}{\omega}\frac{p'm^2}{pq^4}\sin\theta d\theta \sin\theta' d\theta' d\varphi \left\{ \frac{p'^2}{\varkappa'^2}(4\varepsilon^2 - q^2)\sin^2\theta' + \right.$$
$$+ \frac{p^2}{\varkappa^2}(4\varepsilon'^2 - q^2)\sin^2\theta + \frac{2\omega^2}{\varkappa\varkappa'}(p^2\sin^2\theta + p'^2\sin^2\theta') -$$
$$\left. - \frac{2pp'}{\varkappa\varkappa'}(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon'^2 - q^2)\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi \right\}, \quad (93.8)$$

где

$$\varkappa = \varepsilon - p\cos\theta, \quad \varkappa' = \varepsilon' - p'\cos\theta',$$
$$q^2 = p^2 + p'^2 + \omega^2 - 2p\omega\cos\theta + 2p'\omega\cos\theta' -$$
$$- 2pp'(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi),$$

θ и θ' — углы между **k** и соответственно **p** и **p**$'$, φ — угол между плоскостями **k**, **p** и **k**, **p**$'$.

Интегрирование (93.8) по направлениям фотона и вторичного электрона довольно громоздко. Оно приводит к следующей формуле для спектрального распределения излучения [1]:

$$d\sigma_\omega = Z^2\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\frac{p'}{p}\left\{ \frac{4}{3} - 2\varepsilon\varepsilon'\frac{p^2+p'^2}{p^2p'^2} + \right.$$
$$+ m^2\left(l\frac{\varepsilon'}{p^3} + l'\frac{\varepsilon}{p'^3} - \frac{ll'}{pp'} \right) + L\left[\frac{8\varepsilon\varepsilon'}{3pp'} + \frac{\omega^2}{p^3p'^3} \times \right.$$
$$\left.\left. \times (\varepsilon^2\varepsilon'^2 + p^2p'^2 + m^2\varepsilon\varepsilon') + \frac{m^2\omega}{2pp'}\left(l\frac{\varepsilon\varepsilon' + p^2}{p^3} - l'\frac{\varepsilon\varepsilon' + p'^2}{p'^3} \right) \right] \right\}, \quad (93.9)$$

где

$$L = \ln\frac{\varepsilon\varepsilon' + pp' - m^2}{\varepsilon\varepsilon' - pp' - m^2}, \quad l = \ln\frac{\varepsilon + p}{\varepsilon - p}, \quad l' = \ln\frac{\varepsilon' + p'}{\varepsilon' - p'}.$$

Напомним, что допустимые значения частот в полученных формулах ограничены только условием, налагаемым на конечную скорость электрона ($Ze^2/v' \ll 1$): электрон не должен терять почти всю свою энергию. При $\omega \to 0$ сечение излучения расходится, как $d\omega/\omega$; это — проявление общего правила, которое будет рассмотрено в § 98.

В нерелятивистском пределе ($p \ll m$) импульс фотона мал по сравнению с импульсом электрона, так как

$$\omega = \frac{p'^2 - p^2}{2m} \ll p.$$

---

[1]) Интегрирование по направлениям одного только вторичного электрона тоже может быть произведено в аналитическом виде — см. *Gluckstern R. L., Hull M. H.*//Phys. Rev. — 1953. — V. 90. — P. 1030.

Поэтому $q^2 \approx (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2$. Положив в (93.8) $\varepsilon = \varepsilon' = m$, в пренебрежении всеми p, p', ω по сравнению с m, получим

$$d\sigma = \frac{2}{\pi} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{p' m^2}{p q^4} \sin\theta d\theta \sin\theta' d\theta' d\varphi \times \\ \times (p^2 \sin^2\theta + p'^2 \sin^2\theta' - 2pp' \sin\theta \sin\theta' \cos\varphi),$$

или

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2} \frac{p'}{p} [\mathbf{nq}]^2 \frac{do_{\mathbf{k}} do'}{q^4} \frac{d\omega}{\omega} \tag{93.10}$$

в согласии с формулой, полученной в борновском приближении в задаче 1 § 92. Соответственно и для спектрального распределения излучения получается известный уже нам результат (92.16) [1]).

В ультрарелятивистском случае, когда велики как начальная, так и конечная энергии электрона (ε, $\varepsilon' \gg m$), угловое распределение фотонов и вторичных электронов имеет очень специфический характер. При малых углах θ, θ' фигурирующие в знаменателях формулы (93.8) величины $\varkappa$, $\varkappa'$ равны

$$\varkappa \approx \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{m^2}{\varepsilon^2} + \theta^2\right), \quad \varkappa' \approx \frac{\varepsilon'}{2}\left(\frac{m^2}{\varepsilon'^2} + \theta'^2\right) \tag{93.11}$$

и в области $\theta \lesssim m/\varepsilon$ становятся очень малыми. В этой области мала также и величина вектора $\mathbf{q}$ ($q \sim m$). Таким образом, в ультрарелятивистском случае фотон и вторичный электрон летят вперед в узком конусе с углом раствора $\sim m/\varepsilon$.

Количественную формулу для углового распределения в ультрарелятивистском случае легко получить из (93.8), подставив $\varkappa$, $\varkappa'$ из (93.11), заменив во всех других местах p, p' на ε, ε' и пренебрегая q^2 по сравнению с ε^2. Введя удобные обозначения:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{m}\theta, \quad \delta' = \frac{\varepsilon'}{m}\theta', \tag{93.12}$$

представим эту формулу в виде

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{\varepsilon' m^4}{\varepsilon q^4} \frac{d\omega}{\omega} \delta d\delta \cdot \delta' d\delta' d\varphi \times \\ \times \left\{ \frac{\delta^2}{(1+\delta^2)^2} + \frac{\delta'^2}{(1+\delta'^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'} \frac{\delta^2 + \delta'^2}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) \frac{\delta\delta' \cos\varphi}{(1+\delta^2)(1+\delta'^2)} \right\}. \tag{93.13}$$

[1]) Получить эту формулу предельным переходом в (93.9), однако, довольно хлопотно ввиду взаимных сокращений ряда членов.

Написав $\mathbf{q}^2 = [\mathbf{nq}]^2 + (\mathbf{nq})^2 (\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega)$, легко найти, что для малых углов

$$\frac{q^2}{m^2} = (\delta^2 + \delta'^2 - 2\delta\delta' \cos\varphi) + m^2 \left(\frac{1+\delta^2}{2\varepsilon} - \frac{1+\delta'^2}{2\varepsilon'}\right)^2. \qquad (93.14)$$

При $\delta \sim \delta' \sim 1$ второй член здесь мал по сравнению с первым. Эти члены сравниваются в области еще меньших углов, где $\delta \sim m/\varepsilon$. Хотя здесь q становится в особенности малым ($q \sim \sim m^2/\varepsilon \ll m$), интегральный вклад этой области в сечение все же мал по сравнению с вкладом всей области $\delta \lesssim 1$ (как легко видеть — в отношении m^2/ε^2). Но q может достигать значений $\sim m^2/\varepsilon$ также и при $\delta \sim \delta' \sim 1$, если при этом

$$|\delta - \delta'| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}, \quad \varphi \lesssim \frac{m}{\varepsilon}. \qquad (93.15)$$

Вклад этой области — того же порядка величины, что и все интегральное сечение (или даже является основным в нем — см. ниже).

Интегрирование формулы (93.13) по φ и по δ' дает угловое распределение фотонов (заданной частоты) безотносительно к направлениям вторичных электронов [1]:

$$d\sigma = 8Z^2\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{\delta\cdot d\delta}{(1+\delta^2)^2} \times$$
$$\times \left\{\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{4\delta^2}{(1+\delta^2)^2}\right] \ln\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + 2 - \frac{16\delta^2}{(1+\delta^2)^2}\right]\right\}. \qquad (93.16)$$

Проинтегрировав по δ, найдем спектральное распределение излучения в ультрарелятивистском случае:

$$d\sigma_\omega = 4Z^2\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\right]\left(\ln\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2}\right) \qquad (93.17)$$

(эту формулу можно, конечно, получить и непосредственно из (93.9)).

Обратим внимание на присутствие в (93.16) и (93.17) логарифма большой величины (даже при $\omega \sim \varepsilon$ отношение $\dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} \sim \sim \dfrac{\varepsilon'}{m} \gg 1$). Если она велика настолько, что велик даже ее логарифм, то в указанных формулах члены, содержащие логарифмы,

[1]) Сначала интегрируют по φ (в пределах от 0 до 2π). Интегрирование по δ' удобно заменить интегрированием по разности $|\Delta| = |\delta' - \delta|$, разбив его область на две части: от 0 до некоторого Δ_0 и от Δ_0 до ∞, где Δ_0 удовлетворяет неравенствам $m/\varepsilon \ll \Delta_0 \ll 1$. В каждой области возможны соответствующие пренебрежения в подынтегральном выражении.

становятся основными. Отметим, что этот логарифм происходит от интегрирования по области (93.15) [1]. Таким образом, в логарифмическом приближении (т. е. в пренебрежении членами, не содержащими большого логарифма) вторичный электрон летит под углом $\sim (m/\varepsilon)^2$ к направлению падения.

Наконец, приведем предельную формулу для области вблизи жесткой границы спектра, когда ультрарелятипистский электрон излучает почти всю свою энергию: $\omega \approx \varepsilon \gg \varepsilon'$. Из (93.9) легко находим

$$d\sigma_\omega = 2Z^2\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\varepsilon}\left\{\frac{\varepsilon'^2}{p'^2}\ln\frac{\varepsilon'+p'}{\varepsilon'-p'} - \frac{m^2\varepsilon'^2}{4p'^3}\ln^2\frac{\varepsilon'+p'}{\varepsilon'-p'} - \frac{\varepsilon'}{p'}\right\}. \tag{93.18}$$

Формулы (93.17),(93.18) перекрывают весь интервал значений ω для ультрарелятивистского начального электрона; при $\omega \approx \approx \varepsilon \gg \varepsilon' \gg m$ эти формулы совпадают. Если вторичный электрон нерелятивистский ($p' \ll m$), то

$$d\sigma_\omega = 2Z^2\alpha r_e^2 \frac{\sqrt{2m(\varepsilon-\omega)}}{m}\frac{d\omega}{\varepsilon}. \tag{93.19}$$

Поляризационные эффекты. Поляризационные эффекты в тормозном излучении могут быть исследованы тем же общим методом, который был описан в § 65. Вопрос о выборе 4-векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ в данном случае особенно прост. Поскольку процесс удобно рассматривать фактически лишь в одной определенной системе отсчета (системе покоя ядра), то достаточно положить $e^{(1)} = (0,\ \mathbf{e}^{(1)})$, $e^{(2)} = (0,\ \mathbf{e}^{(2)})$, где $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$ — перпендикулярные $\mathbf{k}$ единичные векторы, из которых один лежит в плоскости $\mathbf{k}\,\mathbf{p}$, а другой перпендикулярен ей.

Не будем приводить здесь ни самих довольно громоздких вычислений, ни их количественных результатов. Отметим лишь некоторые качественные свойства поляризационных эффектов [2].

---

[1]) В этом легко убедиться, рассмотрев область интегрирования, в которой φ и $\Delta = \delta' - \delta$ удовлетворяют условиям: $m/\varepsilon \ll \Delta$, $\varphi \ll 1$. В этой области $q^2/m \approx \Delta^2 + \varphi^2\delta^2$, а выражение в фигурных скобках в (93.13) содержит члены, пропорциональные φ^2 или Δ^2 (при $\varphi = 0$ и $\Delta = 0$ оно обращается в нуль). Интегралы же вида

$$\int \frac{\varphi^2 d\varphi d\Delta}{(\Delta^2+\delta^2\varphi^2)^2} \quad \text{или} \quad \int \frac{\Delta^2 d\varphi d\Delta}{(\Delta^2+\delta^2\varphi^2)^2}$$

логарифмически расходятся; их «обрезание» происходит на границах указанной области значений переменных.

[2]) Более подробное обсуждение этих эффектов можно найти в указанной на с. 411 обзорной статье *МакМастера*, а также в книге *Байер В. Н., Катков В. М., Фадин В. С.* Излучение релятивистских электронов. — М.: Атомиздат, 1973.

Эти свойства могут быть получены с помощью различных соотношений симметрии, подобно тому как это было сделано в § 87 для эффекта Комптона.

Излагаемая теория отвечает первому не исчезающему приближению теории возмущений. В этом приближении сечение не может содержать члена, пропорционального одному лишь вектору поляризации начального ($\boldsymbol{\zeta}$) или конечного ($\boldsymbol{\zeta}'$) электрона. Отсутствие члена $\propto \boldsymbol{\zeta}$ означает, что полное (просуммированное по поляризациям фотона и вторичного электрона) сечение излучения не зависит от поляризации падающего электрона.

Из числа членов, пропорциональных одним только поляризационным параметрам фотона (ξ_1', ξ_2', ξ_3'), отсутствует член $\propto \xi_2$. Это значит, что при излучении неполяризованным электроном фотон не обладает круговой поляризацией. Здесь имеется, однако, отличие от аналогичного результата для эффекта Комптона. В последнем случае такие члены были запрещены пространственной четностью в связи с невозможностью составления псевдоскаляра из единственных имевшихся в нашем распоряжении двух независимых векторов $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$. В случае же тормозного излучения имеется три независимых импульса ($\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{k}$), что достаточно для построения псевдоскаляра ($\mathbf{k}[\mathbf{pp}']$). Член вида $\xi_2'(\mathbf{k}[\mathbf{pp}'])$ не противоречит пространственной четности и, строго говоря, отличен от нуля. Однако он не инвариантен по отношению к изменению знаков всех импульсов (ср. (87.26)) и потому отсутствует в первом борновском приближении.

Существование псевдоскаляра ($\mathbf{k}[\mathbf{pp}']$) приводит также к тому, что наряду с членом $\propto \xi_3'$ оказывается разрешенным в сечении также и член $\propto \xi_1'$ (в противоположность ситуации при эффекте Комптона). Этот член возникает как произведение вида

$$S_{\alpha\beta}\nu_\alpha[\mathbf{k}\boldsymbol{\nu}]_\beta(\mathbf{k}[\mathbf{pp}'])$$

(где $\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{kp}]$), инвариантное как по отношению к пространственной инверсии, так и по отношению к изменению знака всех импульсов. Таким образом, излучаемый фотон обладает линейной поляризацией обоих видов (как в направлениях осей $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$, так и в «диагональных» направлениях, под углом 45° к этим осям).

Это относится, однако, только к условиям, когда регистрируется также и направление вылета вторичного электрона. При интегрировании же по всем направлениям $\mathbf{p}'$ член $\propto \xi_1'$ в сечении обращается в нуль. Это очевидно из соображений симметрии: после интегрирования оба несовпадающих друг с другом «диагональных» направления становятся эквивалентными, и потому предпочтительная поляризация вдоль одной из них (как это имеет место при $\xi_1' \neq 0$) невозможна.

Степень линейной поляризации не зависит от поляризационного состояния падающего электрона: корреляционные члены в сечении вида $\xi_1'\boldsymbol{\zeta}$ и $\xi_3'\boldsymbol{\zeta}$ запрещены в первом борновском приближении. Член же $\xi_2'\boldsymbol{\zeta}$ разрешен, так что при излучении поляризованным электроном фотон обладает круговой поляризацией (*Я. Б. Зельдович,* 1952).

Экранирование. Полученные выше формулы выведены для чисто кулонова поля. Если же речь идет об излучении при столкновении не с «голым» ядром, а с атомом, то должна быть учтена экранировка поля ядра электронами, приводящая к уменьшению сечения. Для этого надо ввести в потенциал внешнего поля $A^{(e)}(q)$ атомный формфактор $F(q)$ (см. III, § 139). Согласно (139.2) (см. III) это достигается заменой Z на $Z - F(q)$. Выясним условия, при которых экранирование существенно.

Определенному значению q в формфакторе отвечают расстояния $r \sim 1/q$ в пространственном распределении электронных зарядов в атоме. Формфактор приближается к значению Z (полное экранирование) при $q \lesssim 1/a$, где a — размеры атома.

С другой стороны, в ультрарелятивистском случае существенный вклад в сечение излучения возникает, как мы видели выше, уже от области значений q вблизи того наименьшего значения, которое вообще может иметь q при заданных начальной и конечной энергиях электрона. В ультрарелятивистском случае

$$q_{\min} = p - p' - \omega = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2} - \sqrt{\varepsilon'^2 - m^2} - (\varepsilon - \varepsilon') \approx \frac{m^2\omega}{2\varepsilon\varepsilon'}. \tag{93.20}$$

Экранирование существенно, если $q_{\min} \lesssim 1/a$ или

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} \gtrsim \frac{a}{1/m}. \tag{93.21}$$

Это условие во всяком случае выполняется при достаточно больших энергиях падающего электрона.

Если $q_{\min} \ll 1/a$ («полная экранировка»), то с логарифмической точностью можно сразу выписать ответ для спектрального распределения излучения. Действительно, под знаком логарифма в (93.17) как раз стоит левая часть неравенства $\varepsilon\varepsilon'/(m\omega) \gg$ $\gg ma$. При соблюдении неравенства интеграл по dq, приводящий к этому логарифму, обрежется на значении порядка правой стороны неравенства. Согласно модели Томаса — Ферми $a \sim a_0 Z^{-1/3}$, где $a_0 \sim 1/(me^2)$ — боровский радиус (см. III, § 70); тогда $am \sim \sim 1/(\alpha Z^{1/3})$. Таким образом, при полной экранировке логарифм в (93.17) следует заменить на $\ln(1/(\alpha Z^{1/3}))$.

Потеря энергии. Потеря энергии электроном на излучение характеризуется «эффективным торможением»:

$$\varkappa_{\text{изл}} = \int\limits_0^{\varepsilon-m} \omega d\sigma_\omega. \tag{93.22}$$

Вычисление интеграла с $d\sigma_\omega$ из (93.17) приводит к следующему результату [1]:

$$\varkappa_{\text{изл}} = Z^2\alpha r_e^2\varepsilon\Big\{\frac{12\varepsilon^2+4m^2}{3\varepsilon p}\ln\frac{\varepsilon+p}{m} - \frac{(8\varepsilon+6p)m^2}{3\varepsilon p^2}\ln^2\frac{\varepsilon+p}{m} - \frac{4}{3} + \\ + \frac{2m^2}{\varepsilon p}F\Big(\frac{2p(\varepsilon+p)}{m^2}\Big)\Big\}, \tag{93.23}$$

где $F(\xi)$ — функция Спенса, определенная согласно (131.19). В нерелятивистском случае формула (93.23) переходит в

$$\varkappa_{\text{изл}} = \frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2 m \text{ (н. р.)} \tag{93.24}$$

(использовано, что $F(\xi) \approx \xi$ при $\xi \ll 1$ — см. (131.23)). Это выражение можно, конечно, получить и непосредственным интегрированием нерелятивистской борновской формулы (93.16). В ультрарелятивистском случае

$$\varkappa_{\text{изл}} = 4Z^2\alpha r_e^2\varepsilon\left(\ln\frac{2\varepsilon}{m} - \frac{1}{3}\right) \text{ (у. р.)} \tag{93.25}$$

(при $\xi \gg 1$ имеем $F(\xi) \approx {}^1\!/_2\ln^2\xi$ — см. (131.20); оба члена с квадратом логарифма в (93.23) могут быть при этом опущены).

Отношение $\varkappa_{\text{изл}}/\varepsilon$ называют также сечением потери энергии на излучение. При больших ε оно растет логарифмически. Это возрастание устраняется, однако, при учете экранирования. При полном экранировании $\varkappa_{\text{изл}}/\varepsilon$ стремится к постоянному пределу $\approx 4Z^2\alpha r_e^2\ln(1/(\alpha Z^{1/3}))$.

При столкновении с атомом некоторое излучение происходит не только на ядре, но и на электронах. Мы увидим ниже (см. § 97), что в ультрарелятивистском случае сечение излучения электрона на электроне отличается от сечения излучения на ядре лишь отсутствием множителя Z^2. Поэтому наличие Z атомных электронов можно приближенно учесть заменой Z^2 на $Z(Z+1)$.

При прохождении через среду, содержащую N атомов на единицу объема, быстрый электрон теряет в среднем свою энергию

[1]) Хотя формула (93.17) вблизи верхнего предела неприменима, ввиду сходимости интеграла это несущественно.

на расстояниях порядка

$$l_{\text{рад}} \sim \frac{\varepsilon}{N\varkappa_{\text{изл}}} \sim \left[Z^2\alpha N r_e^2 \ln\frac{1}{\alpha Z^{1/3}}\right]^{-1}; \qquad (93.26)$$

эту длину называют *радиационной.*

Длина когерентности. Формуле (93.20) можно дать и другое, более общее истолкование: для применимости полученных формул необходимо, чтобы внешнее поле, в котором движется электрон, мало менялось (в направлении движения) на расстояниях

$$l_{\text{ког}} \sim \frac{1}{q_{\min}} \sim \frac{\varepsilon\varepsilon'}{m^2\omega}\left(=\frac{\varepsilon\varepsilon'}{c^3m^2\omega}\right); \qquad (93.27)$$

эту длину называют *длиной формирования* излучения или *длиной когерентности* [1]). Значение (93.27), полученное в борновском приближении, имеет в действительности (для ультрарелятивистских частиц) совершенно общий характер — легко получить его и в противоположном предельном случае квазиклассического движения. Действительно, из формулы (93.22) [2]) сразу видно, что для излучения под малыми углами к направлению движения существенны времена

$$\tau \sim \frac{\varepsilon'}{\varepsilon\omega(1-v)} \sim \frac{\varepsilon\varepsilon'}{m^2\omega},$$

т. е. участок траектории с длиной $c\tau \sim l_{\text{ког}}$.

При заданной частоте ω длина когерентности растет с увеличением энергии электрона. Между тем формулы, полученные для тормозного излучения на отдельном изолированном атоме, могут быть справедливы для излучения при прохождении через среду лишь при условии, что на длине когерентности не происходит повторного излучения фотона или рассеяния электрона. Первое означает, что должно быть $l_{\text{ког}} \ll l_{\text{рад}}$. Но уже значительно раньше нарушается второе условие — на пути $\sim l_{\text{рад}}$ возникает многократное рассеяние электрона на ядрах атомов среды.

Для формулировки количественного условия вернемся к формуле (90.22) до того, как в показателе экспоненты произведено интегрирование по времени, и запишем его в виде

$$-i\frac{\omega\varepsilon}{\varepsilon'}\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau}(1-\mathbf{nv})dt \approx -\frac{i\omega\varepsilon}{\varepsilon'}\left\{(1-v)\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau}\theta^2 dt\right\}, \qquad (93.28)$$

---

[1]) Излагаемые соображения принадлежат *М. Л. Тер-Микаэляну* (1953).

[2]) Вывод формулы (90.22) основан только на малости кривизны траектории и в этом смысле не связан с тем, что в § 90 рассматривалось конкретно магнитное поле.

где θ — малый угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$, связанный с рассеянием на ядрах. При кулоновом рассеянии угол θ меняется малыми «порциями», так что изменение θ со временем имеет характер медленной «диффузии по углам». Средний квадрат отклонения электрона на пути $t - t_1 (= c(t - t_1))$

$$\overline{\theta}^2 \sim (t - t_1)/l_{\text{кул}},$$

где $l_{\text{кул}}$ — длина свободного пробега по отношению к кулоновым столкновениям. Для этого пробега имеем

$$\frac{1}{l_{\text{кул}}} \sim \frac{NZ^2e^4}{\varepsilon} \ln \frac{\chi_{\max}}{\chi_{\min}},$$

где $\chi_{\min}$ и $\chi_{\max}$ — минимальный и максимальный углы рассеяния в одном столкновении, для которых рассеяние можно еще считать резерфордовским (ср. X, § 41) [1]. Первый из них определяется атомными размерами a, на которых поле ядра экранируется: $\chi_{\min} \sim 1/(pa)$. Большие же углы рассеяния ограничены (для ультрарелятивистского электрона) расстояниями порядка радиуса ядра R: $\chi_{\max} \approx 1/(pR)$. Если положить $R \approx 1,5 \cdot 10^{-13} Z^{1/3}$см $\sim$ $\sim r_e Z^{1/3}$, то получим

$$l_{\text{кул}} \sim \frac{\varepsilon^2}{NZ^2e^4 \ln(1/(\alpha Z^{1/3}))} \sim \frac{\alpha\varepsilon^2}{m^2} l_{\text{рад}}. \tag{93.29}$$

Второй член в (93.28), набегающий за время $\tau \sim l_{\text{ког}}$, оценивается теперь как

$$\overline{\theta}^2 \tau \sim \frac{\omega\varepsilon}{\varepsilon'} \frac{l_{\text{ког}}^2}{l_{\text{кул}}} \sim \frac{l_{\text{ког}}}{\alpha l_{\text{рад}}}.$$

Для применимости формул тормозного излучения, полученных без учета многократного рассеяния, этот член должен быть мал по сравнению с единицей. Отсюда находим условие

$$l_{\text{ког}} \ll \alpha l_{\text{рад}}, \tag{93.30}$$

более сильное, чем условие $l_{\text{ког}} \ll l_{\text{рад}}$ (*Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук,* 1953).

§ 94. Образование пар фотоном в поле ядра

Образование электрон-позитронной пары при столкновении фотона с ядром ($Z + \gamma \to Z + e^- + e^+$) и тормозное излучение

---

[1]) Напомним, что длина пробега определяется транспортным сечением $\sigma_{\text{тр}} = \int (1 - \cos\chi) d\sigma(\chi)$. Для рассеяния ультрарелятивистских электронов на кулоновом центре сечение $d\sigma(\chi)$ дается формулой (80.10).

при столкновении электрона с ядром ($Z+e^- \to Z+e^+\gamma$) — два перекрестных канала одной и той же реакции. В § 91 были уже сформулированы правила, по которым преобразуются формулы при переходе от второго из этих случаев к первому. В данном случае, применив эти правила к формуле (93.8), получим следующее выражение для дифференциального сечения образования пары неполяризованным фотоном, усредненное по поляризациям компонент пары [1]:

$$
\begin{aligned}
d\sigma = {} & \frac{Z^2\alpha r_e^2}{2\pi}\frac{m^2 p_+ p_- d\varepsilon}{\omega^3 q^4}\sin\theta_+ d\theta_+ \sin\theta_- d\theta_- d\varphi \times \\
& \times \left\{ \frac{p_+^2}{\varkappa_+^2}(4\varepsilon_-^2 - q^2)\sin^2\theta_+ + \frac{p_-^2}{\varkappa_-^2}(4\varepsilon_+^2 - q^2)\sin^2\theta_- - \right. \\
& - \frac{2\omega^2}{\varkappa_+\varkappa_-}(p_+^2\sin^2\theta_+ + p_-{}^2\sin^2\theta_-) - \\
& \left. - \frac{2p_+p_-}{\varkappa_+\varkappa_-}(2\varepsilon_+^2 + 2\varepsilon_-^2 - q^2)\sin\theta_+\sin\theta_-\cos\varphi \right\}, \qquad (94.1)
\end{aligned}
$$

$$
\varkappa_\pm = \varepsilon_\pm - p_\pm\cos\theta_\pm, \quad q^2 = (\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- - \mathbf{k})^2, \quad \varepsilon_+ + \varepsilon_- = \omega
$$

(*H. A. Bethe, W. Heitler,* 1934).

Таким же преобразованием получим из (93.9) распределение компонент пары по энергиям:

$$
\begin{aligned}
d\sigma_{\varepsilon_+} = {} & Z^2\alpha r_e^2 \frac{p_+p_-}{\omega^3} d\varepsilon_+ \left\{ -\frac{4}{3} - 2\varepsilon_+\varepsilon_- \frac{p_+^2 + p_-^2}{p_+^2 p_-^2} + \right. \\
& + m^2\left(l_- \frac{\varepsilon_+}{p_-^3} + l_+ \frac{\varepsilon_-}{p_+^3} - \frac{l_+ l_-}{p_+p_-} \right) + \\
& + L\left[-\frac{8\varepsilon_+\varepsilon_-}{3p_+p_-} + \frac{\omega^2}{p_+^3p_-^3}(\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2 + p_+^2p_-^2 - m^2\varepsilon_+\varepsilon_-) - \right. \\
& \left.\left. - \frac{m^2\omega}{2p_+p_-}\left(l_+ \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+^2}{p_+^3} + l_- \frac{\varepsilon_+\varepsilon_- - p_-^2}{p_-^3} \right) \right] \right\}, \\
& L = \ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_- + p_+p_- + m^2}{\varepsilon_+\varepsilon_- - p_+p_- + m^2}, \quad l_\pm = \ln\frac{\varepsilon_\pm + p_\pm}{\varepsilon_\pm - p_\pm}. \qquad (94.2)
\end{aligned}
$$

Поскольку полученные формулы основаны на борновском приближении, они справедливы при условиях $Ze^2/v_\pm \ll 1$. Отметим, что симметричность формул (94.1),(94.2) по отношению к электрону и позитрону является следствием именно борновского приближения; она исчезла бы в более высоких приближениях.

[1]) О поляризационных эффектах в образовании пар фотоном см. ту же литературу, которая была указана в § 93 для тормозного излучения.

В ультрарелятивистском случае ($\varepsilon_\pm \gg m$) электрон и позитрон вылетают под углами $\theta_\pm \sim m/\varepsilon_\pm$ к направлению падающего фотона. Угловое распределение дается формулой, аналогичной (93.13):

$$d\sigma = \frac{8}{\pi}Z^2\alpha r_e^2\frac{m^4\varepsilon_+\varepsilon_-}{\omega^3 q^4}d\varepsilon_+ \times$$
$$\times\left\{-\frac{\delta_+^2}{(1+\delta_+^2)^2} - \frac{\delta_-^2}{(1+\delta_-^2)^2} + \frac{\omega^2}{2\varepsilon_+\varepsilon_-}\frac{\delta_+^2+\delta_-^2}{(1+\delta_+^2)(1+\delta_-^2)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\varepsilon_+}{\varepsilon_-}+\frac{\varepsilon_-}{\varepsilon_+}\right)\frac{\delta_+\delta_-\cos\varphi}{(1+\delta_+^2)(1+\delta_-^2)}\right\}\delta_+\delta_- d\delta_+ d\delta_- d\varphi, \quad (94.3)$$

причем

$$\frac{q^2}{m^2} = \delta_+^2 + \delta_-^2 - 2\delta_+\delta_-\cos\varphi + m^2\left(\frac{1+\delta_+^2}{2\varepsilon_+} + \frac{1+\delta_-^2}{2\varepsilon_-}\right)^2. \quad (94.4)$$

Распределение по энергиям в этом случае:

$$d\sigma = 4Z^2\alpha r_e^2\frac{d\varepsilon_+}{\omega^3}\left(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2+\frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right)\left(\ln\frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega}-\frac{1}{2}\right) \text{ (у. р.)}. \quad (94.5)$$

Интегрирование этого выражения по ε_+ (в пределах от m до ω) дает полное сечение образования пар фотоном заданной энергии [1]:

$$\sigma = \frac{28}{9}Z^2\alpha r_e^2\left(\ln\frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42}\right), \quad \omega \gg m. \quad (94.6)$$

Как и для тормозного излучения, логарифмический член в сечении в ультрарелятивистском случае происходит от области значений $q \sim m^2/\varepsilon$. Этому соответствуют теперь углы, для которых

$$|\delta_+ - \delta_-| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}, \quad |\pi - \varphi| \lesssim \frac{m}{\varepsilon}$$

(вместо $\varphi \lesssim m/\varepsilon$ в (93.15)). Таким образом, в логарифмическом приближении направления электрона и позитрона образуют обратно пропорциональные энергиям частиц малые углы с направлением фотона и лежат почти в одной плоскости с последним, но по разные стороны от него.

Вблизи порога реакции ($\omega \to 2m$) борновское приближение неприменимо. Вывод количественной формулы в этом случае требовал бы точного учета кулонова взаимодействия трех заряженных частиц, имеющихся в конечном состоянии (ядро и пара). Симметрия по отношению к электрону (притягивающемуся

[1]) Ввиду сходимости интеграла у обоих пределов неприменимость формулы (94.5) при малых $\varepsilon_\pm - m$ несущественна.

к ядру) и к позитрону (отталкивающемуся от ядра) при этом, конечно, исчезает.

Если

$$Z\alpha \ll \sqrt{\frac{\omega - 2m}{\omega}} \ll 1, \tag{94.7}$$

то борновское приближение еще применимо. При нерелятивистских энергиях пары $\omega \approx 2m \gg p_\pm$, поэтому $q \approx \omega$. В (94.1) можно положить везде $\varepsilon_\pm = \varkappa_\pm = m$, $\omega = 2m$, после чего эта формула сводится к выражению

$$d\sigma = \frac{Z^2 \alpha r_e^2}{64\pi^2} \frac{p_+ p_-}{m^5} (p_+^2 \sin^2\theta_+ + p_-^2 \sin^2\theta_-) do_+ do_- d\varepsilon_+. \tag{94.8}$$

После интегрирования по углам

$$d\sigma = \frac{1}{6} Z^2 \alpha r_e^2 \frac{p_+ p_- (p_+^2 p_-^2)}{m^5} d\varepsilon_+ = \\ = \frac{2Z^2 \alpha r_e^2}{3m^3} (\omega - 2m) \sqrt{(\varepsilon_+ - m)(\varepsilon_- - m)} d\varepsilon_+. \tag{94.9}$$

Наконец, интегрируя по ε_+ (в пределах от m до $\omega - m$), получаем полное сечение

$$\sigma = \frac{\pi}{12} Z^2 \alpha r_e^2 \left(\frac{\omega - 2m}{m}\right)^3. \tag{94.10}$$

Если относительная скорость v_0 компонент рождающейся пары мала, то необходимо учесть их кулоново взаимодействие друг с другом (*А. Д. Сахаров,* 1948). Оно становится существенным, когда v_0 порядка (или меньше) скорости частицы в связанном состоянии электрона и позитрона (позитроний):

$$v_0 \lesssim \alpha. \tag{94.11}$$

Рассмотрим процесс в системе центра инерции пары. На диаграммах, изображающих процесс в этой системе, существенны виртуальные импульсы $\sim m$. Другими словами, существенны расстояния между электроном и позитроном $\sim 1/m$. Между тем волновая функция их относительного движения $\psi(r)$ существенно меняется лишь на расстояниях $r \sim 1/(mv_0) \sim 1/(m\alpha)$, т. е. больших по сравнению с $1/m$. Поэтому учет взаимодействия частиц сведется к появлению в матричном элементе перехода множителя $\psi^*(0)$. Соответственно дифференциальное сечение умножится на $|\psi^*(0)|^2$, т. е. на

$$\frac{2\pi\alpha/v_0}{1 - e^{-2\pi\alpha/v_0}} \tag{94.12}$$

(см. III, (136.11)). Относительная скорость двух частиц есть скорость одной из них в системе покоя другой. Сравнив значения инварианта $p_{+\mu}p_{-}^{\mu}$ в этой системе и в лабораторной системе (системе покоя ядра), получим

$$\frac{m^2}{\sqrt{1-v_0^2}} = \varepsilon_+\varepsilon_- - \mathbf{p}_+\mathbf{p}_-,$$

откуда можно найти v_0. Если $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{p}_-$ близки к друг к другу по абсолютному значению и направлению, то для v_0 получается приближенная формула

$$v_0^2 = \frac{p^2}{m^2}\vartheta^2 + \frac{(p_+ - p_-)^2}{\varepsilon^2}, \tag{94.13}$$

применимая при $v_0 \ll 1$; $p = (p_+ + p_-)/2$, $\varepsilon = (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)/2$, ϑ — угол между $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{p}_-$.

Поправка в сечении, определяемая формулами (94.12), (94.13), приводит к появлению аномалии в корреляции между импульсами рождаемых электрона и позитрона: узкому максимуму при $\mathbf{p}_+ \approx \mathbf{p}_-$.

§ 95. Точная теория рождения пар в ультрарелятивистском случае

В двух предыдущих параграфах тормозное излучение и рождение пар фотоном в релятивистской области были изучены на основе борновского приближения, для чего во всяком случае требовалось выполнение условия $Z\alpha \ll 1$. В § 95, 96 излагается теория этих процессов, свободная от указанного ограничения, т. е. справедливая и при $Z\alpha \sim 1$ (*H. A. Bethe, L. Maximon,* 1954). При этом предполагается, что обе частицы (начальный и конечный электрон или компоненты пары) ультрарелятивистские; их энергия $\varepsilon \gg m$.

Мы видели, что в ультрарелятивистском случае обе частицы летят под малыми углами (θ, θ' или θ_+, θ_-) к направлению фотона: $\theta \lesssim m\varepsilon$. Такое свойство сохраняется и в точной (по $Z\alpha$) теории, и мы будем рассматривать именно эту область углов.

Передача импульса ядру в этой области: $q \sim m$. Это значит, что в волновых функциях существенны прицельные параметры $\rho \sim 1/q \sim 1/m$, т. е. «большие» расстояния. На таких расстояниях можно пользоваться волновой функцией, полученной в § 39. Изложим соответствующие вычисления для рождения пар.

Сечение рождения пары имеет вид, аналогичный сечению фотоэффекта (ср. (56.1),(56.2)):

$$d\sigma = 2\pi \left| e\sqrt{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}M_{fi}\right|^2 \delta(\omega - \varepsilon_+ - \varepsilon_-)\frac{d^3p_+d^3p_-}{(2\pi)^3}, \tag{95.1}$$

где

$$M_{fi} = \int \psi^{(-)*}_{\varepsilon_-\mathbf{p}_-}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e})e^{i\mathbf{kr}}\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+-\mathbf{p}_+}d^3x. \tag{95.2}$$

Здесь $\psi^{(-)}_{\varepsilon_-\mathbf{p}_-}$ — волновая функция электрона, а $\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+-\mathbf{p}_+}$ — волновая функция с отрицательной энергией $(-\varepsilon_+)$ и импульсом $-\mathbf{p}_+$.

Функция же $\psi^{(-)}_{\varepsilon_-\mathbf{p}_-}$, относящаяся к частице в конечном состоянии, должна содержать в своей асимптотике (наряду с плоской волной) сходящуюся сферическую волну; это обстоятельство отмечено верхним индексом $(-)$ у функции. Согласно (39.10) такая волновая функция [1])

$$\psi^{(-)}_{\varepsilon_-\mathbf{p}_-} = \frac{C^{(-)}}{\sqrt{2\varepsilon_-}}e^{i\mathbf{p}_-\mathbf{r}}\left(1 - \frac{i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla}}{2\varepsilon_-}\right)F(-i\nu,\, 1,\, -i(p_-r + \mathbf{p}_-\mathbf{r}))u(p_-), \tag{95.3}$$

$$C^{(-)} = e^{\pi\nu/2}\Gamma(1 + i\nu), \quad \nu = Z\alpha.$$

Функция же $\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+-\mathbf{p}_+}$ должна содержать в своей асимптотике расходящуюся сферическую волну (индекс $(+)$ сверху), поскольку по смыслу она является волновой функцией «начального состояния с отрицательной энергией». Волновая функция позитрона (образуемая из $\psi^{(+)*}_{-\varepsilon_+-\mathbf{p}_+}$) окажется при этом со сходящейся волной в асимптотике, как и требуется для конечной частицы. Согласно (39.11) такая функция

$$\psi^{(+)}_{-\varepsilon_+-\mathbf{p}_+} = \\ = \frac{C^{(+)}}{\sqrt{2\varepsilon_+}}e^{-i\mathbf{p}_+\mathbf{r}}\left(1 + \frac{i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\nabla}}{2\varepsilon_+}\right)F(-i\nu,\, 1,\, +i(p_+r + \mathbf{p}_+\mathbf{r}))u(-p_+), \tag{95.4}$$

$$C^{(+)} = e^{-\pi\nu/2}\Gamma(1 + i\nu).$$

Отметим, что необходимость учета членов $\sim 1/\varepsilon$ в (95.3), (95.4) связана с матричной структурой M_{fi} (95.2). Матричный элемент $(\boldsymbol{\alpha})_{fi}$, есть вектор с направлением, близким к $\mathbf{k}$. Поэтому

[1]) В этом параграфе $p_\pm = |\mathbf{p}_\pm|$, $q = |\mathbf{q}|$.

основной член в $(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e})_{fi}$ оказывается малым, а поправочные члены одного порядка величины с ним.

Подставляя (95.3),(95.4) в (95.2) и пренебрегая членами $\sim 1/(\varepsilon_+\varepsilon_-)$, находим

$$M_{fi} = \frac{N}{2\sqrt{\varepsilon_+\varepsilon_-}}u^*(p_-)\{(\mathbf{e}\boldsymbol{\alpha})I + (\mathbf{e}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{I}_+) + (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{I}_-)(\mathbf{e}\boldsymbol{\alpha})\}u(-p_+), \tag{95.5}$$

где

$$N = C^{(+)}C^{(-)} = \pi\nu/(\operatorname{sh}\pi\nu), \tag{95.6}$$

$$I = \int e^{-i\mathbf{qr}}F_-^*F_+d^3x,$$

$$\mathbf{I}_+ = \frac{i}{2\varepsilon_+}\int e^{-i\mathbf{qr}}F_-^*\boldsymbol{\nabla}F_+d^3x, \quad \mathbf{I}_- = \frac{i}{2\varepsilon_-}\int e^{-i\mathbf{qr}}(\boldsymbol{\nabla}F_-)^*F_+d^3x, \tag{95.7}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- - \mathbf{k}$$

(F_- и F_+ — обозначают для краткости гипергеометрические функции, входящие в (95.3) и (95.4)). Сразу же отметим, что интегралы I, $\mathbf{I}_+$, $\mathbf{I}_-$ связаны одним тождеством: из

$$\int \boldsymbol{\nabla}(e^{-i\mathbf{qr}}F_-^*F_+)d^3x = 0$$

имеем

$$\mathbf{q}I + 2\varepsilon_+\mathbf{I}_+ + 2\varepsilon_-\mathbf{I}_- = 0. \tag{95.8}$$

Квадрат $|M_{fi}|^2$ усредняем по поляризациям падающего фотона и суммируем по направлениям спинов электрона и позитрона [1]. Это осуществляется заменой тензора:

$$e_ie_k^* \to \frac{1}{2}(\delta_{ik} - n_in_k), \ \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{\omega},$$

и биспинорных произведений:

$$u_\pm\overline{u}_\pm \to 2\rho_\pm = (\varepsilon_\pm\gamma^0 - \mathbf{p}_\pm\gamma \mp m).$$

Заменив также $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, найдем

$$|M_{fi}|^2 \to \frac{N^2}{2\varepsilon_+\varepsilon_-}\{\operatorname{Sp}\rho_-\mathbf{Q}\rho_+\overline{\mathbf{Q}} - \operatorname{Sp}\rho_-(\mathbf{nQ})\rho_+(\mathbf{n}\overline{\mathbf{Q}})\},$$

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\gamma}I - \gamma^0\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{I}_+) - \gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{I}_-)\boldsymbol{\gamma},$$

$$\overline{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\gamma}I^* - \gamma^0\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{I}_+^*) - \gamma^0\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{I}_-^*).$$

---

[1]) Вычисления с учетом поляризации всех частиц см. *Olsen H., Maximon L.*//Phys. Rev. — 1959. — V. 114. — P. 887, а также указанную на с. 454 книгу *В. Я. Байера, В. М. Каткова и В. С. Фадина.*

Выпишем сразу результат, получающийся после надлежащих пренебрежений, для интересующего нас ультрарелятивистского случая в области малых углов

$$\theta_\pm \sim m/\varepsilon \ll 1. \tag{95.9}$$

Введем вспомогательные векторы:

$$\delta_\pm = \frac{1}{m}(\mathbf{p}_\pm)_\perp, \ \delta_\pm = \frac{\varepsilon_\pm}{m}\theta_\pm \tag{95.10}$$

(индекс $\perp$ означает составляющую, перпендикулярную направлению $\mathbf{k}$). С их помощью ответ записывается в виде

$$|M_{fi}|^2 \to \frac{N^2}{4}\left\{\frac{m^2\omega^2}{2\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2}|I|^2 + 2\left|I\frac{m\boldsymbol{\delta}_+}{2\varepsilon_+} + \mathbf{I}_+\right|^2 + 2\left|I\frac{m\boldsymbol{\delta}_-}{2\varepsilon_-} + \mathbf{I}_-\right|^2\right\}. \tag{95.11}$$

Здесь учтено, что $I \sim \frac{\varepsilon}{q}I_\pm \sim \frac{\varepsilon}{m}I_\pm$ (как это видно из (95.8)), и опущены члены более высокого порядка по m/ε.

Интегралы $\mathbf{I}_\pm$ можно представить в виде

$$\mathbf{I}_\pm = i\frac{p_\pm}{2\varepsilon_\pm}\frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}_\pm},$$
$$J = \int \frac{e^{-i\mathbf{qr}}}{r}F(-i\nu,\, 1,\, i(p_+r + \mathbf{p}_+\mathbf{r}))F(i\nu,\, 1,\, i(p_-r + \mathbf{p}_-\mathbf{r}))d^3x. \tag{95.12}$$

Интеграл J выражается через полную гипергеометрическую функцию [1]:

$$J = \frac{4\pi}{q^2}\left(\frac{q^2 - 2\mathbf{p}_+\mathbf{q}}{q^2 - 2\mathbf{p}_-\mathbf{q}}\right)^{i\nu}F(-i\nu,\, i\nu,\, 1,\, z),$$
$$z = 2\frac{q^2(p_+p_- - \mathbf{p}_+\mathbf{p}_-) + 2(\mathbf{p}_+\mathbf{q})(\mathbf{p}_-\mathbf{q})}{(q^2 - 2\mathbf{p}_+\mathbf{q})(q^2 - 2\mathbf{p}_-\mathbf{q})}. \tag{95.13}$$

Дифференцирование по $\mathbf{p}_\pm$ должно производиться при заданном параметре $\mathbf{q}$, и лишь затем можно положить $\mathbf{q} = \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- - \mathbf{k}$. Приведем результат в форме, в которой уже произведены пренебрежения, отвечающие ультрарелятивистскому случаю и условиям (95.9):

$$\mathbf{I}_\pm = \frac{4\pi}{q^2}\frac{\varepsilon_\mp}{m^2\omega}\left(\frac{\varepsilon_+\xi_+}{\varepsilon_-\xi_-}\right)^{i\nu}\left\{\pm\nu\mathbf{q}\xi_\mp F(z) + i\frac{q^2}{m^2}F'(z)(\mathbf{q}\xi_\mp - m\boldsymbol{\delta}_\pm)\right\}. \tag{95.14}$$

[1]) Проведение вычислений см. в указанной на с. 438 статье *Нордсика*.

Здесь введены обозначения:

$$\xi_\pm = \frac{1}{1+\delta_\pm^2}, \quad z = 1 - \frac{q^2}{m^2}\xi_+\xi_-, \qquad F(z) = F(-i\nu,\, i\nu,\, 1,\, z) \tag{95.15}$$

($F(z)$ — вещественная функция). Интеграл I вычисляется затем прямо из (95.8).

Подставив значения интегралов в (95.11), а затем в (95.1), получим искомое дифференциальное сечение. Окончательная формула:

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi\nu}{\operatorname{sh}\pi\nu}\right)^2 Z^2\alpha r_e^2 \frac{m^4}{q^4\omega^3}\delta_+ d\delta_+ \cdot \delta_- d\delta_- \cdot d\varphi d\varepsilon_+ \Big\{ F^2(z) \times \\ \times [-2\varepsilon_+\varepsilon_-(\delta_+^2\xi_+^2 + \delta_-^2\xi_-^2) + \omega^2(\delta_+^2 + \delta_-^2)\xi_+\xi_- + 2(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2) \times \\ \times \delta_+\delta_-\xi_+\xi_- \cos\varphi] + \frac{q^4}{m^4}\frac{\xi_+^2\xi_-^2}{\nu^2} F'^2(z)[-2\varepsilon_+\varepsilon_-(\delta_+^2\xi_+^2 + \delta_-^2\xi_-^2) + \\ + \omega^2(1+\delta_+^2\delta_-^2)\xi_+\xi_- - 2(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2)\delta_+\delta_-\xi_+\xi_- \cos\varphi] \Big\}. \end{aligned} \tag{95.16}$$

При $\nu \to 0$

$$\pi\nu/(\operatorname{sh}\pi\nu) \to 1, \quad F(z) \to 1, \quad F'(z) \approx \nu^2 \to 0.$$

Выражение (95.16) сводится при этом, как и должно быть, к формуле Бете — Гайтлера (94.3), отвечающей борновскому приближению. Оно сводится к той же формуле также и при произвольном ν, если углы вылета пары удовлетворяют условиям

$$|\delta_+ - \delta_-| \ll 1, \quad |\pi - \varphi| \ll 1.$$

Действительно, при этом $q \ll m$, так что второй член в фигурных скобках в (95.16) может быть опущен ввиду наличия в нем лишнего (по сравнению с первым членом) множителя $(q/m)^4$. В первом же члене имеем (заметив, что $(1-z) \sim q^2/m^2 \ll 1$ [1]))

$$F(z) \to F(1) \equiv F(-i\nu,\, i\nu,\, 1,\, 1) = \frac{1}{\Gamma(1-i\nu)\Gamma(1+i\nu)} = \frac{\operatorname{sh}\pi\nu}{\pi\nu}, \tag{95.17}$$

в результате чего сокращается аналогичный множитель перед фигурными скобками.

Перейдем теперь к интегрированию сечения по направлениям вылета пары.

[1]) Это значение функции можно получить из формулы (е. 7) (см. II), связывающей гипергеометрические функции аргументов z и $1 - z$.

Интегрирование по углам разобьем на две области, I и II, в которых соответственно

$$\mathrm{I)}\, 1 - z > 1 - z_1, \quad \mathrm{II)}\, 1 - z < 1 - z_1,$$

где z_1 — некоторое значение, для которого $1 \gg 1 - z_1 \gg (m/\varepsilon)^2$. Поскольку в области II $1 - z \ll 1$, $q^2 \ll m^2$, то, согласно сказанному выше, здесь $d\sigma \approx d\sigma_{\text{Б}} \equiv d\sigma|_{\nu=0}$, где $d\sigma_{\text{Б}}$ — сечение в борновском приближении. Поэтому интеграл по углам :

$$d\sigma_{\varepsilon_+} \equiv \int d\sigma = \int_{\mathrm{I}} d\sigma + \int_{\mathrm{II}} d\sigma|_{\nu\to 0} = (d\sigma_{\varepsilon+})_{\text{Б}} + \int_{\mathrm{I}} (d\sigma - d\sigma|_{\nu\to 0}), \tag{95.18}$$

где $(d\sigma_{\varepsilon+})_{\text{Б}}$ — проинтегрированное по углам борновское сечение (94.5).

В области I имеем

$$q^2/m^2 \approx \delta_+^2 + \delta_-^2 + 2\delta_+\delta_- \cos\varphi.$$

От переменных δ_+, δ_-, φ перейдем к переменным ξ_+, ξ_-, z. Прямым вычислением якобиана преобразования найдем

$$\delta_+ d\delta_+ \cdot \delta_- d\delta_- \cdot d\varphi \to \frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{8m^2} \frac{d\xi_+ d\xi_- d\varphi}{(\xi_+\xi_-)^3 \sin\varphi},$$

причем

$$1 - z = \frac{q^2}{m^2}\xi_+\xi_- =$$
$$= \xi_+ + \xi_- - 2\xi_+\xi_- + 2\sqrt{\xi_+\xi_-(1-\xi_+)(1-\xi_-)}\cos\varphi.$$

Выразив отсюда $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и подставив в (95.16), после простых алгебраических преобразований получим

$$d\sigma = A d\varepsilon_+ \frac{2d\xi_+ d\xi_- dz}{[z(1-z) - (1-z)(\xi_+ + \xi_- - 1)^2 - z(\xi_+ - \xi_-)^2]^{1/2}} \times$$
$$\times \left\{ \frac{F^2(z)}{(1-z)^2}[(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2)(1-z) + 2\varepsilon_+\varepsilon_-(\xi_+ - \xi_-)^2] + \right.$$
$$\left. + \left\{ \frac{F^{2\prime}(z)}{\nu^2}[(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2)z + 2\varepsilon_+\varepsilon_-(\xi_+ + \xi_- - 1)^2] \right\}, \right.$$
$$A = \left(\frac{\pi\nu}{\operatorname{sh}\pi\nu}\right)^2 \frac{Z^2\alpha r_e^2}{2\pi\omega^3}.$$

Наконец, вводим вместо ξ_+, ξ_- новые «сферические» переменные χ, ψ:

$$\xi_+ + \xi_- - 1 = \sqrt{z}\sin\chi\cos\psi;$$
$$\xi_+ - \xi_- = \sqrt{1-z}\sin\chi\sin\psi;$$
$$0 \leqslant \chi \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi;$$
$$2d\xi_+ d\xi_- \to \sqrt{z(1-z)}\sin\chi\cos\chi d\chi d\psi.$$

Указанные интервалы изменения χ и ψ отвечают изменению ξ_+, ξ_- от 0 до 1, т. е. δ_+, δ_- (или, что то же, θ_+, θ_-) от 0 до ∞; быстрая сходимость интеграла допускает такое расширение области изменения углов. После преобразования корень в знаменателе сводится к $\sqrt{z(1-z)}\cos\chi$; интегрирование по $d\chi d\psi$ элементарно и дает

$$d\sigma = 2A\cdot 2\pi dz\left(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2+\frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right)\left[\frac{F^2(z)}{1-z}+\frac{z}{\nu^2}F'^2(z)\right]d\varepsilon_+.$$

Сюда введен лишний множитель 2, учитывающий тот факт, что интегрирование по z будет производиться от 0 до z_1, между тем как при изменении азимута φ от 0 до π и от π до 2π каждое значение z проходится дважды.

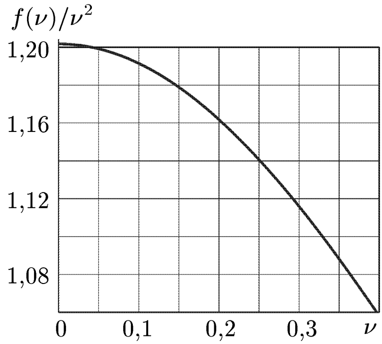


Рис. 18

Интегрирование по dz производится с помощью формулы (92.14), которая при $\nu' = -\nu$ (и соответственно вещественной $F(z)$) имеет вид

$$\frac{F^2}{1-z^2}+\frac{z}{\nu^2}F'^2 = \frac{1}{\nu^2}\frac{d}{dz}(zFF').$$

Интеграл от этого выражения равен $z_1F(z_1)F'(z_1)/\nu^2$. Значение $z_1F(z_1) \approx F(l)$ берется из (95.17), а предельное выражение для $F'(z_1\to 1)$ дастся формулой [1])

$$\frac{1}{\nu^2}F'(z) = F(1-i\nu,\,1+i\nu,\,2,\,z) \approx -[\ln(1-z)+2f(\nu)]\frac{\operatorname{sh}\pi\nu}{\pi\nu},$$

где

$$f(\nu) = \frac{1}{2}[\Psi(1+i\nu)+\Psi(1-i\nu)-2\Psi(1)] = \nu^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+\nu^2)}, \tag{95.19}$$

$$\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z).$$

Подставив все найденные выражения в (95.18), получим следующую окончательную формулу:

$$d\sigma_{\varepsilon_+} = 4Z^2\alpha r_e^2\left(\varepsilon_+^2+\varepsilon_-^2+\frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right)\left[\ln\frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\omega}-\frac{1}{2}-f(\alpha Z)\right]\frac{d\varepsilon_+}{\omega^3}. \tag{95.20}$$

[1]) Вывод этих формул можно найти в приложении к статье *Davles H., Bethe H. A., Maximon L. C.*//Phys.Rev. — 1954. — V. 93. — P. 788.

Полное сечение образования пары фотоном с энергией ω:

$$\sigma = \frac{28}{9} Z^2 \alpha r_e^2 \left[\ln \frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42} - f(\alpha Z) \right]. \tag{95.21}$$

Мы видим, что в этих формулах изменения сводятся к вычитанию из логарифма универсальной функции атомного номера $f(\alpha Z)$. На рис. 18 дан график этой функции. При $\nu \ll 1$ функция $f(\nu) \approx 1,2\nu^2$.

§ 96. Точная теория тормозного излучения в ультрарелятивистском случае

Матричный элемент для тормозного излучения

$$M_{fi} = \int \psi_{\varepsilon' \mathbf{p}'}^{(-)*} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{e}^*) e^{-i\mathbf{kr}} \psi_{\varepsilon \mathbf{p}}^{(+)} d^3x; \tag{96.1}$$

волновые функции начального (ε, $\mathbf{p}$) и конечного (ε', $\mathbf{p}'$) электронов содержат в своих асимптотиках соответственно выходящую и входящую сферические волны. Вычисление этого интеграла аналогично вычислению матричного элемента (95.2). Мы, однако, изложим здесь другой способ вычисления сечения тормозного излучения, основанный на квазиклассичности процесса и не использующий явного вида волновых функций электрона в поле ядра; в этом смысле метод не связан с конкретным видом потенциала поля (*В. Н. Байер, В. М. Катков,* 1968).

В процессе тормозного излучения ядро передает электрону и фотону импульс $\mathbf{q} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} - \mathbf{p}$. Как и в задаче о рождении пар, надо различать две области значений передачи импульса $\mathbf{q}_\perp$, поперечной по отношению к $\mathbf{p}$:

$$\text{I)}\ m \gtrsim q_\perp \gg \omega m^2/\varepsilon^2, \quad \text{II)}\ q_\perp \sim \omega m^2/\varepsilon^2 \ll m. \tag{96.2}$$

Очевидно, что в области I сечение испускания фотона дается своим борновским значением: для таких $\mathbf{q}_\perp$ изменение импульса отдачи ядра при излучении несущественно, как это будет показано в § 98 (см. вывод условия (98.10)). Поэтому в области I сечение процесса равно произведению точного сечения рассеяния электрона в поле неподвижного ядра и вероятности испускания фотона, не зависящей от вида поля. Но согласно (80.10) сечение рассеяния в кулоновом поле для малых углов совпадает со своим борновским значением. То же самое относится поэтому к сечению всего процесса в области I.

Таким образом, требует особого рассмотрения только область II. Малым передачам импульса отвечает прохождение электрона мимо ядра на больших прицельных расстояниях: $\rho \sim 1/q_\perp \gtrsim$ $\gtrsim \varepsilon/m^2$.Но на таких расстояниях движение электрона заведомо

квазиклассично, в чем легко убедиться простым применением обычного условия квазиклассичности (46.7) (см. III)к ультрарелятивистскому уравнению (39.5).

Квазиклассичность движения позволяет применить метод, использованный уже в § 90 для магнитотормозного излучения. При этом выражение (90.7) в данном случае представляет собой вероятность испускания при однократном прохождении электрона мимо ядра.

Для фигурировавшей в § 90 функции L остается в силе формула (90.18); единственное отличие состоит в форме квазиклассической траектории электрона $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, по которой вычисляется разность $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

На больших прицельных расстояниях поле ядра можно считать слабым. В нулевом приближении траектория представляет собой прямую, проходящую на расстоянии ρ от центра. В следующем приближении имеем уравнение движения (ср. I, § 20)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{r}\frac{dU}{dr},$$

где $\boldsymbol{\rho}$ — вектор в плоскости xy, перпендикулярной начальному импульсу электрона, а в качестве r в правой стороне уравнения следует взять функцию нулевого приближения:

$$r \approx \sqrt{\rho^2 + v^2t^2} \approx \sqrt{\rho^2 + t^2}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_1 = -\boldsymbol{\rho}\int\limits_{t_1}^{t} \frac{dU}{dt}\frac{dt}{r}. \tag{96.3}$$

С достаточной точностью скорость $\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t)/\varepsilon$ (где энергия ε зависит только от величины, но не от направления $\mathbf{p}$) можно считать постоянной. Еще одно интегрирование дает тогда

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_1(t - t_1) - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_1}^{t}[\mathbf{p}(t') - \mathbf{p}_1]dt'. \tag{96.4}$$

Положим $t_1 = -\infty$, так что величины $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}(-\infty) \equiv \mathbf{p}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\varepsilon$ будут начальными импульсом и скоростью электрона.

Представим вероятность (90.7) в виде

$$dw = |a(\boldsymbol{\rho})|^2\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{96.5}$$

где

$$a(\boldsymbol{\rho}) = e\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(t)\exp\Big\{i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t)]\Big\}dt, \tag{96.6}$$

$$R(t) = \frac{u^*_{\varepsilon'\mathbf{p}'}}{\sqrt{2\varepsilon'}}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^*)\frac{u_{\varepsilon\mathbf{p}}}{\sqrt{2\varepsilon}},$$

здесь $\varepsilon' = \varepsilon - \omega$, $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{k}$. Классическая функция $\mathbf{p}(t)$ дается формулой (96.3). Если $\mathbf{p}$ — начальный импульс электрона, то для кулонова поля ($U = -\nu/r$, $\nu = Z\alpha$) имеем

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p} - \frac{\nu\boldsymbol{\rho}}{\rho^2}\left[\frac{t}{\sqrt{\rho^2+t^2}} + 1\right],$$
$$\mathbf{r}(t) = \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon}t - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^2}\frac{\nu}{\varepsilon}\left[\sqrt{\rho^2+t^2} + t\right].$$

Введя передачу импульса в классическом рассеянии

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{p}(\infty) - \mathbf{p}(-\infty) = -2\boldsymbol{\rho}\nu/\rho^2, \tag{96.7}$$

можно переписать эти формулы как

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \mathbf{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}\left[\frac{t}{\sqrt{\rho^2+t^2}} + 1\right],\\ \mathbf{r}(t) &= \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}\right)\frac{t}{\varepsilon} + \frac{\boldsymbol{\Delta}}{2\varepsilon}\sqrt{t^2+\rho^2}.\end{aligned} \tag{96.8}$$

Используя теперь формулу (90.20) для $R(t)$ и выражения (96.8) для $\mathbf{p}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$, можно произвести интегрирование по времени в (96.6). Оно осуществляется введением переменной

$$\xi = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}[\omega t - \mathbf{kr}(t)]$$

вместо t и использованием формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{-i\xi}d\xi}{\sqrt{\chi^2+\xi^2}} = 2i\chi K_1(\chi),$$

где K_1 — функция Макдональда. В полном проведении этого вычисления, однако, нет необходимости, поскольку нам требуется выражение $a(\boldsymbol{\rho})$ лишь для малых значений независимого параметра $\boldsymbol{\Delta}(\Delta \ll m)$. В этом случае находим

$$a(\boldsymbol{\rho}) = w_f^*\mathbf{D}w_i \cdot \boldsymbol{\Delta}\chi K_1(\chi), \tag{96.9}$$

где

$$\chi = \rho\frac{\omega\varepsilon}{\varepsilon'}(1 - \mathbf{nv}),$$

$\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, а $\mathbf{D}$ — некоторая функция $\mathbf{p}$, ε и $\mathbf{k}$ (но не $\boldsymbol{\rho}$), причем ее точный вид несуществен [1]). Поскольку в ультрарелятивистском

[1]) Спиноры w_i и w_f можно считать при интегрировании постоянными, т. е. можно пренебречь изменением поляризации электрона при его классическом ультрарелятивистском движении. Это следует из уравнений, полученных в § 41.

случае фотон испускается под малым углом θ к направлению скорости электрона, имеем

$$\chi \approx \rho\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\omega\Big(1 - v + \frac{\theta^2}{2}\Big),$$

или

$$\chi = \rho\frac{\omega m^2}{2\varepsilon\varepsilon'}(1 + \delta^2), \quad \delta = \frac{\theta\varepsilon}{m}. \tag{96.10}$$

Уже было упомянуто, что (96.5) есть вероятность испускания фотона при однократном прохождении электрона мимо ядра на прицельном расстоянии ρ. Сечение испускания фотона с заданными частотой и направлением получается умножением этой вероятности на $d\rho_x d\rho_y/v \approx d\rho_x d\rho_y \equiv d^2\rho$ и интегрированием по прицельным параметрам:

$$d\sigma = \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int |a(\boldsymbol{\rho})|^2 d^2\rho. \tag{96.11}$$

Не следует, однако, думать, что эта формула без интегрирования по $d^2\rho$ дала бы также и распределение конечных электронов по направлениям. Отклонение электрона при его движении по классической орбите однозначно определяется внешним полем и заведомо не совпадает с неопределенным квантовомеханическим отклонением (а предельное значение $\mathbf{p}'(\infty)$ классической функции $\mathbf{p}'(t)$ не совпадает поэтому с реальным конечным значением импульса электрона). Для нахождения этого распределения необходимо, следовательно, переразложить волновую функцию электронов по плоским волнам.

Как видно из (96.11), $a(\boldsymbol{\rho})$ есть амплитуда испускания фотона при столкновении на прицельном расстоянии $\boldsymbol{\rho}$. Но выражения (96.5),(96.6) определяют эту амплитуду лишь с точностью до фазового множителя. Последний есть, очевидно, $e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}$, — ввиду наличия не зависящего от времени члена $r_\perp(\infty) = \boldsymbol{\rho}$ в $\mathbf{r}(t)$, этот постоянный множитель должен присутствовать в $V_{fi}(t)$ и может быть вынесен из-под знака интеграла. Поскольку он не является оператором, он не затрагивается операциями коммутирования и, таким образом, амплитуда процесса испускания есть

$$e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}a(\boldsymbol{\rho}), \tag{96.12}$$

где $a(\boldsymbol{\rho})$ дается выражением (96.9).

Пусть электрон описывается при $z \to -\infty$ плоской волной с импульсом $\mathbf{p}$, направленным вдоль оси z. Это значит, что волновая функция электрона при $z \to -\infty$ не зависит от x и y и сводится к постоянной, которую можно положить равной 1.

Тогда волновая функция электрона, прошедшего через поле, при $z \to \infty$ равна [1])

$$\psi(\infty) = S(\boldsymbol{\rho}) = \exp\left\{-i \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z)dz\right\}. \qquad (96.13)$$

С другой стороны, по смыслу амплитуды перехода (96.12) волновая функция электрона, прошедшего через поле и испустившего фотон, есть

$$e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} a(\boldsymbol{\rho}) S(\boldsymbol{\rho}). \qquad (96.14)$$

Амплитуда же процесса испускания фотона, в котором электрон остается в состоянии с определенным импульсом $\mathbf{p}'$, дается соответствующей фурье-компонентой функции (96.14), т. е.

$$a(\mathbf{q}_\perp) = \int e^{-i\mathbf{p}'\boldsymbol{\rho}} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} a(\boldsymbol{\rho}) S(\boldsymbol{\rho}) d^2\rho = \int e^{-i\mathbf{q}_\perp\boldsymbol{\rho}} a(\boldsymbol{\rho}) S(\boldsymbol{\rho}) d^2\rho, \qquad (96.15)$$

где $\mathbf{q}_\perp$ — поперечная компонента вектора передачи импульса ядру (ср. III, (131.7)). Сечение же рассеяния с заданным значением $\mathbf{q}_\perp$ есть

$$d\sigma = |a(\mathbf{q}_\perp)|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^2 q_\perp}{(2\pi)^2}. \qquad (96.16)$$

Вычислим теперь $S(\boldsymbol{\rho})$. В рассматриваемом случае кулонова поля интеграл в экспоненте расходится, в соответствии с расходимостью фазы в кулоновом рассеянии. Поэтому интеграл надо брать между конечными пределами:

$$\int_{-R}^{R} U dz = -2\nu \int_{-R}^{R} \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = -2\nu[\ln(R + \sqrt{R^2 + \rho^2}) - \ln\rho] \approx$$

$$\approx -2\nu \ln R + 2\nu \ln\rho$$

$(R \gg \rho)$. Первый, постоянный, член не существен, так что

$$S(\boldsymbol{\rho}) = \exp(-2i\nu\ln\rho) = \rho^{-2i\nu}. \qquad (96.17)$$

Подставляя (96.9), (96.17) в (96.15) и интегрируя по направлениям вектора $\boldsymbol{\rho}$ в плоскости xy, находим

$$a(\mathbf{q}_\perp) \propto \nu \int_0^{\infty} \rho^{-2i\nu} K_1(\chi) J_1(q_\perp\rho)\rho d\rho, \qquad (96.18)$$

[1]) Ср. III, (131.4). Мы имеем при этом в виду аналогию между уравнением (39.5) (в котором полагаем $\mathbf{p}^2 \approx \varepsilon^2$) и нерелятивистским уравнением Шредингера (39.5а). Учитывая различие коэффициентов в этих уравнениях, легко видеть, что в нашем случае условие (131.1) (см. III) применимости уравнения (131.4) (см. III) действительно удовлетворяется. Тот факт, что эта формула не относится к области сколь угодно больших z, не существен по тем же причинам, что и в III, § 131.

где J_1 — функция Бесселя. Множители, не содержащие $\nu = Z\alpha$, здесь не выписаны.

Мы видим, что зависимость амплитуды $a(q_\perp)$ (а следовательно, и сечения (96.16)) от ν содержится в отдельном множителе. С другой стороны, при $\nu \to 0$ сечение должно стремиться к своему борновскому значению. Поэтому ясно, что сечение будет отличаться от борновского лишь множителем, который не зависит от поляризации электрона и не влияет на поляризационные эффекты.

Интеграл (96.18) может быть выражен через гипергеометрическую функцию с помощью формулы

$$\int\limits_0^\infty x^{-\lambda} K_1(ax) J_1(bx) x\,dx =$$
$$= \frac{b\Gamma(2-\lambda/2)\Gamma(1-\lambda/2)}{2^\lambda a^{3-\lambda}}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{-1+\lambda/2} F\left(\frac{\lambda}{2},\, 1-\frac{\lambda}{2},\, 2,\, \frac{b^2}{a^2+b^2}\right).$$

Это дает

$$a(\mathbf{q}_\perp) \propto \nu(1-i\nu)\left(\frac{q}{2}\right)^{2i\nu}\Gamma^2(1-i\nu)F(i\nu,\, 1-i\nu,\, 2,\, z), \qquad (96.19)$$

где

$$z = 1 - \frac{m^4\omega^2}{4q^2\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1+\delta^2)^2, \quad \delta = \frac{\varepsilon\theta}{m}; \qquad (96.20)$$

здесь использовано, что в области II (см. (96.2)) параллельная $\mathbf{p}$ компонента вектора $\mathbf{q}$ равна

$$q_\parallel^2 = q^2 - \mathbf{q}_\perp^2 \approx \frac{m^4\omega^2}{4\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1+\delta^2)^2. \qquad (96.21)$$

В этом легко убедиться, если учесть, что в указанной области углы между импульсами $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{k}$ удовлетворяют условиям (93.15).

Гипергеометрическая функция в (96.19) может быть сведена к функции $F(z)$ (95.15) с помощью формулы

$$F(a,\, b+1,\, c+1,\, z) = \frac{c}{c-a}F(a,\, b,\, c,\, z) + \frac{c(1-z)}{b(a-c)}F'(a,\, b,\, c,\, z).$$

Окончательный результат представится тогда в виде

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Б}}\frac{1}{F^2(1)}\left[F^2(z) + \frac{(1-z)^2}{\nu^2}F'^2(z)\right], \qquad (96.22)$$

где $d\sigma_{\text{Б}}$ — борновское сечение (93.13) (*H. A. Bethe, L. Maximon,* 1954). При $q \gg m^2/\varepsilon$ имеем $z \approx 1$, так что весь коэффициент

при $d\sigma_{\text{Б}}$ стремится к единице. В этом смысле формула (96.22), выведенная для области II, автоматически справедлива при всех $q \lesssim m$. Когда $q \lesssim m^2/\varepsilon$ и поправочный множитель в (96.22) отличен от единицы, векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{k}$ почти компланарны и величины δ и δ' почти равны друг другу; это уже было учтено в (96.22). Таким образом, q в выражении (96.20) для z может быть переписано как

$$\frac{q^2}{m} = \delta^2 + \delta'^2 - 2\delta\delta'\cos\varphi + \frac{m^2\omega^2}{4\varepsilon^2\varepsilon'^2}(1+\delta^2)^2, \tag{96.23}$$

т. е. можно положить $\delta = \delta'$ во втором члене в (93.14), но не в первом члене, который не содержит малого коэффициента ($\sim m^2/\varepsilon^2$).

Для нахождения интегрального (по углам) сечения излучения нет необходимости производить интегрирование заново, как это ясно из следующих рассуждений (*H. Olsen,* 1955). Различные направления $\mathbf{p}'$ (при заданной энергии ε') отвечают вырождению конечного состояния электрона. Очевидно, что результат суммирования по состояниям, относящимся к одному вырожденному уровню, не зависит от того, каким образом будет выбран полный набор этих состояний. Мы можем поэтому воспользоваться для целей суммирования по направлениям $\mathbf{p}'$ системой функций $\psi^{(+)}_{\varepsilon'\mathbf{p}'}$ вместо системы $\psi^{(-)}_{\varepsilon'\mathbf{p}'}$ (необходимой для вычисления дифференциального сечения), т. е. определить матричный элемент тормозного излучения как

$$M_{fi}^{\text{торм}} = \int \psi^{(+)*}_{\varepsilon'\mathbf{p}'}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}^*)e^{-i\mathbf{kr}}\psi^{(+)}_{\varepsilon\mathbf{p}}\,d^3x.$$

Легко убедиться, что этот интеграл совпадает с интегралом $(M_{fi}^{\text{пар}})^*$, если в последнем заменить параметры волновых функций согласно

$$\mathbf{p}_+,\, p_+,\, \varepsilon_+ \to -\mathbf{p},\, -p,\, -\varepsilon; \quad \mathbf{p}_-,\, p_-,\, \varepsilon_- \to \mathbf{p}',\, p',\, \varepsilon'; \quad \mathbf{k} \to -\mathbf{k}$$

(а также заменить переменные интегрирования: $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$).

Отсюда ясно, что интегральное (по углам) сечение тормозного излучения можно получить из интегрального сечения образования пары (95.20), умножив последнее на

$$\frac{\omega^2}{p_+^2}\frac{d\omega}{\omega} \approx \frac{\omega^2}{\varepsilon_+^2}\frac{d\omega}{\varepsilon_+}$$

(ср. (91.6)) и заменив $\varepsilon_+ \to -\varepsilon$, $\varepsilon_- \to \varepsilon'$. Таким образом, найдем

$$d\sigma = 4Z^2\alpha r_e^2\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{2}{3}\right]\left[\ln\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{m\omega} - \frac{1}{2} - f(\alpha Z)\right]\frac{d\omega}{\omega}. \tag{96.24}$$

Мы видим, что поправки к борновским формулам для интегральных сечений тормозного излучения и образования пары даются одной и той же функцией $f(\alpha Z)$.

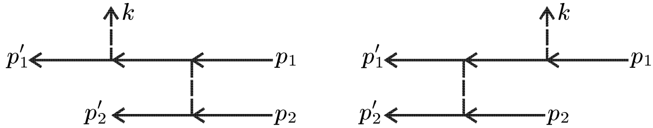
Формула (96.24), не связанная с какими-либо ограничениями на величину $Z\alpha$, допускает переход к классическому пределу $\hbar \to 0$, $Z\alpha \to \infty$. В этом пределе надо также положить $\varepsilon \approx \varepsilon'$. Имея в виду асимптотическое выражение $\Psi(z) \approx \ln z$ при $|z| \to \to \infty$ и значение $\Psi(l) = -C$ (C — постоянная Эйлера), находим для эффективного торможения

$$\hbar\omega d\sigma = \frac{16Z^2 r_e^2 e^2}{3c}\left[\ln\frac{2\varepsilon^2}{mc\omega Ze^2} - \frac{1}{2} - C\right] d\omega. \tag{96.25}$$

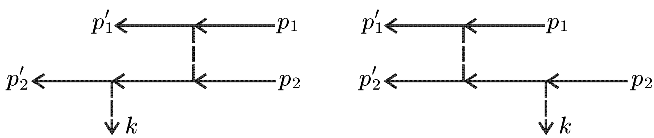
Это выражение, не содержащее $\hbar$, есть классическое спектральное распределение интенсивности тормозного излучения.

§ 97. Тормозное излучение электрона на электроне в ультрарелятивистском случае

Тормозное излучение электрона на электроне изображается восемью диаграммами Фейнмана: четырьмя диаграммами



(97.1а)



(97.1б)

и четырьмя «обменными» диаграммами, получающимися из изображенных перестановкой p_1' и p_2'. Мы приведем здесь результаты вычислений для ультрарелятивистского случая (*G. Altarelli, F. Buccella*, 1964; *В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе*, 1966) [1].

В лабораторной системе отсчета (система покоя одного из начальных электронов, — скажем, второго) интегральное по направлениям фотона сечение излучения может быть представлено в виде суммы $d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)}$, где

$$d\sigma^{(1)} = 4\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\frac{\varepsilon-\omega}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\omega} + \frac{\varepsilon-\omega}{\varepsilon} - \frac{2}{3}\right]\left(\ln\frac{2\varepsilon(\varepsilon-\omega)}{m\omega} - \frac{1}{2}\right); \tag{97.2}$$

[1]) Соответствующие вычисления можно найти в указанной на с. 454 книге *Байера, Каткова и Фадина.*

$$d\sigma^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha r_e^2 \frac{m d\omega}{\omega^2}\left\{\left(4 - \frac{m}{\omega} + \frac{m^2}{4\omega^2}\right)\ln\frac{2\varepsilon}{m} - 2 + \frac{2m}{\omega} - \frac{5m^2}{8\omega^2}\right\} \omega \geqslant \frac{m}{2}; \tag{97.3}$$

$$d\sigma^{(2)} = \frac{2}{3}\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\left\{8\left(1 - \frac{\omega}{m} + \frac{\omega^2}{m^2}\right)\ln\frac{\varepsilon}{\omega} - \left(1 - \frac{2\omega}{m}\right)\ln\left(1 - \frac{2\omega}{m}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{m^3}{4\omega^3} - \frac{m^2}{2\omega^2} + \frac{3m}{\omega} - 2 + \frac{4\omega}{m}\right] - \frac{m^2}{2\omega^2} + \frac{3m}{\omega} - 2 + \frac{2\omega}{m} - \frac{4\omega^2}{m^2}\right\} \omega \leqslant \frac{m}{2}; \tag{97.4}$$

(ε — начальная энергия первого электрона).

Точность этих формул — до членов относительного порядка m/ε. С этой точностью оказывается, что вклады в сечение от различных диаграмм не интерферируют друг с другом, и в этом смысле $d\sigma^{(1)}$ и $d\sigma^{(2)}$ отвечают излучению каждым из двух электронов — соответственно быстрым электроном и электроном отдачи (диаграммы (97.1а) и (97.1б)).

Диаграммы обменного типа дают такой же вклад в сечение, как и диаграммы «прямые». В силу тождественности электронов суммарный вклад прямых и обменных диаграмм следует разделить на 2; поэтому можно рассматривать только вклад прямых диаграмм и не учитывать тождественности частиц. Для столкновения же электрона с позитроном вместо обменных фигурируют аннигиляционные диаграммы. Их вклад, однако, оказывается относительного порядка m/ε, т. е. пренебрежим. Поэтому с указанной точностью сечения тормозного излучения при столкновениях электрона с электроном и с позитроном одинаковы.

При $\omega \gg m$ отношение

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\sigma^{(1)}} \sim \frac{m}{\omega} \ll 1,$$

т. е. излучение электроном отдачи мало по сравнению с излучением быстрым электроном (когда это отношение достигает порядка m/ε, формула (97.3), разумеется, теряет смысл). Напротив, при $\omega \ll m$ обе части сечения почти сравниваются:

$$d\sigma^{(1)} = \frac{16}{3}\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\ln\frac{2\varepsilon^2}{m\omega}, \quad d\sigma^{(2)} = \frac{16}{3}\alpha r_e^2 \frac{d\omega}{\omega}\ln\frac{\varepsilon}{\omega}, \quad \omega \ll m. \tag{97.5}$$

Для справедливости формул (97.2)–(97.5) необходимо, чтобы хоть один из электронов после излучения оставался ультрарелятивистским. Другими словами, частота фотона должна быть достаточно далека от жесткой границы спектра, т. е. от максимальной частоты $\omega_{\max}$, которая может быть излучена. Конечная энергия электронов будет минимальна, а энергия фотона максимальна, когда оба электрона движутся после излучения в направлении фотона и имеют одинаковые скорости. Тогда из законов сохранения имеем

$$\varepsilon + m = \omega_{\max} + 2\varepsilon', \quad |\mathbf{p}| = \omega_{\max} + 2|\mathbf{p}'|.$$

Исключив отсюда ε' и $\mathbf{p}'$, получим

$$(\varepsilon + m - \omega_{\max})^2 - (|\mathbf{p}| - \omega_{\max})^2 = 4m^2,$$

откуда

$$\omega_{\max} = \frac{m(\varepsilon - m)}{m + \varepsilon - |\mathbf{p}|}. \tag{97.6}$$

При $\varepsilon \gg m$ имеем $\omega_{\max} \approx \varepsilon$. Таким образом, формулы (97.2)–(97.4) справедливы при условии

$$\omega_{\max} - \omega \sim \varepsilon - \omega \gg m \tag{97.7}$$

Сечение излучения быстрым электроном (97.2) в точности совпадает с сечением излучения электрона на ядре с $Z = 1$ (формула (93.17)). Это совпадение не случайно, и его причины выясняются из анализа роли отдачи в процессе излучения.

При выводе формулы (93.17) мы пренебрегли отдачей неподвижной частицы (ядра) — изменили ее постоянным внешним полем. Это сводится к пренебрежению временной компонентой 4-вектора передачи импульса $q = p' - p + k$ (энергией отдачи). Покажем, что в ультрарелятивистском случае, такое пренебрежение допустимо при излучении электроном не только на ядре, но и на электроне.

Напишем q^2 в виде

$$-q^2 = -(\varepsilon' + \omega - \varepsilon)^2 + (p'_{||} + \omega - p_{||})^2 + (\mathbf{p}'_{\perp} - \mathbf{p}_{\perp})^2, \tag{97.8}$$

где нижние индексы указывают компоненты векторов $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}$ (начальный и конечный импульсы электрона), параллельные и перпендикулярные направлению фотона $\mathbf{k}$. В ультрарелятивистском случае углы θ и θ' (между $\mathbf{k}$ и соответственно $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$) малы: $\theta \lesssim m/\varepsilon$, $\theta' \lesssim m/\varepsilon'$. Поэтому

$$|\mathbf{p}_{\perp}| \sim |\mathbf{p}|\theta \sim m, \; p_{||} \approx |\mathbf{p}| - \frac{\mathbf{p}_{\perp}^2}{2|\mathbf{p}|} \approx \varepsilon - \frac{m^2}{2\varepsilon} - \frac{\mathbf{p}_{\perp}^2}{2\varepsilon}, \tag{97.9}$$

и аналогично для $\mathbf{p}'_{\perp}$, $p'_{||}$.

Без учета отдачи имеем $\varepsilon' + \omega - \varepsilon = 0$, разность $p'_{||} + \omega - p_{||} \sim m^2/\varepsilon$, так что

$$-q^2 \approx (\mathbf{p}'_{\perp} - \mathbf{p}_{\perp})^2 \sim m^2. \tag{97.10}$$

Энергия отдачи (на электроне):

$$q_0 = \varepsilon' + \omega - \varepsilon \sim \mathbf{q}^2/(2m) \sim m. \tag{97.11}$$

Изменением же $\mathbf{p}'_{\perp}$ из-за изменения ε' можно пренебречь. Поэтому первые два члена в (97.8) дают изменение q^2 при учете

отдачи; обозначим его через Δq^2. Используя (97.9), получаем

$$\Delta q^2 \approx (\varepsilon' + \omega - \varepsilon)\left(-\frac{m^2}{\varepsilon'} - \frac{\mathbf{p}'^2_\perp}{\varepsilon'} + \frac{m^2}{\varepsilon} + \frac{\mathbf{p}^2_\perp}{\varepsilon}\right) \sim m^2 \frac{m}{\varepsilon}.$$

Сравнив с (97.10), мы увидим, что $\Delta q^2 \ll |q^2|$, чем и оправдывается пренебрежение отдачей [1]).

Тот факт, что быстрая частица излучает в узкий конус (с углом раствора $\sim m/\varepsilon$) в направлении своего движения, позволяет получить сечение излучения в системе центра инерции путем простого пересчета сечения (97.2) из лабораторной системы [2]).

В системе центра инерции оба электрона излучают одинаково, каждый в направлении своего движения (это обстоятельство наглядно объясняет причину отсутствия интерференции между излучениями обеих частиц). Энергия ультрарелятивистского электрона в системе центра инерции связана с его энергией ε в лабораторной системе соотношением $2E^2 = m\varepsilon$, а частоты Ω и ω фотона в этих системах — соотношением $\omega/\varepsilon = \Omega/E$ (эти равенства легко получить, сравнивая значения инвариантов $(p_1 p_2)$ и $(p_1 k)$ в обеих системах). Поэтому для сечения излучения каждым из электронов и системе центра инерции находим

$$d\sigma^{(1)} = d\sigma^{(2)} = \\ = 4\alpha r_e^2 \frac{d\Omega}{\Omega} \frac{E-\Omega}{E}\left[\frac{E}{E-\Omega} + \frac{E-\Omega}{E} - \frac{2}{3}\right]\left(\ln \frac{4E^2(E-\Omega)}{m^2\Omega} - \frac{1}{2}\right). \quad (97.12)$$

Для применимости (97.12) также необходимо, чтобы частота фотона не была близка к границе спектра. Для ультрарелятивистской частицы указанное выше преобразование прямо дает из $\omega_{\max} \approx \varepsilon$

$$\Omega_{\max} \approx \omega_{\max} E/\varepsilon \approx E. \quad (97.13)$$

Таким образом, в системе центра инерции электроны могут излучить лишь половину своей полной энергии $2E$. Прямое вычисление $\Omega_{\max}$ легко произвести, заметив, что после излучения такого фотона электроны будут двигаться (в той же системе) с одинаковыми скоростями в направлении, обратном направлению фотона. Имеем

$$2E = 2E' + \Omega_{\max}, \ 2|\mathbf{p}'| = \Omega_{\max},$$

[1]) Это заключение, разумеется, тем более справедливо для излучения электроном на ядре, для которого энергия отдачи $q_0 \approx \mathbf{q}^2/(2M) \sim m^2/M$, где M — масса ядра.

[2]) В общем случае такой пересчет невозможен, поскольку вклад в спектр в заданном интервале частот $d\omega$ возникает от фотонов, излученных в существенно различных направлениях.

откуда

$$\Omega_{\max} = \frac{\mathbf{p}^2}{m} = E - \frac{m^2}{E}, \tag{97.14}$$

и в ультрарелятивистском случае снова получаем (97.13). Таким образом, формула (97.12) применима при условии

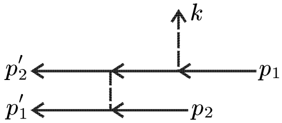
$$\Omega_{\max} - \Omega \sim E - \Omega \gg m. \tag{97.15}$$

Приведем теперь формулы для излучения в системе центра инерции в обратном предельном случае, вблизи границы спектра, когда [1])

$$\Omega_{\max} - \Omega \ll m. \tag{97.16}$$

Поскольку в этом случае отдача весьма существенна, результаты отличаются от случая рассеяния на неподвижном центре и оказываются различными для электрон-электронного и электрон-позитронного рассеяния (*В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе*, 1967).

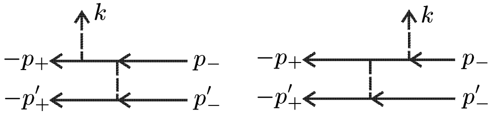
В случае рассеяния электрона на электроне, кроме квадратов диаграмм (97.1), вклад в сечение излучения вблизи границы спектра дают также произведения (интерференционные члены) прямых и обменных диаграмм, в которых излучает одна и та же начальная частица, например произведение второй из диаграмм (97.1а) и диаграммы



Это связано с тем, что вблизи границы конечные частицы имеют близкие импульсы и нет причин для малости обменных членов. Окончательный ответ для сечения:

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max} - \Omega)]^{1/2}}{m} \frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \tag{97.17}$$

При рассеянии электрона на позитроне логарифмически большой вклад в сечение излучения вносят квадраты аннигиляционных диаграмм, в которых излучают начальные частицы:



(97.18)

[1]) Разумеется, полученный в борновском приближении результат пригоден, как обычно, лишь до тех пор, пока относительная скорость конечных электронов велика по сравнению с α. В противном случае следует учитывать взаимодействие частиц в конечном состоянии.

С нелогарифмической точностью существенны также и квадраты других диаграмм. Интерференционные же члены малы. Окончательный ответ:

$$d\sigma = 2\alpha r_e^2 \frac{[E(\Omega_{\max} - \Omega)]^{1/2}}{m} \left(\ln \frac{2E}{m} + 1 \right) \frac{d\Omega}{\Omega_{\max}}. \tag{97.19}$$

Таким образом, излучение при электрон-позитронном рассеянии логарифмически велико по сравнению с излучением при электрон-электронном рассеянии.

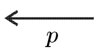
§ 98. Излучение мягких фотонов при столкновениях

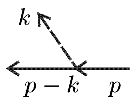
Пусть $d\sigma_0$ — сечение некоторого процесса рассеяния заряженных частиц, который может сопровождаться излучением определенного числа фотонов. Наряду с этим процессом рассмотрим также и другой процесс, отличающийся от первого лишь испусканием одного дополнительного фотона. Если частота ω этого фотона достаточно мала (соответствующие условия будут сформулированы ниже), то сечение $d\sigma$ процесса простым образом связано с $d\sigma_0$.

Действительно, при малых $d\sigma_0$ можно пренебречь обратным влиянием испускания этого кванта на процесс рассеяния. Другими словами, сечение $d\sigma$ может быть представлено в виде произведения двух независимых множителей: сечения $d\sigma_0$ и вероятности dw испускания одного фотона при столкновении. Испускание мягкого фотона — процесс квазиклассический; поэтому его вероятность совпадает с классически вычисленным числом испущенных при столкновении квантов, т. е. с классической интенсивностью (полной энергией) излучения dI, деленной на $\omega(= \hbar\omega)$. Таким образом,

$$d\sigma = d\sigma_0 \frac{dI}{\omega}. \tag{98.1}$$

Покажем, как эта формула может быть получена по общим правилам диаграммной техники (*J. M. Jauch, F. Rohrlich,* 1954). Диаграммы процесса с дополнительным фотоном получаются из диаграмм основного процесса путем добавления внешней фотонной линии, «ответвляющейся» от какой-либо (внешней или внутренней) электронной линии, т. е. путем замены



на


(98.2)

Легко видеть, что основную роль будут играть диаграммы, получающиеся такой заменой во внешних электронных линиях. Действительно, если p — импульс внешней линии ($p^2 = m^2$), то при

малых k будет также и $(p-k)^2 \approx m^2$, т. е. добавляющийся в диаграмме множитель $G(p-k)$ будет находиться вблизи своего полюса.

Для линии начального электрона p замена (98.2) сводится к замене в амплитуде реакции:

$$u(p) \to e\sqrt{4\pi}G(p-k)(\gamma e^*)u(p) =$$
$$= e\sqrt{4\pi}\frac{\gamma p - \gamma k + m}{(p-k)^2 - m^2}(\gamma e^*)u(p) \approx -e\sqrt{4\pi}\frac{\gamma p + m}{2(pk)}(\gamma e^*)u(p).$$

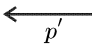
Заметив, что

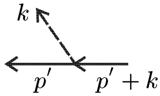
$$(\gamma p)(\gamma e^*) = 2pe^* - (\gamma e^*)(\gamma p), \quad \gamma p u(p) = m u(p),$$

получим правило замены в виде

$$u(p) \to -e\sqrt{4\pi}\frac{(pe^*)}{(pk)}u(p). \tag{98.3}$$

Аналогичным образом для линии конечного электрона p' замена на диаграмме



на


означает замену в амплитуде:

$$u(p') \to e\sqrt{4\pi}\,\overline{u}(p')\frac{(p'e^*)}{(p'k)}. \tag{98.4}$$

Во всех остальных частях диаграммы можно вообще пренебречь изменениями импульсов линий, связанными с испусканием фотона k. При этом подразумевается, что энергия фотона ω во всяком случае мала по сравнению с энергиями всех частиц, участвующих в реакции (в том числе по сравнению с энергиями излучаемых жестких фотонов, если таковые имеются).

Пусть для определенности сечение $d\sigma_0$ относится к рассеянию электрона на неподвижном ядре (с возможным излучением жестких фотонов). Амплитуда этого процесса, который мы условно назовем упругим, имеет вид

$$M_{fi}^{(\text{упр})} = \overline{u}(p')Mu(p).$$

Произведя в ней один раз замену (98.3), а другой раз (98.4) и сложив результаты, получим амплитуду тормозного излучения тех же жестких фотонов и мягкого фотона k [1]):

$$M_{fi} = M_{fi}^{(\text{упр})}e\sqrt{4\pi}\left(\frac{(p'e^*)}{(p'k)} - \frac{(pe^*)}{(pk)}\right). \tag{98.5}$$

[1]) Обратим внимание на то, что появление разности в этой формуле является естественным результатом калибровочной инвариантности; амплитуда реакции не должна меняться при замене 4-вектора поляризации $e \to e + {} + \text{const}\cdot k$.

Соответственно сечение

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} \cdot 4\pi e^2 \left| \frac{(p'e)}{(p'k)} - \frac{(pe)}{(pk)} \right|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3\omega}. \tag{98.6}$$

Просуммировав по поляризациям фотона k, получим

$$d\sigma = -e^2 \left| \frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right|^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega} d\sigma_{\text{упр}}. \tag{98.7}$$

Выраженная через трехмерные величины, эта формула имеет вид [1])

$$d\sigma = \alpha \left(\frac{[\mathbf{v}'\mathbf{n}]}{1 - \mathbf{v}'\mathbf{n}} - \frac{[\mathbf{v}'\mathbf{n}]}{1 - \mathbf{v}\mathbf{n}} \right)^2 \frac{d\omega do_{\mathbf{k}}}{4\pi^2\omega} d\sigma_{\text{упр}}, \tag{98.8}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, а $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ — начальная и конечная скорости электрона. Мы видим, что выражение, стоящее перед $d\sigma_{\text{упр}}$, действительно совпадает с (деленной на ω) классической интенсивностью излучения (ср. II, (69.4)), как и утверждалось в формуле (98.1).

Условие применимости полученных формул требует также, помимо малости ω по сравнению с ε, чтобы передача импульса ядру $\mathbf{q}$ была велика по сравнению с изменением $\delta\mathbf{q}$ этой величины, связанной с испусканием мягкого фотона. Имеем

$$\delta\mathbf{q} = (\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k}) - (\mathbf{p}' - \mathbf{p})_{\omega=0} = \delta\mathbf{p}' - \mathbf{k},$$

причем

$$|\delta\mathbf{p}'| \sim \frac{\partial|\mathbf{p}'|}{\partial\varepsilon}\omega \sim \frac{\omega}{v},$$

а $|\mathbf{k}| = \omega$. В нерелятивистском случае ($v \ll 1$) получаем поэтому условие

$$\omega/|\mathbf{q}|v \ll 1. \tag{98.9}$$

При рассеянии на кулоновом (и вообще на медленно спадающем с расстоянием) потенциале $|\mathbf{q}| \sim 1/\rho$ (ρ — прицельное расстояние), так что это условие можно представить и в виде $\omega\tau \ll 1$, где $\tau \sim \rho/v$ — характерное время столкновения.

В ультрарелятивистском случае фотоны излучаются в основном в направлениях вблизи $\mathbf{v}$ или $\mathbf{v}'$ (как это видно из знаменателей в (98.8)). Если угол θ рассеяния электрона мал, то направления всех трех векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{n}$ близки друг к другу. Тогда

$$|\delta\mathbf{q}| = |\delta\mathbf{p}'| - |\mathbf{k}| = \omega\left(\frac{1}{v} - 1\right) \sim \frac{\omega m^2}{\varepsilon^2},$$

[1]) Для ее вывода удобно вернуться к (98.6), положив

$$p = (\varepsilon,\, \varepsilon\mathbf{v}), \qquad pk = \varepsilon\omega(1 - \mathbf{v}\mathbf{n}), \ \ldots, e = (0,\, \mathbf{e})$$

и произведя заново суммирование по поляризациям с помощью (45.4a).

и поскольку $|\mathbf{q}| \sim \varepsilon\theta$, мы получаем условие

$$\theta \gg \frac{\omega}{\varepsilon}\frac{m^2}{\varepsilon^2}. \tag{98.10}$$

Ввиду квазиклассического характера формул (98.5)–(98.8) они справедливы для излучения любыми заряженными частицами (не обязательно электронами, для которых был проведен вывод). В общем случае, когда в реакции участвует несколько таких частиц, формула (98.5) должна быть записана в виде

$$M_{fi} = M_{fi}^{(\text{упр})} e\sqrt{4\pi}\sum Z\left(\frac{(p'e^*)}{(p'k)} - \frac{(pe^*)}{(pk)}\right), \tag{98.11}$$

где суммирование производится по всем частицам (с зарядами Ze); соответствующим образом меняются и формулы (98.6)–(98.8). В частности, в нерелятивистском случае

$$M_{fi} = M_{fi}^{(\text{упр})}\frac{e\sqrt{4\pi}}{\omega}\sum Z(\mathbf{v}' - \mathbf{v})\mathbf{e}^*. \tag{98.12}$$

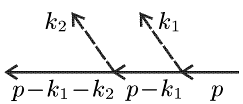
Для двух частиц эта формула принимает вид

$$\begin{gathered} M_{fi} = M_{fi}^{(\text{упр})}\frac{\sqrt{4\pi}}{\omega}\sum\left(\frac{Z_1 e}{m_1} - \frac{Z_2 e}{m_2}\right)\mathbf{q}\mathbf{e}^*, \\ \mathbf{q} = m(\mathbf{v}' - \mathbf{v}), \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \end{gathered} \tag{98.13}$$

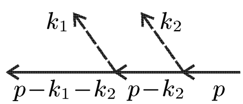
где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ — относительная скорость частиц до и после столкновения. Интегрируя квадрат $|M_{fi}|^2$ по направлениям вылета фотона и суммируя по направлениям его поляризации, получим отсюда нерелятивистское спектральное распределение излучения в виде

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}}\frac{2e^2}{3\pi}\left(\frac{Z_1}{m_1} - \frac{Z_2}{m_2}\right)^2 \mathbf{q}^2\frac{d\omega}{\omega}.$$

Полученные результаты обобщаются на случай одновременного излучения нескольких мягких фотонов. Для каждого из фотонов в амплитуду M_{fi} добавляется свой множитель того вида, который стоит при $M_{fi}^{(\text{упр})}$ в (98.5). В этом легко убедиться непосредственно, скажем, на примере двух фотонов. Линии обоих испускаемых фотонов должны добавляться на внешних электронных линиях, причем в двух различных последовательностях, т. е. диаграмма с внешней линией p заменяется двумя диаграммами с линиями



или



Каждая из них содержит множитель (знаменатели электронных пропагаторов)

$$\frac{1}{2((pk_1)+(pk_2))}\frac{1}{2(pk_1)} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2((pk_1)+(pk_2))}\frac{1}{2(pk_2)}.$$

Их сумма равна

$$\frac{1}{2(pk_1)}\frac{1}{2(pk_2)},$$

т. е. содержит произведение двух независимых множителей, отвечающих первому и второму фотону. После этого в сумме всех диаграмм члены собираются (в силу калибровочной инвариантности) в произведение разностей

$$\left(\frac{(p'e_1^*)}{(p'k_1)}-\frac{(pe_1^*)}{(pk_1)}\right)\left(\frac{(p'e_2^*)}{(p'k_2)}-\frac{(pe_2^*)}{(pk_2)}\right).$$

Соответственно факторизации амплитуды разбивается на множители также и сечение процесса. Таким образом, мягкие фотоны испускаются независимо. Сечение процесса с испусканием n мягких фотонов может быть представлено в виде

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} dw_1 \ldots dw_n, \tag{98.14}$$

где dw_1, dw_2, … — вероятности отдельного испускания фотонов dk_1, dk_2, … При интегрировании этой формулы по конечному интервалу значений переменных (частот и направлений), одинаковому для всех квантов, должен быть введен множитель $1/n!$, учитывающий тождественность фотонов.

Если проинтегрировать сечение излучения (98.1) по частотам в некотором конечном интервале от ω_1 до ω_2, то мы получим выражение вида

$$d\sigma \sim \alpha \ln\frac{\omega_2}{\omega_1} d\sigma_{\text{упр}} \tag{98.15}$$

(ср. (98.8)). При этом подразумевается, что обе частоты мягкие, так что возможные значения ω_2 ограничены условием применимости метода. С логарифмической точностью, однако, можно положить $\omega_2 \sim \varepsilon$, где ε — начальная энергия излучающей частицы. Значения же ω_1 вообще ничем не ограничены снизу. Но устремив ω_1 к нулю, мы увидим, что сечение излучения всех возможных мягких квантов обращается в бесконечность. Выясним смысл этой ситуации — так называемой *инфракрасной катастрофы* (*F. Bloch, A. Nordsieck,* 1937). При

$$\alpha \ln\frac{\varepsilon}{\omega_1} \gtrsim 1 \tag{98.16}$$

будет $d\sigma \gtrsim d\sigma_{\text{упр}}$. Но это означает неприменимость теории возмущений — невозможность вычислять $d\sigma$ как величину более высокого порядка малости, чем $d\sigma_{\text{упр}}$. Другими словами, параметром

малости должно считаться в данном случае не α, а произведение $\alpha \ln(\varepsilon/\omega_1)$:

Таким образом, вывод формул (98.5),(98.6) на основе теории возмущений оказывается неверным при достаточно малых частотах. С другой стороны, классическая формула для интенсивности dI (см. II, (69.4)) применима в тем большей степени, чем меньше ω. Поэтому формула (98.1) останется правильной, если несколько видоизменить ее смысл в сторону большей классичности. Именно, в (98.1) подразумевалось, что излучается один фотон; тогда теряемая частицей на излучение энергия совпадает с ω и «сечение относительной потери энергии» дается выражением $\omega d\sigma/\varepsilon$, или

$$d\sigma_{\text{упр}} \frac{dI}{\varepsilon}. \tag{98.17}$$

В действительности же при достаточно малых ω вероятность излучения не мала, а вероятность излучения двух и более фотонов не меньше, а больше вероятности излучения одного фотона. В этих условиях выражение (98.17) останется справедливым, но классическая интенсивность dI будет определять не вероятность излучения одного фотона, а среднее число излученных фотонов

$$d\overline{n} = \frac{dI}{\omega}, \tag{98.18}$$

или в конечном интервале частот

$$\overline{n} = \int\limits_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} \frac{dI}{\omega}. \tag{98.19}$$

Поскольку мягкие фотоны излучаются статистически независимо (это справедливо во всех приближениях теории возмущений), к процессу множественного излучения можно применить формулу Пуассона: вероятность $w(n)$ излучения $\overline{n}$ фотонов выражается через среднее число $\overline{n}$ формулой

$$w(n) = \frac{\overline{n}^n}{n!} \exp(-\overline{n}). \tag{98.20}$$

Представим сечение процесса рассеяния с излучением фотонов в виде

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} \cdot w(n). \tag{98.21}$$

Поскольку $\sum w(n) = 1$, то $d\sigma_{\text{упр}}$ представляет собой полное сечение рассеяния, сопровождаемого любым мягким излучением. Это обстоятельство, очевидно из классического рассмотрения; по теории же возмущений $d\sigma_{\text{упр}}$ есть сечение чисто упругого рассеяния. Но теория возмущений здесь неприменима. Получается так,

что $d\sigma_{\text{упр}}$, вычисленное по теории возмущений как сечение упругого рассеяния, в действительности учитывает излучение любых мягких фотонов. Что же касается сечения чисто упругого рассеяния, то оно в действительности равно нулю: при $\omega_1 \to 0$ среднее число $\overline{n} \to \infty$, и согласно (98.20) обращается в нуль вероятность излучения любого конечного числа фотонов [1]).

Задачи [2])

1. Найти спектральное распределение тормозного излучения мягких фотонов при рассеянии ультрарелятивистского электрона на ядре.

Решение. Интегрирование формулы (98.8) по $do_{\mathbf{k}}$ дает

$$d\sigma = \alpha F(\xi)\frac{d\omega}{\omega}d\sigma_{\text{упр}}, \tag{1}$$

где

$$F(\xi) = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{2\xi^2+1}{\xi\sqrt{\xi^2+1}}\ln(\xi+\sqrt{\xi^2+1})-1\Big], \quad \xi = \frac{|\mathbf{p}|}{m}\sin\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

($\mathbf{p}$ — импульс, θ — угол рассеяния электрона). В ультрарелятивистском случае основную роль играет область углов

$$\frac{m^2\omega}{\varepsilon^2} \ll \theta \ll \frac{m}{\varepsilon} \tag{3}$$

(нижняя граница — условие (98.10), о верхней границе см. ниже). При этом $\xi \approx \varepsilon\theta/(2m) \ll 1$, так что

$$F(\xi) \approx (8/(3\pi))\xi^2,$$

а сечение упругого рассеяния электрона на ядре (см. (80.10))

$$d\sigma_{\text{упр}} \approx 4Z^2r_e^2\frac{m^2}{\varepsilon^2}\frac{do}{\theta^4}. \tag{4}$$

Интеграл

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\int\frac{d\theta}{\theta}$$

логарифмически расходится; он обрезается снизу на углах $\theta \sim m^2\omega/\varepsilon^2$, а сверху — при $\xi \sim 1$, т. е. на углах $\theta \sim m/\varepsilon$ (при $\xi \to \infty$

$$F \sim \frac{4}{\pi}\ln\xi,$$

так что интеграл сходится). Таким образом, с логарифмической точностью находим

$$d\sigma_\omega = \frac{16}{3}Z^2\alpha r_e^2\frac{d\omega}{\omega}\ln\frac{\varepsilon^2}{m\omega} \tag{5}$$

— в согласии с логарифмической частью формулы (93.17) (в которой надо положить $\varepsilon \approx \varepsilon'$). Достичь нелогарифмической точности можно, лишь выйдя за пределы квазиклассической области.

---

[1]) Мы вернемся еще к обсуждению этой ситуации в § 130 в связи с изучением радиационных поправок.

[2]) Приведенные ниже применения формулы (98.7) принадлежат *В. Н. Байеру и В. М. Галицкому*(1964).

2. Для столкновения двух ультрарелятивистских электронов определить (в системе центра инерции) сечение одновременного испускания двух мягких фотонов в противоположных направлениях под малыми углами к импульсам электронов.

Решение. Фотоны, летящие в противоположных направлениях, испускаются различными электронами, каждым в направлении своего движения. Сечение одновременного излучения

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} \cdot \alpha F(\xi)\frac{d\omega_1}{\omega_1} \cdot \alpha F(\xi)\frac{d\omega_2}{\omega_2}, \quad \xi = \frac{\varepsilon}{m}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{6}$$

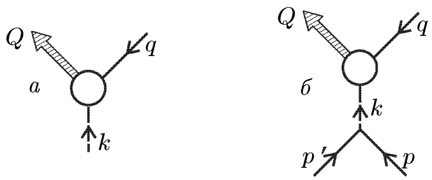
где ε — энергия каждого из электронов, θ — угол рассеяния в системе центра инерции, одинаковый для обоих электронов (поскольку фотоны испускаются заведомо в различных направлениях, вводить в сечение множитель $1/2$ не надо). Сечение упругого рассеяния электронов на малые углы в системе центра инерции в ультрарелятивистском случае совпадает с (4) (ср. (81.11)). В отличие от (1) сечение (6) ведет себя при $\theta \to 0$ как $\theta d\theta$, так что интеграл сходится. С одной стороны, это обстоятельство позволяет проводить интегрирование до $\theta = 0$ (не заботясь о возможном нарушении условия применимости метода). С другой стороны, основной вклад в интегральное сечение дает теперь область $\theta \sim m/\varepsilon$ (а не $\theta \ll m/\varepsilon$), так что надо пользоваться точным выражением (2). Результат интегрирования сечения по углам рассеяния:

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{2}{\pi}\left[5 + \frac{7}{2}\zeta(3)\right] r_e^2\alpha^2\frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2} = 5,9 r_e^2\alpha^2\frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2}$$

(ζ — функция Римана; $\zeta(3) = 1,202$).

§ 99. Метод эквивалентных фотонов

Сравним два процесса, описываемых диаграммами:



(99.1)

кружки изображают условно всю внутреннюю часть диаграммы). Диаграмма *а*) изображает столкновение фотона $k (k^2 = 0)$ с некоторой частицей с 4-импульсом q (и массой m; $q^2 = m^2$). В результате столкновения образуется система (частица или группа частиц) с общим 4-импульсом Q. Диаграмма *б*) изображает столкновение той же частицы q с другой частицей, 4-импульс которой p, а масса M ($p^2 = M^2$). В результате столкновения эта последняя частица приобретает 4-импульс p' и образуется та же система Q. Второй процесс можно рассматривать как столкновение частицы q с испущенным частицей p виртуальным фотоном, импульс которого $k = p - p'$ ($k^2 < 0$). Если при этом $|k|^2$ мало,

то виртуальный фотон мало отличается от реального. Очевидно, что с такой ситуацией можно встретиться при столкновениях очень быстрых частиц: электромагнитное поле заряженной частицы, движущейся со скоростью $v \approx 1$, почти поперечно и потому близко по своим свойствам к полю световой волны. В этих условиях сечение процесса *б*) можно выразить через сечение процесса *а*) [1]).

Итак, будем считать частицу M ультрарелятивистской: ее энергия (в системе покоя частицы m) $\varepsilon \gg M$. Если массы сталкивающихся частиц m и M различны, то для определенности будем считать, что $m < M$.

Амплитуду процесса *а*) (с участием реального фотона) можно представить в виде

$$M_{fi}^{(r)} = -e\sqrt{4\pi}(e_\mu J^\mu), \tag{99.2}$$

где e_μ — 4-вектор поляризации фотона, а J^μ — ток перехода, отвечающий вершине (кружок) диаграммы. Амплитуда же процесса *б*)

$$M_{fi} = Ze^2\frac{4\pi}{k^2}(j_\mu J^\mu), \tag{99.3}$$

где j_μ — ток перехода частицы m (нижняя вершина диаграммы); Ze — заряд этой частицы. Ток J — функция от $k = Q - q$ и потому в этих случаях различен: $k^2 = 0$ в (99.2) и $k^2 \neq 0$ в (99.3). Но если во втором случае

$$|k^2| \ll m^2, \tag{99.4}$$

то и здесь можно взять J при $k^2 = 0$.

Изменение импульса частицы M при испускании виртуального фотона, $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{k}$, мало по сравнению с ее первоначальным импульсом $|\mathbf{p}| \approx \varepsilon$; поэтому в токе перехода j можно положить $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$. Другими словами, рассматриваем движение частицы M как прямолинейное и равномерное. Поскольку такое движение квазиклассично, соответствующий ток не зависит от спина частицы [2]):

$$j_\mu = 2p^\mu. \tag{99.5}$$

[1]) Излагаемый ниже метод был разработан *Вейцзеккером* и *Вильямсом* (*K. Weizsäcker, E. J. Williams,* 1934); основная идея этого метода была еще раньше высказана *Ферми* (*E. Fermi,* 1924).

[2]) При нормировке волновых функций на одну частицу в единичном объеме ток $j^\mu = (1, \mathbf{v})$, где $\mathbf{v}$ — скорость. Но мы условились (см. § 6) опускать в волновых функциях нормировочный множитель $1/\sqrt{2\varepsilon}$. Соответственно этому в j^μ надо ввести дополнительный множитель 2ε, и мы приходим к выражению (99.5).

Условие поперечности тока ($jk = 0$) дает теперь $\varepsilon\omega - p_x k_x = 0$, где ось x выбрана в направлении $\mathbf{p}$. Отсюда

$$\omega = v k_x, \tag{99.6}$$

где $v = p_x/\varepsilon$ — скорость частицы M. Поскольку

$$-\mathbf{k}^2 = -\omega^2 + k_x^2 + \mathbf{k}_\perp^2 \approx \omega^2(1 - v^2) + \mathbf{k}_\perp^2 \tag{99.7}$$

($\mathbf{k}_\perp$ — поперечная к оси x составляющая вектора $\mathbf{k}$), условие (99.4) эквивалентно неравенству $|\mathbf{k}_\perp| \ll m$ и значительно более слабому неравенству для ω: $\omega \ll m\sqrt{1 - v^2}$.

Далее, из условия поперечности тока J ($Jk = 0$) следует при использовании (99.6)

$$J_0 = \frac{J_x}{v} + \frac{\mathbf{J}_\perp \mathbf{k}_\perp}{\omega}.$$

Поэтому для скалярного произведения jJ получим

$$jJ = 2(J_0\varepsilon - J_x p_x) \approx 2\frac{\varepsilon}{\omega}\left(\mathbf{J}_\perp \mathbf{k}_\perp + \frac{\omega M^2}{\varepsilon^2} J_x\right). \tag{99.8}$$

Произведение же Je в (99.2) раскроем, выбрав 4-вектор поляризации реального фотона в трехмерно поперечной калибровке: $ek = -\mathbf{ek} = 0$, откуда $e_x \approx -\mathbf{e}_\perp \mathbf{k}_\perp/\omega$. Тогда

$$je = -\mathbf{e}_\perp\left(\mathbf{J}_\perp - \frac{\mathbf{k}_\perp}{\omega} J_x\right). \tag{99.9}$$

Сравним выражения (99.8) и (99.9). Они окажутся пропорциональными друг другу, если можно пренебречь вторыми членами в скобках. Поскольку ток J относится к верхнему узлу диаграммы (99.16), он не связан с направлением $\mathbf{p}$; поэтому J_x и $\mathbf{J}_\perp$ надо считать величинами одного порядка. Допустимость указанного пренебрежения требует, следовательно, соблюдения условий $|\mathbf{k}_\perp| \ll \omega$ и $\omega \ll \varepsilon^2 |\mathbf{k}_\perp|/M^2$; они не противоречат предыдущим условиям, уже наложенным на $\mathbf{k}_\perp$ и ω.

Приняв, что в (99.9) фотон поляризован в плоскости $\mathbf{x}\,\mathbf{k}$ (так что $\mathbf{e}_\perp \parallel \mathbf{k}_\perp$), и заметив, что в силу поставленных условий $\mathbf{e}_\perp^2 \approx \mathbf{e}^2 = 1$, получим теперь

$$M_{fi} = M_{fi}^{(r)} = \frac{Ze\sqrt{4\pi}}{-k^2} \frac{2\varepsilon}{\omega} |\mathbf{k}_\perp|. \tag{99.10}$$

Согласно сказанному выше при этом предполагаются выполненными условия

$$|\mathbf{k}_\perp| \ll \omega \ll m\gamma, \tag{99.11}$$

$$\frac{\omega}{\gamma^2} \ll |\mathbf{k}_\perp| \ll m, \tag{99.12}$$

где для краткости обозначено:

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{M} = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}.$$

Отсюда можно найти связь между соответствующими сечениями. Согласно общей формуле (64.18) имеем (в системе покоя частицы m)

$$d\sigma_r = |M_{fi}^{(r)}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{1}{4m\omega} d\rho_Q,$$

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{1}{4m\omega} \frac{d^3p'}{2\varepsilon(2\pi)^3} d\rho_Q,$$

где $d\rho_Q$ — статистические веса частиц Q. Используя (99.10) и (99.7), получаем

$$d\sigma = d\sigma_r \cdot n(\mathbf{k}) d^3p', \tag{99.13}$$

где

$$n(\mathbf{k}) = \frac{Z^2e^2}{\pi^2} \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{\omega(\mathbf{k}_\perp^2 + \omega^2/\gamma^2)^2}. \tag{99.14}$$

Напомним, что $d\sigma_r$ — сечение процесса a), вызванного столкновением реального фотона с покоящейся частицей, причем образуется система частиц Q в определенных интервалах их импульсов. Сечение же $d\sigma$ относится к процессу $б$) образования той же системы Q при столкновении быстрой частицы (массы M) с той же покоящейся частицей, причем быстрая частица теряет импульс $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \mathbf{k}$, оставаясь в интервале d^3p' значений $\mathbf{p}'$. Множитель $n(\mathbf{k})$ в (99.13) можно истолковать как плотность (в $\mathbf{k}$-пространстве) числа фотонов, которым эквивалентно электромагнитное поле быстрой частицы.

Интегрирование по d^3p' равнозначно интегрированию по $d^3k = d\omega d^2k_\perp$. Произведя интегрирование по $d^2k_\perp$, мы получим сечение процесса, в котором полная энергия E системы частиц Q лежит в заданном интервале $dE = d\omega$ ($E - m = \varepsilon - \varepsilon' = \omega$, где ε и ε' — начальная и конечная энергии частицы M). Интегрирование по направлениям $\mathbf{k}_\perp$ означает усреднение по направлениям поляризации падающего фотона (вместе с умножением на 2π). После этого получим

$$d\sigma = n(\omega) d\sigma_r d\omega,$$

$$n(\omega) = \int n(\mathbf{k}) \cdot 2\pi k_\perp dk_\perp = \frac{2Z^2e^2}{\pi\omega} \int \frac{k_\perp^3 dk_\perp}{(k_\perp^2 + \omega^2/\gamma^2)^2}. \tag{99.15}$$

Интеграл по $k_\perp$ расходится при больших $k_\perp$. Расходимость, однако, всего лишь логарифмическая. Это обстоятельство позволяет (в пределах применимости излагаемого метода) получить

ответ в логарифмическом приближении: предполагается, что велик не только аргумент логарифма, но и сам логарифм. С такой точностью достаточно положить для верхнего предела интегрирования $k_{\perp\max} \sim m$ — верхний предел неравенства (99.12). Произведя интегрирование, получим для спектрального распределения эквивалентных фотонов (в обычных единицах)

$$n(\omega)d\omega = \frac{2}{\pi} Z\alpha \ln \frac{\gamma mc^2}{\hbar\omega} \frac{d\omega}{\omega}. \tag{99.16}$$

Принятое приближение означает, что численный коэффициент в аргументе логарифма остается неопределенным: введение такого коэффициента означало бы прибавление к большому логарифму относительно малой величины (~ 1) и представляло бы собой превышение допустимой точности.

З а д а ч и

1. Найти сечение тормозного излучения при столкновении быстрого электрона с ядром, исходя из сечения рассеяния фотонов на электроне.

Р е ш е н и е. В системе отсчета K_1, в которой электрон до столкновения покоился, процесс можно рассматривать как рассеяние на электроне эквивалентных фотонов поля ядра [1]. Согласно (86.10) сечение рассеяния фотона электроном в системе K_1

$$d\sigma_{\text{расс}}(\omega_1, \omega_1') =$$
$$= \pi r_e^2 \frac{m d\omega_1'}{\omega_1^2} \left[\frac{\omega_1}{\omega_1'} + \frac{\omega_1'}{\omega_1} + \left(\frac{m}{\omega_1'} - \frac{m}{\omega_1} \right)^2 - 2m \left(\frac{1}{\omega_1'} - \frac{1}{\omega_1} \right) \right], \tag{1}$$

где ω_1 и ω_1' начальная и конечная энергии фотона в этой системе. Сечение тормозного излучения в системе K_1

$$d\sigma_{\text{изл}}(\omega_1') = \int d\omega_1 \cdot n(\omega_1) d\sigma_{\text{расс}}(\omega_1, \omega_1'), \tag{2}$$

где $n(\omega_1)$ — функция (99.16). Ввиду инвариантности сечения переход к системе отсчета K, в которой покоится ядро, сводится к преобразованию частоты ω_1'. Частоты ω_1' и ω' в системах K_1 и K связаны формулой Доплера

$$\omega' = \gamma \omega_1' (1 - v\cos\theta_1), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{3}$$

где θ_1 — угол рассеяния в системе K_1. Этот же угол связывает ω_1' с ω_1, согласно (86.8):

$$\frac{1}{\omega_1'} - \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{m}(1 - \cos\theta_1). \tag{4}$$

Из (3) и (4) находим

$$\omega_1' = \omega_1 \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}, \tag{5}$$

[1]) Рассеяние же виртуальных фотонов на ядре (в системе покоя ядра) исключается большой массой последнего: сечение рассеяния стремится к нулю при увеличении массы рассеивающей частицы.

где $\varepsilon = m\gamma$ и ε' — начальная и конечная энергии электрона в системе K ($\varepsilon - \varepsilon' = \omega'$). Подставив (5) в (1), получим

$$d\sigma_{\text{расс}} = \pi r_e^2 \frac{m d\omega'}{\varepsilon\omega_1} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{m^2\omega'^2}{\varepsilon'^2\omega_1^2} - \frac{2m\omega'}{\omega_1\varepsilon'} \right).$$

Это выражение надо подставить в (2) и интегрировать по ω_1 при заданном ω' (т. е. заданном ε') в пределах между

$$\omega_{1\,\max} = \frac{2\varepsilon\omega'}{m}, \quad \omega_{1\,\min} = \frac{2m\omega'}{\varepsilon'}$$

(эти значения получаются из (3)–(4) при $\theta_1 = 0$ и $\theta_1 = \pi$. Ввиду быстрой сходимости интеграла при больших ω_1 главный вклад в него дает область ω_1 вблизи нижнего предела (т. е. можно положить $\omega_{1\,\max} \to \infty$). Вычисляя интеграл с логарифмической точностью [1]) получаем

$$d\sigma_{\text{изл}} = 4r_e^2 \alpha Z \frac{d\omega'}{\omega'} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \right) \ln \frac{\varepsilon\varepsilon'}{m\omega'}.$$

Для справедливости этого результата, помимо условия $\varepsilon \gg m$ (ультрарелятивистский электрон), должно выполняться условие (99.11): существенные при интегрировании частоты $\omega_1 \sim \omega_{1\,\min}$ должны быть много меньше ε. Отсюда $\varepsilon - \varepsilon' = \omega' \ll \varepsilon\varepsilon'/m$. В этих условиях полученный результат, как и следовало ожидать, совпадает с логарифмической точностью с (93.17).

2. То же для тормозного излучения электрона на электроне.

Р е ш е н и е. В этом случае виртуальный фотон может рассеиваться либо на быстром электроне, либо на электроне отдачи; фотоны, эквивалентные полю одного электрона, рассеиваются на другом, и наоборот. Рассеяние виртуальных фотонов на быстром электроне дает сечение $d\sigma^{(1)}_{\text{изл}}$ совпадающее с сечением излучения электрона на ядре с $Z = 1$.

Рассеяние же виртуальных фотонов на электроне отдачи дает сечение излучения

$$d\sigma^{(2)}_{\text{изл}} = \int d\omega \cdot n(\omega) d\sigma_{\text{расс}}(\omega,\, \omega'),$$

с $d\sigma_{\text{расс}}(\omega,\, \omega')$ из (1) (с соответствующим изменением обозначений частот). Для области значений, пробегаемых ω при заданном ω', имеем (ср. (4))

$$\omega' \leqslant \omega \leqslant \infty \qquad \text{при} \quad \omega' > \frac{m}{2};$$

$$\omega' \leqslant \omega \leqslant \frac{\omega'}{m - 2\omega'} \quad \text{при} \quad \omega' < \frac{m}{2}.$$

При $\omega' < m/2$ интегрирование по ω дает

$$d\sigma^{(2)}_{\text{изл}} = \frac{16}{3} \alpha r_e^2 \frac{d\omega'}{\omega'} \left(1 - \frac{\omega'}{m} + \frac{\omega'^2}{m^2} \right) \ln \frac{\varepsilon}{\omega'}$$

в согласии с (97.4). Если же $\omega' > m/2$, то надо различать случаи $\omega' \sim m$ и

[1]) Это значит, что путем однократного интегрирования по частям выделяем член, содержащий большой логарифм, а остальными членами пренебрегаем. Эта операция сводится к вынесению логарифма $\ln(\varepsilon/\omega_1)$ из-под знака интеграла при значении $\omega_1 = \omega_{1\,\min}$.

$\omega' \sim \varepsilon \gg m$. В первом случае получаем

$$d\sigma^{(2)}_{\text{изл}} = \frac{2}{3}\alpha r_e^2 \frac{m d\omega'}{\omega'^2}\left(4 - \frac{m}{\omega'} + \frac{m^2}{4\omega'^2}\right)\ln\frac{\varepsilon}{m}$$

в согласии с (97.3) (в аргументе логарифма произведена замена с требуемой точностью ε/ω' на ε/m). В случае же $\omega' \sim \varepsilon$ метод эквивалентных фотонов вообще неприменим для вычисления $d\sigma^{(2)}_{\text{изл}}$. Частота виртуальных фотонов ω пробегает значения, начиная от ω', и при $\omega = \omega' \sim \varepsilon$, следовательно, не выполняется условие (99.11).

3. Определить полное сечение образования пары при столкновении фотона с ядром, исходя из сечения образования пары при столкновении двух фотонов.

Р е ш е н и е. Энергия фотона в системе покоя ядра (система K): $\omega \gg m$. Перейдем в систему отсчета K_0, в которой ядро движется навстречу фотону со скоростью v_0 такой, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}} = \frac{\omega}{2m}.$$

В этой системе энергия фотона

$$\omega_0 = \omega\frac{1-v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} \approx \frac{\omega}{2}\sqrt{1-v_0^2} = m.$$

Искомое сечение σ вычисляем в системе K_0 как сечение образования пары при столкновениях падающего фотона ω_0 с эквивалентными фотонами ядра, энергии которых обозначим через ω':

$$\sigma = \int \sigma_{\gamma\gamma} n(\omega') d\omega',$$

где $\sigma_{\gamma\gamma}$ — сечение образования пары двумя фотонами; оно дается полученной в задаче к § 88 формулой (1), в которой надо положить

$$v = \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_0\omega'}} = \sqrt{1 - \frac{m}{\omega'}}.$$

Перейдя к переменной v вместо ω', получим

$$\sigma = 2r_e^2\alpha Z\int_0^1 v\ln\left[\frac{\omega}{m}(1-v^2)\right]\left[(3-v^4)\ln\frac{1+v}{1-v} - 2v(2-v^2)\right]dv.$$

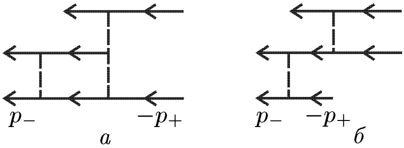
При учете сходимости интеграла на верхнем пределе интегрирование распространяется на всю область от порога реакции $\omega' = m$ ($v = 0$) до $\omega' = \infty$ ($v = 1$) и производится с логарифмической точностью (т. е. логарифм $\ln[\omega(1-v^2)/m]$ заменяется его значением при $v = 0$ и выносится из-под знака интеграла). В результате получим

$$\sigma = \frac{28}{9}\alpha Z^2 r_e^2 \ln\frac{\omega}{m}$$

в согласии с (94.6); формула справедлива при $\ln(\omega/m) \gg 1$.

§ 100. Образование пар при столкновениях частиц

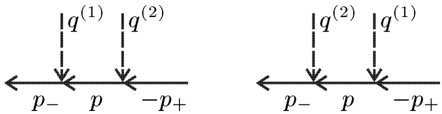
Образование электронной пары при столкновении двух заряженных частиц описывается диаграммами двух типов:



(100.1)

Две верхние сплошные линии отвечают сталкивающимся частицам, нижняя — рождающейся паре.

Рассмотрим в ультрарелятивистском случае столкновение двух тяжелых частиц (ядер). Изменением состояния движения самих этих частиц при таком столкновении можно пренебречь, т. е. можно рассматривать их как источники внешнего поля [1]). Этому отвечают, две диаграммы первого типа:



(100.2)

где $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ — «импульсы» компонент Фурье полей двух частиц.

Потенциал $A^\mu = (A_0,\ \mathbf{A})$, создаваемый равномерно движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ классической частицей, удовлетворяет уравнениям

$$\Box A_0 = -4\pi Ze\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0),$$
$$\Box \mathbf{A} = -4\pi Ze\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t - \mathbf{r}_0).$$

Его компоненты Фурье:

$$A_0(\omega,\ \mathbf{k}) = -\frac{8\pi^2 Ze}{\omega^2 - \mathbf{k}^2} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$$

и аналогично для $\mathbf{A}(\omega,\ \mathbf{k})$. В четырехмерном виде

$$A^\mu(q) = -\frac{8\pi^2 Ze}{q^2} e^{iqx_0} U^\mu \delta(Uq),$$

где U — 4-скорость частицы, а 4-вектор $x_0 = (0,\ \mathbf{r}_0)$. Если ядро 1 покоится в начале координат ($\mathbf{r}_0^{(1)} = 0$), то $\boldsymbol{\rho} \equiv \mathbf{r}_0^{(2)}$) есть вектор прицельного расстояния (в плоскости, перпендикулярной

[1]) Случай столкновения двух легких частиц (электронов), изменением движения которых нельзя пренебречь, значительно более сложен. См. об этом указанную на с. 454 книгу *В. Н. Байера, В. М. Каткова и В. С. Фадина.*

направлению движения ядра 2). Это выражение для $A^\mu(q)$ и должно использоваться при аналитической записи диаграмм (100.2).

В проведении вычислений этим способом в данном случае, однако, нет необходимости. Сечение образования пары может быть определено с помощью метода эквивалентных фотонов по известному уже нам сечению образования пары фотоном на ядре. Замена поля одной из частиц (скажем, первой) спектром эквивалентных фотонов означает, что в диаграммах (100.2) линии $q^{(1)}$ рассматриваются как линии реальных фотонов. Совокупность этих двух диаграмм становится тогда тождественной с совокупностью диаграмм, отвечающих образованию пары фотоном на ядре 2. При $\varepsilon_+,\ \varepsilon_- \gg m$ сечение последнего процесса дается формулой (94.5). Умножив это выражение на спектр (99.16) эквивалентных фотонов первого ядра, получим (с логарифмической точностью) дифференциальное сечение образования пары при столкновении частиц:

$$d\sigma = \frac{8}{\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \frac{d\varepsilon_+ d\varepsilon_-}{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^4} \left(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2 + \frac{2}{3}\varepsilon_+\varepsilon_-\right) \times \\ \times \ln \frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{m(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)} \ln \frac{m\gamma}{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}, \quad (100.3)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2} \gg 1$.

Здесь предполагается, что

$$m \ll \varepsilon_+,\ \varepsilon_- \ll m\gamma: \quad (100.4)$$

верхнее неравенство есть условие применимости метода эквивалентных фотонов. В тоже время область, определяемая неравенствами (100.4), совпадает с областью энергий электрона и позитрона, существенных при интегрировании выражения (100.3). При интегрировании по ε_+ или ε_- при заданной сумме $\varepsilon \equiv \varepsilon_+ + \varepsilon_- (\gg m)$ существенна область вблизи верхнего предела; отбрасывая члены, не содержащие большого логарифма, получаем

$$d\sigma = \frac{56}{9\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \ln \frac{\varepsilon}{m} \ln \frac{m\gamma}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Интеграл по ε, взятый по области (100.4), расходится как куб логарифма, а на краях этой области — лишь как квадрат логарифма. В логарифмическом приближении ($\ln\gamma \gg 1$), следовательно, область (100.4) действительно основная, и интеграл может быть взят в пределах от m до $m\gamma$. Имеем

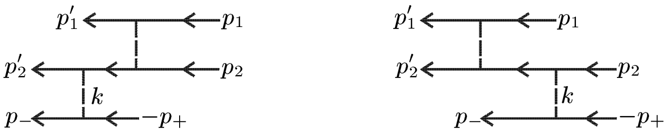
$$\int_1^\gamma \ln\xi(\ln\gamma - \ln\xi)\frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{6}\ln^3\gamma,$$

так что полное сечение образования пары

$$\sigma = \frac{28}{27\pi} r_e^2 (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \ln^3 \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{100.5}$$

(*Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц,* 1934).

Рассмотрим теперь случай нерелятивистских скоростей сталкивающихся ядер. В этом случае становится существенным изменение движения ядер под влиянием их взаимодействия, и основной вклад в сечение образования пары дают диаграммы второго типа в (100.1). Таких диаграмм — четыре: две диаграммы



(100.6)

и две аналогичные, в которых виртуальный фотон k (рождающий пару) испускается первым, а не вторым ядром [1]).

Будем считать, что энергия пары мала по сравнению с кинетической энергией относительного движения ядер в системе их центра инерции:

$$\varepsilon_+ + \varepsilon_- \ll Mv^2/2 \tag{100.7}$$

($\mathbf{v}$ — начальная относительная скорость, $M{=}M_1M_2/(M_1{+}M_2)$ — приведенная масса ядер). Тогда можно пренебречь обратным влиянием рождения пары па движение ядер. Если в диаграммах (100.6) убрать электрон-позитронную линию, то оставшиеся их части будут изображать испускание сталкивающимися частицами виртуального фотона малой частоты ($\omega{=}\varepsilon_+{+}\varepsilon_-$). Мы возвращаемся, таким образом, к ситуации, рассмотренной в § 98 для испускания реального мягкого фотона, и можем воспользоваться полученной там для нерелятивистского случая формулой (98.13) (с тем отличием, что вместо амплитуды $\sqrt{4\pi}e^*$ реального фотона будет стоять пропагатор виртуального фотона [2]).

---

[1]) Отметим, что образованию пары при столкновении двух электронов отвечает всего 36 диаграмм: $2!\cdot 3! = 12$ диаграмм типа *а*), получающихся друг из друга перестановками двух начальных и трех конечных электронов, плюс $2\cdot 2!\cdot 3! = 24$ диаграммы типа *б*), получающиеся таким же образом из двух диаграмм (100.6).

[2]) В нерелятивистском случае импульс фотона мал по сравнению с изменением импульса излучающих частиц ($|\delta\mathbf{p}| \sim \omega/v$), и потому им можно пренебречь (по сравнению с $\delta\mathbf{p}$) даже тогда, когда не пренебрегаем энергией фотона. Это тем более относится в данном случае к виртуальному фотону, для которого $k^2 = (p_+ + p_-)^2 > 0$, так что $|\mathbf{k}| < \omega$. В этих условиях разница между реальным и виртуальным фотоном исчезает, чем и оправдывается использование формулы (98.13).

Таким образом, амплитуда всего процесса рождения пары запишется в виде

$$M_{fi} = M_{fi}^{(\text{упр})}\frac{1}{\omega}\left(\frac{Z_1 e}{M_1} - \frac{Z_2 e}{M_2}\right) q^\lambda D_{\lambda\mu}(k)[-ie(\overline{u}_-\gamma^\mu u_+)], \qquad (100.8)$$

где $q = (0,\ \mathbf{q}),\ \mathbf{q} = M(\mathbf{v}' - \mathbf{v})$.

Как обычно, в нерелятивистском случае фотонный пропагатор следует выбрать в калибровке (76.14). По амплитуде (100.8) находим сечение процесса:

$$d\sigma = d\sigma_{\text{рас}} \cdot e^4 \left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2 \times \\ \times \frac{d^3p_+ d^3p_-}{2\varepsilon_+ 2\varepsilon_-(2\pi)^6\omega^2(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2}(4\pi)^2|\overline{u}_-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{Q}u_+|^2, \qquad (100.9)$$

где

$$\omega = \varepsilon_+ + \varepsilon-, \quad \mathbf{k} = \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{\omega^2}\mathbf{k}(\mathbf{qk});$$

$d\sigma_{\text{рас}}$ — сечение упругого рассеяния ядер друг на друге (в системе их центра инерции). Оно дается формулой Резерфорда [1])

$$d\sigma_{\text{расс}} = 4(Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{M^2 do}{\mathbf{q}4} \approx 4(Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{dq_y dq_z}{v^2 \mathbf{q}4} \qquad (100.10)$$

(приближенное равенство предполагает малость отклонения ядер от их начального направления движения — оси x). Подставив это выражение в (100.9) и произведя обычным образом суммирование по поляризациям пары, получим

$$d\sigma_{\text{рас}} = (Z_1 Z_2 e^2)^2 \frac{e^4}{v^2}\left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2 \times \\ \times \operatorname{Sp}\{(\gamma p_- + m)(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{Q})(\gamma p_+ - m)(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{Q})\} \frac{d^3p_+ d^3p_- dq_y dq_z}{4\pi^4\varepsilon_+\varepsilon_-\mathbf{q}^4(\omega^2 - \mathbf{k}^2)^2\omega^2}. \qquad (100.11)$$

Дальнейшее вычисление производится в приближении, в котором все возникающие при интегрировании логарифмы считаются большими величинами. Мы увидим, что с этой точностью основную роль играют энергии пары $\varepsilon_+,\ \varepsilon_- \gg m$ и углы θ между $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{p}_-$ в области

$$m/\varepsilon \ll \theta \ll 1. \qquad (100.12)$$

[1]) Диаграммы (100.6) соответствуют борновскому приближению для рассеяния ядер. Однако поскольку формула Резерфорда точная (для кулонова взаимодействия), то справедливость полученных результатов в действительности не требует соблюдения условия применимости борновского приближения.

С соответствующими пренебрежениями вычисление следа в (100.11) дает

$$\mathrm{Sp}\{\dots\} = 4\Big[(\varepsilon_+\varepsilon_- - \mathbf{p}_+\mathbf{p}_-)\Big(\mathbf{q}^2 - \frac{(\mathbf{qk})^2}{\omega^2}\Big) + \\ + 2(\mathbf{p}_+\mathbf{q})(\mathbf{p}_-\mathbf{q}) + \frac{2\varepsilon_+\varepsilon_-}{\omega^2}(\mathbf{qk})^2 - \frac{2\mathbf{qk}}{\omega}(\varepsilon_+\mathbf{qp}_- + \varepsilon_-\mathbf{qp}_+)\Big],$$

причем можно положить: $|\mathbf{p}_+| = \varepsilon_+$, $|\mathbf{p}_-| = \varepsilon_-$. В знаменателе же

$$\omega^2 - \mathbf{k}^2 \approx \varepsilon_+\varepsilon_-\theta^2 + m^2\frac{(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{\varepsilon_+\varepsilon_-}.$$

Интегрируя по направлениям $\mathbf{p}_+$ и $\mathbf{p}_-$ при постоянном угле между ними, получаем

$$d\sigma = \frac{8}{3\pi^2}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4}{v^2}\left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{Z_2}{M_2}\right)^2(\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2)d\varepsilon_+d\varepsilon_- \times \\ \times \frac{\theta^3 d\theta}{\left[\theta^2 + \dfrac{m^2(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2}{\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2}\right]^2}\frac{dq_ydq_z}{\mathbf{q}^2}. \quad (100.13)$$

Вид зависимости от θ подтверждает предположение (100.12), и интегрирование по θ дает $\ln\dfrac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)}$. Интегрирование же последнего множителя в (100.13) производится в пределах от $q_y = q_z = 0$ до $\sqrt{q_y^2 + q_z^2} \sim 1/R$, где R — величина порядка радиуса ядер (это значение соответствует наименьшим прицельным расстояниям — см. ниже); это интегрирование дает

$$\pi\ln(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)\Bigg|_{q_y=q_z=0}^{q_y=q_z=1/R} \approx 2\pi\ln\frac{1}{Rq_x}.$$

С другой стороны, полная энергия пары, равная изменению энергии ядер, есть

$$\varepsilon \equiv (\varepsilon_+ + \varepsilon_-) = \frac{M}{2}(\mathbf{v}'^2 - \mathbf{v}^2) \approx Mv(v'_x - v_x) = vq_x,$$

откуда $q_x = \varepsilon/v$. Таким образом, находим

$$d\sigma = \frac{16}{3\pi}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4m^2}{v^2}\left(\frac{Z_2}{M_2} - \frac{Z_1}{M_1}\right)^2\frac{\varepsilon_+^2 + \varepsilon_-^2}{\varepsilon^4}\ln\frac{v}{R\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon_+\varepsilon_-}{m\varepsilon}d\varepsilon_+d\varepsilon_-,$$

а после интегрирования по ε_+ или ε_- при заданной сумме ε

$$d\sigma = \frac{32}{9\pi}(Z_1Z_2e^2)^2\frac{e^4m^2}{v^2}\left(\frac{Z_2}{M_2} - \frac{Z_1}{M_1}\right)^2\ln\frac{v}{R\varepsilon}\ln\frac{\varepsilon}{m}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (100.14)$$

Энергии ε можно привести в соответствие прицельное расстояние $\rho \sim v/\varepsilon$ (энергия пары — порядка частоты, отвечающей времени столкновения). Поэтому логарифмическая расходимость при интегрировании по ε в (100.14) означает такую же расходимость по прицельным расстояниям. Это значит, что существенны большие ρ (тем самым, кстати, оправдывается использование сечения рассеяния (100.10) в чисто кулоновом поле ядра). Соответственно существенна область энергий: $m \ll \varepsilon \ll v/R$. Интегрирование (100.14) дает полное сечение образования пары; окончательно (в обычных единицах)

$$d\sigma = \frac{16}{27\pi}(Z_1 Z_2 \alpha)^2 r_e^2 \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left(\frac{Z_2 m}{M_2} - \frac{Z_1 m}{M_1}\right)^2 \ln^3 \frac{\hbar v}{mc^2 R} \qquad (100.15)$$

(*Е. М. Лифшиц*, 1935) [1].

§ 101. Излучение фотона электроном в поле интенсивной электромагнитной волны

Применимость теории возмущений к процессам взаимодействия электрона с полем излучения предполагает (помимо малости константы взаимодействия α) также достаточную слабость этого поля. Если a — амплитуда классического 4-потенциала поля электромагнитной волны, то характерной величиной в этом смысле является безразмерное инвариантное отношение

$$\xi = e\sqrt{1 - a^2}/m. \qquad (101.1)$$

В этом параграфе мы рассмотрим процессы излучения, возникающие при взаимодействии электрона с полем сильной электромагнитной волны, для которой ξ может иметь любое значение. Применяемый метод основан на точном учете этого взаимодействия; взаимодействие же электрона с новыми испускаемыми фотонами может по-прежнему рассматриваться как малое возмущение (*Л. И. Никишов, В. И. Ритус*, 1964).

Рассмотрим монохроматическую плоскую волну, для определенности циркулярно поляризованную. Ее 4-потенциал напишем в виде

$$A = a_1 \cos\varphi + a_2 \sin\varphi, \qquad \varphi = kx, \qquad (101.2)$$

где $k^\mu = (\omega,\ \mathbf{k})$ — волновой 4-вектор ($k^2 = 0$), а 4-амплитуды a_1 и a_2 одинаковы по величине и взаимно ортогональны:

$$a_1^2 = a_2^2 \equiv a^2, \qquad a_1 a_2 = 0.$$

---

[1]) Числовая ошибка исправлена *Л. Б. Окунем* (1953).

Будем предполагать потенциал калиброванным условием Лоренца, так что $a_1 k = a_2 k = 0$.

Точная волновая функция для электрона в поле произвольной плоской электромагнитной волны была найдена в § 40 (см. формулы (40.7),(40.8)). Изменим, однако, ее нормировку: потребуем, чтобы ψ_p отвечала равной единице средней пространственной плотности числа частиц, — подобно тому как мы нормируем волновые функции свободных частиц на одну частицу в единичном объеме. Поскольку для функции (40.7) средняя плотность равна $\overline{j}_0 = q_0/p_0$, для получения требуемой нормировки надо умножить ее на $\sqrt{p_0/q_0}$, т. е. заменить в (40.7) множитель $1/\sqrt{2p_0}$ на $l/\sqrt{2q_0}$. Для волны с 4-потенциалом (101.2) получим

$$\psi_p = \left\{1 + \frac{e}{2(kp)}[(\gamma k)(\gamma a_1)\cos\varphi + (\gamma k)(\gamma a_2)\sin\varphi]\right\}\frac{u(p)}{\sqrt{2q_0}} \times \\ \times \exp\left\{-ie\frac{(a_1 p)}{(kp)}\sin\varphi + ie\frac{(a_2 p)}{(kp)}\cos\varphi - iqx\right\}, \quad (101.3)$$

где

$$q^\mu = p^\mu - e^2\frac{a^2}{2(kp)}k^\mu. \quad (101.4)$$

Согласно (40.14) 4-вектор q — средний кинетический 4-импульс электрона; будем называть его квазиимпульсом.

Элемент S-матрицы для перехода электрона из состояния ψ_p в состояние $\psi_{p'}$ с излучением фотона с 4-импульсом $k^{\mu'} = (\omega', \mathbf{k}')$ и 4-вектором поляризации e':

$$S_{fi} = -ie\int \overline{\psi}_{p'}(\gamma e'^*)\psi_p\frac{e^{ik'x}}{\sqrt{2\omega'}}\,d^4x. \quad (101.5)$$

Подынтегральное выражение в (101.5) представляет собой линейную комбинацию величин

$$\exp(-i\alpha_1\sin\varphi + i\alpha_2\cos\varphi)\cdot\begin{cases}1,\\ \cos\varphi,\\ \sin\varphi,\end{cases}$$

где

$$\alpha_1 = e\left(\frac{(a_1 p)}{(kp)} - \frac{(a_1 p')}{(kp')}\right), \quad \alpha_2 = e\left(\frac{(a_2 p)}{(kp)} - \frac{(a_2 p')}{(kp')}\right). \quad (101.6)$$

Вместе со множителем $\exp[i(k'+p'-p)x]$ эти величины выделяют всю зависимость подынтегрального выражения от x.

Разложим их в ряды Фурье, обозначив коэффициенты разложения соответственно B_s, B_{1s}, B_{2s}, например:

$$\exp(-i\alpha_1 \sin\varphi + i\alpha_2 \cos\varphi) = \\ = \exp\Big(-i\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sin(\varphi - \sin\varphi_1)\Big) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} B_s e^{-is\varphi}.$$

Эти коэффициенты выражаются через функции Бесселя согласно формулам:

$$\begin{gathered} B_s = J_s(z) e^{is\varphi_0}, \\ B_{1s} = \frac{1}{2}[J_{s+1}(z) e^{i(s+1)\varphi_0} + J_{s-1}(z) e^{i(s-1)\varphi_0}], \\ B_{2s} = \frac{1}{2i}[J_{s+1}(z) e^{i(s+1)\varphi_0} - J_{s-1}(z) e^{i(s-1)\varphi_0}], \end{gathered} \tag{101.7}$$

где $z = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$, $\cos\varphi_0 = \alpha_2/z$, $\sin\varphi_0 = \alpha_2/z$. Функции B_s, B_{1s}, B_{2s} связаны между собой соотношением

$$\alpha_1 B_{1s} + \alpha_2 B_{2s} = s B_s, \tag{101.8}$$

которое является следствием известного соотношения для функций Бесселя:

$$J_{s-1}(z) + J_{s+1}(z) = 2sJ_s(z)/z.$$

В результате матричный элемент (101.5) приобретает вид

$$S_{fi} = \frac{1}{(2\omega' 2q_0 2q_0')^{1/2}} \sum_s M_{fi}^{(s)} (2\pi)^4 i\delta^{(4)}(sk + q - q' - k'); \tag{101.9}$$

довольно громоздкие выражения для амплитуд $M_{fi}^{(s)}$ мы не станем здесь выписывать. Таким образом, S_{fi} представляет собой бесконечную сумму членов, каждому из которых соответствует закон сохранения

$$sk + q = q' + k'. \tag{101.10}$$

Поскольку

$$q^2 = q'^2 = m^2(1+\xi^2) \equiv m_*^2 \tag{101.11}$$

(ср. (40.15)), а $k^2 = k'^2 = 0$, то равенство (101.10) возможно лишь для $s \geqslant 1$. s-й член суммы описывает излучение фотона k' за счет поглощения из волны s фотонов с 4-импульсами k. Из вида равенства (101.10) очевидно, что все кинематические соотношения, имевшие место для эффекта Комптона, будут относиться к рассматриваемым процессам, если заменить импульсы электрона квазиимпульсами q, а импульс падающего фотона — 4-вектором

sk. В частности, для частоты излучаемого фотона в системе отсчета, где электрон в среднем покоится ($\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{q}_0 = m_*$), имеем

$$\omega' = \frac{s\omega}{1 + (s\omega/m_*)(1 - \cos\theta)}, \tag{101.12}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ (ср. (86.8)). Можно сказать, что частоты ω' являются гармониками частоты ω. В принятых нами обозначениях (§ 64) амплитуда процесса излучения s-й гармоники совпадает с $M_{fi}^{(s)}$, а выражение

$$dW_s = |M_{fi}^{(s)}|^2 \frac{d^3k' d^3q'}{(2\pi)^6 \cdot 2\omega' \cdot 2q_0 \cdot 2q_0'} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \tag{101.13}$$

дает соответствующую дифференциальную вероятность (отнесенную к единице времени) [1]).

Структура амплитуд $M_{fi}^{(s)}$ подобна структуре амплитуд рассеяния с плоскими волнами: $\overline{u}(p') \ \ldots \ u(p)$. Поэтому и операции суммирования по поляризациям частиц производятся обычным образом. После суммирования по поляризациям конечных электрона и фотона и усреднения по поляризациям начального электрона получается

$$dW_s = \frac{e^2 m^2}{4\pi} \frac{d^3k' d^3q'}{q_0 q_0' \omega'} \delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \times$$
$$\times \left\{ -2J_s^2(z) + \xi^2 \left(1 + \frac{(kk')^2}{2(kp)(kp')}\right)(J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2) \right\}. \tag{101.14}$$

Для интегрирования этого выражения замечаем, что ввиду аксиальной симметрии поля циркулярно поляризованной волны дифференциальная вероятность не зависит от общего азимутального угла φ вокруг направления $\mathbf{k}$. Вместе с наличием δ-функции это обстоятельство дает возможность произвести интегрирование по всем переменным, кроме одной; в качестве последней выберем инвариантную величину $u = (kk')/(kp')$. Тогда после интегрирования по $d^3k\, d\varphi\, d(q_0' + \omega')$ имеем

$$\delta^{(4)}(sk + q - q' - k') \frac{d^3q' d^3k'}{q_0' \omega'} \to \frac{2\pi du}{(1+u)^2}.$$

[1]) Обратим внимание на то, что нормировка функций ψ_p на единичную плотность отвечает нормировке на δ-функцию «по шкале $\mathbf{q}/(2\pi)$» (ср. (40.17), где множитель q_0/p_0 в правой части равенства будет теперь отсутствовать). Именно поэтому число конечных состояния электрона должно измеряться элементом $d^3q'/(2\pi)^3$.

Действительно, в системе центра инерции (система, в которой $s\mathbf{k} + \mathbf{q} = \mathbf{q}' + \mathbf{k}' = 0$) указанное интегрирование дает $2\pi|\mathbf{q}'|d\cos\theta/E_s$, где $E_s = s\omega + q_0 = \omega' + q_0'$, а θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{q}'$ (ср. преобразование (64.12)). С другой стороны, в этой же системе

$$u = \frac{E_s}{q_0' - |\mathbf{q}'|\cos\theta} - 1, \quad d\cos\theta = \frac{E_s du}{|\mathbf{q}'|(1+u)^2}.$$

Интервалу $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$ соответствует интервал

$$0 \leqslant u \leqslant u_s \equiv \frac{E_s^2}{m_*^2} - 1 = \frac{2s(kp)}{m_s^2}$$

(при преобразованиях следует помнить, что $(kp) = (kq)$).

Таким образом, полная вероятность излучения в единицу времени

$$W = \sum_{s=1}^{\infty} W_s =$$

$$= \frac{e^2m^2}{4q_0} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{u_s} \frac{du}{(1+u)^2} \left\{-4J_s^2(z) + \xi^2\left(2 + \frac{u^2}{1+u}\right)(J_{s+1}^2 + J_{s-1}^2 - 2J_s^2)\right\}, \tag{101.15}$$

где [1])

$$u = \frac{(kk')}{(kp')}, \quad u_s = 2s\frac{(kp)}{m_s^2}, \quad z = 2sm^2\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\sqrt{\frac{u}{u_s}\left(1 - \frac{u}{u_s}\right)}. \tag{101.16}$$

При $\xi \ll 1$ (условие применимости теории возмущений) подынтегральные выражения в (101.15) могут быть разложены по степеням ξ. Так, для первого члена разложения в W_1 получается

$$W_1 = \frac{e^2m^2}{4p_0}\xi^2 \int_0^{u_1} \left[2 + \frac{u^2}{1+u} - 4\frac{u}{u_1}\left(1 - \frac{u}{u_1}\right)\right] \frac{du}{(1+u)^2} =$$

$$= \frac{e^2m^2}{4p_0}\xi^2 \left[\left(1 - \frac{4}{u_1} - \frac{8}{u_1^2}\right)\ln(1+u_1) + \frac{1}{2} + \frac{8}{u_1} - \frac{1}{2(1+u_1)^2}\right], \tag{101.17}$$

---

[1]) Для вычисления z надо заметить предварительно, что

$$z^2 = (a_1Q)^2 + (a_2Q)^2 = a^2Q^2, \quad Q = \frac{eq}{(kq)} - \frac{eq'}{(kq')}.$$

В этом легко убедиться, выбрав систему отсчета, в которой $(a_1)_0 = (a_2)_0 = 0$, а векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{k}$ направлены по осям x^1, x^2, x^3, и заметив, что в силу $kQ = 0$ будет $Q_0 = Q_3$.

причем $u_1 \approx 2(kp)/m^2$. Как и должно быть, этот результат совпадает с формулой Клейна— Нишины для рассеяния фотона на электроне: положив в (101.17) $-a^2 = 4\pi/\omega$, $\xi^2 = 4\pi e^2/(m^2\omega)$ и разделив на плотность падающего потока (64.14), мы вернемся к (86.16) (интегральное сечение рассеяния не зависит от начальной поляризации фотона) [1].

Приведем также выражение для вероятности испускания второй гармоники (первый член разложения W_2 при $\xi \ll 1$):

$$W_2 = \frac{e^2m^2\xi^4}{p_0}\int\limits_0^{u_2} \frac{du}{(1+u)^2}\frac{u}{u_2}\Big(1-\frac{u}{u_2}\Big)\Big[2+\frac{u^2}{1+u}-4\frac{u}{u_2}\Big(1-\frac{u}{u_2}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{e^2m^2\xi^4}{p_0}\Big[\frac{1}{2}+\frac{1}{3u_1}-\frac{4}{u_1^2}-\frac{2}{u_1^3}-\frac{1}{2(1+2u_1)}-$$

$$-\Big(\frac{1}{2u_1}-\frac{3}{2u_1^2}-\frac{3}{u_1^3}-\frac{1}{u_1^4}\Big)\ln(1+2u_1)\Big]. \quad (101.18)$$

Вообще, основной член в W_s (при не слишком больших s) пропорционален ξ^{2s}.

Остановимся теперь на противоположном случае: $\xi \gg 1$. Параметр ξ можно сделать большим, например, путем уменьшения частоты ω при фиксированной напряженности поля (очевидно, что $\xi = eF/(m\omega)$, где F — амплитуда напряженности поля). Поэтому ясно, что случай $\xi \gg 1$ по существу сводится к процессам в постоянном однородном поле, напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ которого взаимно перпендикулярны и равны по величине (назовем условно такое поле *скрещенным*). Вероятность излучения в этом поле можно получить предельным переходом $\xi \to \infty$, но проще произвести вычисления сразу для постоянного поля, взяв 4-потенциал в виде

$$A^\mu = a^\mu\varphi, \quad \varphi = kx, \quad ak = 0 \quad (101.19)$$

(так что $F_{\mu\nu} = k_\mu a_\nu - k_\nu a_\mu = \text{const}$). Точная волновая функция электрона в этом поле получается подстановкой (101.19) в (40.7),(40.8):

$$\psi_p = \Big[1 + e\frac{(\gamma k)(\gamma a)}{2(kp)}\varphi\Big]\frac{u(p)}{\sqrt{2p_0}}\exp\Big\{-ie\frac{(ap)}{2(kp)}\varphi^2 + ie^2\frac{a^2}{6(kp)}\varphi^3 - ipx\Big\}. \quad (101.20)$$

Получающийся с помощью этой функции результат является точным для излучения электрона в скрещенном поле при любой энергии электрона. Но в ультрарелятивистском случае этот результат (при надлежащей форме его представления — см. ниже)

[1]) Указанное значение a^2 отвечает нормировке 4-потенциала на один фотон в единичном объеме. Для его определения надо приравнять ω энергии классического поля с (вещественным) 4-потенциалом (101.2).

относится к излучению электрона не только в скрещенном, но и во всяком постоянном однородном электромагнитном поле, в том числе в постоянном магнитном поле (которое было рассмотрено в § 90).

Для формулировки этого утверждения заметим, что состояние частицы в произвольном постоянном однородном поле определяется столькими же квантовыми числами, что и состояние свободной частицы, и эти квантовые числа всегда можно выбрать так, чтобы при выключении поля они переходили в квантовые числа свободной частицы, т. е. в ее 4-импульс $p^\mu (p^2 = m^2)$. Таким образом, состояние частицы в постоянном поле будет описываться постоянным 4-вектором p.

Полная интенсивность излучения, будучи инвариантной величиной, зависит лишь от инвариантов, которые можно составить из постоянных 4-тензора $F_{\mu\nu}$ и 4-вектора p^μ. Учитывая также, что $F_{\mu\nu}$ должен входить в интенсивность только вместе с зарядом e, получаем три безразмерных инварианта:

$$\chi^2 = -\frac{e^2}{m^6}(F_{\mu\nu}p^\nu)^2 = -\frac{e^2}{m^6}a^2(kp)^2, \quad f = \frac{e^2(F_{\mu\nu})^2}{m^4}, \qquad g = \frac{e^2}{m^4}e_{\lambda\mu\nu\rho}F^{\lambda\mu}F^{\nu\rho}. \tag{101.21}$$

В скрещенном поле $f = g \equiv 0$, в то время как в общем случае отличны от нуля все три инварианта. Но если электрон — ультрарелятивистский ($p_0 \ll m$), а вектор $\mathbf{p}$ составляет с полями $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ углы $\theta \gg m/p_0$, to $\chi^2 \gg f$, g (другими словами, для ультрарелятивистской частицы почти для всех направлений $\mathbf{p}$ любое постоянное поле выглядит как скрещенное). Если, кроме того, напряженности поля $|\mathbf{E}|$, $|\mathbf{H}| \ll m^2/e$ $(= m^2c^3/(e\hbar)$, то $|f|$, $|g| \ll 1$ [1]). В этих условиях интенсивность, вычисленная для скрещенного поля и выраженная через инвариант χ, будет относиться также к излучению во всяком постоянном поле.

Инвариант χ выражается через напряженности $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ согласно

$$\chi^2 = \frac{e^2}{m^6}\{([\mathbf{pH}] + p_0\mathbf{E})^2 - (\mathbf{pE})^2\}.$$

Для постоянного магнитного поля χ совпадает с введенной в § 90 величиной (90.3), так что изложенные здесь соображения дают другой способ получения результатов § 90 [2]).

---

[1]) При этом в выражении для χ можно с той же точностью считать p обычным кинематическим 4-импульсом частицы.

[2]) Подробное изложение теории различных процессов в сильных полях см. в обзорах *А. И. Никишова и В. И. Ритуса* в сб. «Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле» (Труды ФИАН. — М.: Наука, 1979. — Т. 111).

ГЛАВА XI

ТОЧНЫЕ ПРОПАГАТОРЫ И ВЕРШИННЫЕ ЧАСТИ

§ 102. Операторы полей в гейзенберговском представлении

До сих пор при рассмотрении различных конкретных электродинамических процессов мы ограничивались первым неисчезающим приближением теории возмущений. Перейдем теперь к изучению эффектов, возникающих при учете высших приближений. Эти эффекты носят название *радиационных поправок.*

Более глубокое понимание структуры высших приближений может быть достигнуто на основе предварительного изучения общих свойств, которыми обладают точные (т. е. не разложенные по степеням e^2) амплитуды рассеяния. Мы видели (см. § 72), что последовательные члены ряда теории возмущений выражаются через операторы полей в представлении взаимодействия — операторы, временная зависимость которых определяется гамильтонианом системы свободных частиц $\widehat{H}_0$. Точные же амплитуды рассеяния более удобно выражать через операторы поля не в этом, а в гейзенберговском представлении, в котором зависимость от времени определяется сразу точным гамильтонианом системы взаимодействующих частиц $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}$.

По общему правилу составления гейзенберговских операторов имеем

$$\widehat{\psi}(x) \equiv \widehat{\psi}(t, \mathbf{r}) = \exp(i\widehat{H}t)\widehat{\psi}(\mathbf{r})\exp(-i\widehat{H}t) \qquad (102.1)$$

и так же для $\widehat{\overline{\psi}}(x)$ и $\widehat{A}(x)$, причем $\widehat{\psi}(\mathbf{r})$, ... — не зависящие от времени (шредингеровские) операторы [1]). Сразу же отметим, что гейзенберговские операторы, взятые в одинаковые моменты времени, удовлетворяют тем же правилам коммутации, что и операторы в шредингеровском представлении или в представлении взаимодействия. Действительно, имеем, например,

$$\{\widehat{\psi}_i(t, \mathbf{r}), \widehat{\overline{\psi}}_k(t, \mathbf{r}')\}_+ = \\ = \exp(i\widehat{H}t)\{\widehat{\psi}_i(\mathbf{r}), \widehat{\overline{\psi}}_k(\mathbf{r}')\}_+ \exp(-i\widehat{H}t) = \gamma^0_{ik}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \qquad (102.2)$$

---

[1]) В этой главе операторы с временным аргументом будут относиться к гейзенберговскому представлению, а операторы в представлении взаимодействия будем отмечать дополнительным индексом int.

(ср. (75.6)). Аналогичным образом операторы $\widehat{\psi}(t,\, \mathbf{r})$ и $\widehat{A}(t,\, \mathbf{r}')$ коммутативны:

$$\{\widehat{\psi}_i(t,\, \mathbf{r}),\ \widehat{A}(t,\, \mathbf{r}')\}_- = 0$$

(в различные моменты времени это уже отнюдь не так!).

«Уравнение движения», которому удовлетворяет гейзенберговский ψ-оператор, можно получить по общей формуле (13.7) (см. III):

$$-i\frac{\partial\widehat{\psi}(x)}{\partial t} = \widehat{H}\widehat{\psi}(x) - \widehat{\psi}(x)\widehat{H}. \tag{102.3}$$

Для гамильтониана шредингеровское и гейзенберговское представления тождественны, причем гамильтониан выражается одинаковым образом через операторы полей в обоих этих представлениях. В данном случае при вычислении правой стороны в (102.3) можно опустить в гамильтониане часть, зависящую только от оператора $\widehat{A}(x)$ (гамильтониан свободного электромагнитного поля), поскольку эта часть коммутативна с $\widehat{\psi}(x)$. Согласно (21.13) и (43.3) имеем

$$\widehat{H} = \int \widehat{\psi}^*(t,\, \mathbf{r})(\boldsymbol{\alpha}\widehat{\mathbf{p}} + \beta m)\widehat{\psi}(t,\, \mathbf{r})d^3x + {}$$

$$+ e\int \widehat{\overline{\psi}}(t,\, \mathbf{r})(\gamma\widehat{A}(t,\, \mathbf{r}))\widehat{\psi}(t,\, \mathbf{r})d^3x =$$

$$= \int \widehat{\overline{\psi}}(t,\, \mathbf{r})\{\gamma\widehat{p} + m + e(\gamma\widehat{A}(t,\, \mathbf{r}))\}\widehat{\psi}(t,\, \mathbf{r})d^3x. \tag{102.4}$$

Вычислив коммутатор $\{\widehat{H},\ \widehat{\psi}(t,\, \mathbf{r})\}_-$ с помощью (102.2) и устранив δ-функцию интегрированием по d^3x, получим

$$(\gamma\widehat{p} - e\gamma\widehat{A} - m)\widehat{\psi}(t,\, \mathbf{r}) = 0. \tag{102.5}$$

Как и следовало ожидать, оператор $\widehat{\psi}(t,\, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению, формально совпадающему с уравнением Дирака.

Уравнение же для оператора электромагнитного поля $\widehat{A}(t,\, \mathbf{r})$ очевидно из соответствия с классическим случаем. В этом случае (большие числа заполнения — см. § 5) после усреднения по состоянию поля операторное уравнение должно перейти в классическое уравнение Максвелла для потенциалов (30.2) (см. II). Поэтому ясно, что уравнение для оператора просто совпадает по форме с уравнением Максвелла, т. е. (при произвольной калибровке) имеем

$$\partial^\nu\partial_\mu\widehat{A}^\mu(x) - \partial^\mu\partial_\nu\widehat{A}^\nu(x) = -4\pi e\widehat{j}^\nu(x), \tag{102.6}$$

где $\widehat{j}^\nu(x) = \widehat{\overline{\psi}}(x)\gamma^\nu\widehat{\psi}(x)$ — оператор тока, тождественно удовлетворяющий уравнению непрерывности

$$\partial_\nu\widehat{j}^\nu(x) = 0. \tag{102.7}$$

Существенно, что уравнения (102.6) линейны по $\widehat{A}^{\mu}$ и $\widehat{j}^{\mu}$, и потому не возникает вопрос о порядке следования этих операторов.

Как и аналогичные уравнения для волновых функций, система операторных уравнений (102.6),(102.7) инвариантна относительно калибровочного преобразования

$$\begin{gathered}\widehat{A}^{\mu}(x) \to \widehat{A}_{\mu}(x) - \partial_{\mu}\widehat{\chi}(x), \quad \widehat{\psi}(x) \to \widehat{\psi}(x)\exp(ie\widehat{\chi}), \\ \widehat{\overline{\psi}}(x) \to \exp(-ie\widehat{\chi})\widehat{\overline{\psi}}(x),\end{gathered} \tag{102.8}$$

где $\widehat{\chi}(x)$ — произвольный эрмитов оператор, коммутирующий (в один и тот же момент времени) с $\widehat{\psi}$ [1]).

Установим теперь связь между операторами в гейзенберговском представлении и в представлении взаимодействия. Для упрощения рассуждений удобно сделать формальное предположение (не сказывающееся на окончательном результате), что взаимодействие $\widehat{V}(t)$ адиабатически «включается» от $t = -\infty$ к конечным временам. Тогда при $t \to -\infty$ оба представления гейзенберговское и представление взаимодействия — просто совпадают. Совпадают и соответствующие волновые функции системы Φ и Φ_{int}:

$$\Phi_{\text{int}}(t = -\infty) = \Phi. \tag{102.9}$$

С другой стороны, волновая функция в гейзенберговском представлении от времени вообще не зависит (вся временная зависимость перенесена на операторы), а в представлении взаимодействия для зависимости волновой функции от времени имеем, согласно (72.7),

$$\Phi_{\text{int}}(t) = \widehat{S}(t,\, -\infty)\Phi_{\text{int}}(-\infty), \tag{102.10}$$

где введен оператор

$$\widehat{S}(t_2,\, t_1) = \mathrm{T}\exp\left\{-i\int_{t_1}^{t_2}\widehat{V}(t')dt'\right\} \tag{102.11}$$

с очевидными свойствами

$$\widehat{S}(t,\, t_1)\widehat{S}(t_1,\, t_0) = \widehat{S}(t,\, t_0), \quad \widehat{S}^{-1}(t,\, t_1) = \widehat{S}(t_1,\, t). \tag{102.12}$$

Сравнив формулы (102.10) и (102.9), найдем соотношение

$$\Phi_{\text{int}}(t) = \widehat{S}(t,\, -\infty)\Phi, \tag{102.13}$$

[1]) Подчеркнем, что здесь идет речь именно о гейзенберговских ψ-операторах. В представлении взаимодействия калибровочное преобразование электромагнитных потенциалов вообще не затрагивает ψ-операторов.

устанавливающее связь между волновыми функциями в обоих представлениях. Соответственно формула преобразования операторов:

$$\widehat{\psi}(t, \mathbf{r}) = \widehat{S}^{-1}(t, -\infty)\widehat{\psi}_{\text{int}}(t, \mathbf{r})\widehat{S}(t, -\infty) = \\ = \widehat{S}(-\infty, t)\widehat{\psi}_{\text{int}}(t, \mathbf{r})\widehat{S}(t, -\infty) \quad (102.14)$$

(то же самое для $\widehat{\overline{\psi}}$ и $\widehat{A}$).

Сделаем в заключение еще одно общее замечание. Мы уже неоднократно указывали, что в релятивистской квантовой теории физический смысл операторов поля весьма ограничен из-за бесконечности нулевых флуктуаций. Это тем более относится к операторам в гейзенберговском представлении, которые фактически содержат в себе еще и расходимости, связанные с взаимодействием. В этой главе § 102,109 посвящены изложению формальной теории, в которой вопросы устранения этих бесконечностей не обсуждаются и действия со всеми величинами производятся так, как если бы они были конечными. Получаемые таким образом результаты имеют преимущественно эвристическую ценность: они позволяют более глубоко уяснить смысл разложений теории возмущений; возможно также, что они сохранятся в каком-то виде и в будущей теории, свободной от нынешних затруднений.

§ 103. Точный фотонный пропагатор

Основную роль в аппарате точной (без разложений по степеням e^2) теории играют понятия о точных пропагаторах [1].

Точный фотонный пропагатор (который мы будем обозначать рукописной латинской буквой $\mathcal{D}$) определяется формулой

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0|\mathrm{T}A_\mu(x)A_\nu(x')|0\rangle, \quad (103.1)$$

где $\widehat{A}_\mu(x)$ — гейзенберговские операторы, в отличие от определения (76.1):

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0|\mathrm{T}A_\mu^{\text{int}}(x)A_\nu^{\text{int}}(x')|0\rangle, \quad (103.2)$$

в котором фигурировали операторы в представлении взаимодействия. В отличие от точного пропагатора (103.1), функцию (103.2) можно назвать *пропагатором свободных фотонов.*

Ввиду невозможности точного вычисления среднего значения (103.1) нельзя получить точное аналитическое выражение для $\mathcal{D}_{\mu\nu}$, хотя определение (103.1) и позволяет установить некоторые

[1]) Эти понятия были введены *Дайсоном* (*F. Dyson,* 1949); им же в основном построен весь излагаемый в этой главе аппарат.

общие свойства этой функции. Этому будет посвящен § 111, а пока мы займемся вычислением $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ по теории возмущений с помощью диаграммной техники. Для этого надо выразить $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ через операторы в представлении взаимодействия.

Пусть сначала $t > t'$. Используя связь между $\widehat{A}(x)$ и $\widehat{A}_{\text{int}}(x)$ (ср. (102.14)), пишем

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(x')|0\rangle =$$
$$= i\langle 0|S(-\infty,\, t)A_\mu^{\text{int}}(x)S(t,\, -\infty)S(-\infty,\, t')A_\nu^{\text{int}}(x')S(t',\, -\infty)|0\rangle.$$

Согласно (102.12) заменяем

$$\widehat{S}(t,\, -\infty)\widehat{S}(-\infty,\, t') = \widehat{S}(t,\, t')$$
$$\widehat{S}(-\infty,\, t) = \widehat{S}(-\infty,\, +\infty)\widehat{S}(\infty,\, t).$$

Тогда

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') =$$
$$= i\langle 0|S^{-1}[S(\infty,\, t)A_\mu^{\text{int}}(x)S(t,\, t')A_\nu^{\text{int}}(x')S(t',\, -\infty)|0\rangle, \quad (103.3)$$

где для краткости обозначено

$$\widehat{S} \equiv \widehat{S}(+\infty,\, -\infty). \quad (103.4)$$

Поскольку по определению (102.11) $\widehat{S}(t_2,\, t_1)$ содержит только операторы в моменты времени между t_1 и t_2, расположенные в хронологическом порядке, то очевидно, что вообще все операторные множители в квадратных скобках в (103.3) расположены в порядке убывания времен слева направо. Поставив перед скобкой символ хронологизации T, мы можем затем произвольно переставлять порядок множителей, так как оператор T автоматически устанавливает их в нужном порядке. Воспользовавшись этим, перепишем выражение в скобках в виде

$$[\ldots] = \mathrm{T}[\widehat{A}_\mu^{\text{int}}(x)\widehat{A}_\nu^{\text{int}}(x')\widehat{S}(\infty,\, t)\widehat{S}(t,\, t')\widehat{S}(t',\, -\infty)] =$$
$$= \mathrm{T}[\widehat{A}_\mu^{\text{int}}(x)\widehat{A}_\nu^{\text{int}}(x')\widehat{S}].$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0|S^{-1}\mathrm{T}[A_\mu^{\text{int}}(x)A_\nu^{\text{int}}(x')S]|0\rangle. \quad (103.5)$$

Легко убедиться аналогичным образом, что эта формула верна и при $t < t'$.

Покажем теперь, что множитель $\widehat{S}^{-1}$ можно вынести из-под знака усреднения по вакууму в виде некоторого фазового множителя. Для этого вспомним, что гейзенберговская волновая функция вакуума Φ совпадает со значением $\Phi_{\text{int}}(-\infty)$ волновой функции этого же состояния в представлении взаимодействия (см. (103.9)). Согласно же (72.8) имеем

$$\widehat{S}\Phi_{\text{int}}(-\infty) \equiv \widehat{S}(+\infty,\, -\infty)\Phi_{\text{int}}(-\infty) = \Phi_{\text{int}}(+\infty).$$

Но вакуум представляет собой строго стационарное состояние; в нем невозможны никакие самопроизвольные процессы рождения частиц. Другими словами, с течением времени вакуум остается вакуумом; это означает, что $\Phi_{\text{int}}(+\infty)$ может отличаться от $\Phi_{\text{int}}(-\infty)$ лишь некоторым фазовым множителем $e^{i\alpha}$. Поэтому

$$\widehat{S}\Phi_{\text{int}}(-\infty) = e^{i\alpha}\Phi_{\text{int}}(-\infty) = \langle 0|S|0\rangle\Phi_{\text{int}}(-\infty). \tag{103.6}$$

Произведя комплексное сопряжение и учтя унитарность оператора $\widehat{S}$, получим

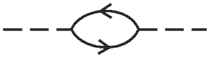
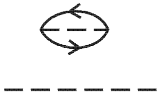
$$\Phi^*_{\text{int}}(-\infty)\widehat{S}^{-1} = \langle 0|S|0\rangle^{-1}\Phi^*_{\text{int}}(-\infty).$$

Отсюда ясно, что выражение (103.5) может быть переписано в виде

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\frac{\langle 0|\mathrm{T}A^{\text{int}}_{\mu}(x)A^{\text{int}}_{\nu}(x')S|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}. \tag{103.7}$$

Подставив сюда (в числитель и знаменатель) разложение (72.10) для $\widehat{S}$ и произведя усреднение с помощью теоремы Вика (см. § 77), мы получим разложение $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ по степеням e^2.

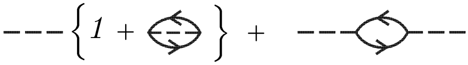
В числителе (103.7) усредняемые выражения отличаются от матричных элементов типа (77.1), рассматривавшегося в § 77, лишь тем, что вместо «внешних» операторов рождения или уничтожения фотонов в них стоят операторы $\widehat{A}^{\text{int}}_{\mu}(x)$ и $\widehat{A}^{\text{int}}_{\nu}(x')$. Поскольку все множители в усредняемых произведениях, стоят под знаком хронологизации, попарные свертки этих операторов с «внутренними» операторами $\widehat{A}^{\text{int}}(x1)$, $\widehat{A}^{\text{int}}(x_2)$, ... будут давать фотонные пропагаторы $D_{\mu\nu}$. Таким образом, результаты усреднения выразятся совокупностями диаграмм с двумя внешними концами, составляемых по описанным в § 77 правилам, с той лишь разницей, что внешним (как и внутренним) фотонным линиям диаграммы будут отвечать теперь пропагаторы $D_{\mu\nu}$ (вместо амплитуд e реальных фотонов). В нулевом приближении при $\widehat{S} = 1$ числитель выражения (103.7) совпадает просто с $D_{\mu\nu}(x-x')$. Следующие отличные от нуля члены будут $\sim e^2$. Они изобразятся совокупностью диаграмм, содержащих два внешних конца и две вершины:

 +  (103.8)

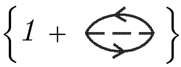
а *б*

Вторая из этих диаграмм состоит из двух не связанных между собой частей: штриховой линии (которой отвечает $-iD_{\mu\nu}$) и

замкнутой петли. Такое распадение диаграммы означает распадение соответствующего ему аналитического выражения на два независимых множителя. Прибавив к диаграммам (103.8) диаграмму (штриховую линию) нулевого приближения и «вынеся ее за скобку», найдем в результате, что с точностью до членов второго порядка числитель в (103.7) равен



Выражение же $\langle 0|S|0\rangle$ в знаменателе (103.7) представляет собой амплитуду «перехода» из вакуума в вакуум. Его разложение содержит поэтому лишь диаграммы без внешних концов. В нулевом приближении $\langle 0|S|0\rangle = 1$, а с точностью до членов второго порядка получим



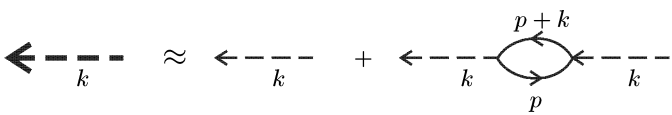
Разделив с той же точностью числитель на знаменатель, найдем, что фигурная скобка сокращается и остается



Таким образом, диаграмма с отсоединенной петлей выпадает из ответа. Этот результат имеет общий характер. Вдумавшись в способ построения диаграмм, отвечающих числителю и знаменателю в (103.7), нетрудно понять, что роль знаменателя $\langle 0|S|0\rangle$ сводится к тому, что в любом порядке теории возмущений точный пропагатор $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ будет изображаться лишь диаграммами, не содержащими отделенных друг от друга частей.

Заметим, что диаграммы без внешних концов (замкнутые петли) вообще не имеют физического смысла и их не следует учитывать даже независимо от того, что они выпадают при образовании пропагатора $\mathcal{D}$. Действительно такие петли представляют собой радиационные поправки к диагональному элементу S-матрицы для перехода вакуум — вакуум. Но согласно (103.6) сумма всех этих петель (вместе с единицей нулевого приближения) дает лишь несущественный фазовый множитель, который не может отразиться ни на каких физических результатах.

Переход от координатного к импульсному представлению происходит обычным образом. Так, во втором приближении теории возмущений пропагатор $-i\mathcal{D}_{\mu\nu}(k)$ (который мы будем изображать жирной штриховой линией) дается суммой



(103.9)

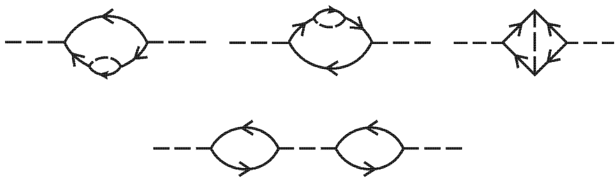
где все диаграммы вычисляются по обычным правилам (перечисленным в § 77), с той лишь разницей, что внешним фотонным линиям, как и внутренним, тоже сопоставляются множители $-iD_{\mu\nu}(k)$.

Аналитическая запись этой формулы дает поэтому [1])

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k) + ie^2 D_{\mu\lambda}(k) \int \operatorname{Sp} \gamma^\lambda G(p+k)\gamma^\rho G(p) \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D_{\rho\nu}(k) \tag{103.10}$$

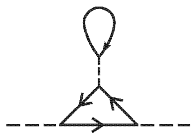
(биспинорные индексы у матриц γ и G, как обычно, не выписываем).

Члены следующих приближений строятся аналогичным образом; они изображаются совокупностями диаграмм с двумя внешними фотонными концами и нужным числом вершин. Так, членам $\sim e^4$ отвечают следующие диаграммы с четырьмя вершинами:



(103.11)

Четырьмя вершинами обладает также и диаграмма



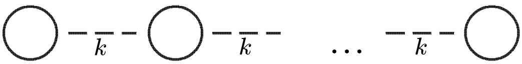
верхнюю часть которой составляет петля, образованная одной «замкнутой на себя» электронной линией. Такая петля отвечает свертке $\widehat{\overline{\psi}}(x)\gamma\widehat{\psi}(x)$, т. е. просто среднему по вакууму значению тока: $\langle 0|j(x)|0\rangle$. Но уже по самому определению вакуума эта величина должна тождественно обращаться в нуль, и это тождество не может, разумеется, быть изменено никакими дальнейшими радиационными поправками к такой петле [2]). Поэтому вообще никакие диаграммы «с замкнутыми на себя» электронными линиями не должны учитываться ни в каком приближении.

Часть диаграммы («блок»), заключенную между двумя фотонными линиями (внешними или внутренними), называют вооб-

[1]) При определении знаков не забыть о множителе -1, привносимом замкнутой электронной петлей!

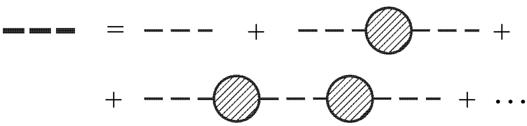
[2]) Хотя прямое вычисление по диаграммам и привело бы к расходящимся интегралам.

ще *фотонной собственно-энергетической частью.* В общем случае такой блок еще сам может быть разделен на части, соединенные попарно одной фотонной линией, т. е. имеет структуру вида



где кружки обозначают блоки, которые уже нельзя разделить дальше таким способом; эти части называют *компактными* (например, из четырех собственно-энергетических частей четвертого порядка (103.11) компактны первые три).

Обозначим символом $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/(4\pi)$ сумму всех (бесконечного множества) компактных собственно-энергетических частей; функцию $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ называют *поляризационным оператором.* Классифицируя диаграммы по числу содержащихся в них компактных частей, можно представить точный пропагатор $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ в виде ряда



где каждому заштрихованному кружку сопоставляется $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$. Аналитически этот ряд запишется в виде

$$\mathcal{D} = D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + \ldots = \\ = D\left\{1 + \frac{\mathcal{P}}{4\pi}\left[D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + \ldots\right]\right\} \qquad (103.12)$$

(тензорные индексы для краткости опущены). Но ряд в квадратных скобках вновь совпадает с рядом для $\mathcal{D}$. Поэтому имеем

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k) + D_{\mu\lambda}(k)\frac{\mathcal{P}^{\lambda\rho}(k)}{4\pi}\mathcal{D}_{\rho\nu}(k). \qquad (103.13)$$

Умножив это равенство слева на обратный тензор $(D^{-1})^{\tau\mu}$ и справа на $(\mathcal{D}^{-1})^{\nu\sigma}$ (и изменив обозначения индексов), получим его в эквивалентном виде:

$$\mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu} = D^{-1}_{\mu\nu} - \frac{\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi}. \qquad (103.14)$$

Подчеркнем, что представление $\mathcal{D}$ в виде (103.12) подразумевает, что из диаграмм можно выделить более простые блоки, которые вычисляются по общим правилам диаграммной техники. Комбинируя такие блоки друг с другом, мы получим правильные выражения для диаграмм в целом. Допустимость такого разделения составляет важную и отнюдь не тривиальную) особенность

диаграммной техники. Она связана с тем, что общий числовой коэффициент в диаграмме не зависит от ее порядка.

Это же свойство позволяет использовать функцию $\mathcal{D}$ (если она известна) для упрощения вычислений радиационных поправок к амплитудам различных процессов рассеяния: вместо того, чтобы рассматривать каждый раз заново диаграммы с различными поправками к внутренним фотонным линиям, мы можем просто заменить эти линии жирными, т. е. сопоставить им пропагаторы $\mathcal{D}$ (вместо D), взяв их в требуемом приближении.

Если фотонная линия отвечает реальному (а не виртуальному) фотону, т. е. если она является внешним концом диаграммы в целом, то после введения в нее всех собственно-энергетических поправок мы получим, как говорят, *эффективную внешнюю линию.* Ей отвечает выражение, отличающееся от (103.13) заменой множителя D поляризационной амплитудой реального фотона:

$$e_\mu + \mathcal{D}_{\mu\rho}(k)\frac{\mathcal{P}^{\rho\lambda}(k)}{4\pi}e_\lambda. \tag{103.15}$$

Если же речь идет о линии внешнего поля, то вместо e_μ здесь надо писать $A_\mu^{(e)}$.

Все сказанное в § 76 относительно тензорной структуры и калибровочной неоднозначности приближенного пропагатора $D_{\mu\nu}$ относится и к точной функции $\mathcal{D}_{\mu\nu}$. Оставаясь в рамках релятивистски инвариантных представлений этой функции, напишем ее общий вид в форме

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \mathcal{D}(k^2)\Big(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big) + \mathcal{D}^{(l)}(k^2)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}; \tag{103.16}$$

первый член отвечает калибровке Ландау, а во втором члене $\mathcal{D}^{(l)}$ — калибровочно-произвольная функция. Аналогичное представление приближенного пропагатора [1]:

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2)\Big(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big) + D^{(l)}(k^2)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{103.17}$$

Заметим теперь, что продольная часть пропагатора связана с не имеющей физического смысла продольной частью 4-потенциала и не участвует во взаимодействии. Поэтому взаимодействие не меняет ее, так что должно быть

$$\mathcal{D}^{(l)}(k^2) = D^{(l)}(k^2). \tag{103.18}$$

Обратные тензоры, по определению, удовлетворяют равенствам

$$\mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu}\mathcal{D}^{\lambda\nu} = \delta^\lambda_\mu, \quad D^{-1}_{\mu\nu}D^{\lambda\nu} = \delta^\lambda_\mu.$$

[1]) Определение $D^{(l)}$ в этой формуле не совпадает с определением в (76.3).

Для прямых тензоров (103.16) и (103.17) обратные тензоры с учетом (103.18) имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{\mathcal{D}}\Big(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big) + \frac{1}{\mathcal{D}^{(l)}}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2},\\ D^{-1}_{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{D}\Big(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big) + \frac{1}{D^{(l)}}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}.\end{aligned} \qquad (103.19)$$

Из этих формул следует, что поляризационный оператор представляет собой поперечный тензор:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \mathcal{P}(k^2)\Big(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big), \qquad (103.20)$$

причем $\mathcal{P} = k^2 - 4\pi/\mathcal{D}$ или

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2[1 - \mathcal{P}(k^2)/k^2]}. \qquad (103.21)$$

Таким образом, поляризационный оператор является (в отличие от самого фотонного пропагатора) калибровочно-инвариантной величиной.

§ 104. Собственно-энергетическая функция фотона

Для дальнейшего исследования аналитических свойств фотонного пропагатора будет полезно ввести, наряду с поляризационным оператором, еще одну вспомогательную функцию $\Pi_{\mu\nu}(k)$, которую называют *собственно-энергетической функцией фотона*. Именно, $i\Pi_{\mu\nu}/(4\pi)$ определяется как сумма всех вообще (а не только компактных) собственно-энергетических фотонных частей. Изобразив эту сумму квадратиком на диаграмме, представим точный пропагатор суммой



т. е.

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + D_{\mu\lambda}\frac{\Pi^{\lambda\rho}}{4\pi}D_{\rho\nu}. \qquad (104.1)$$

Выразив отсюда $\Pi_{\mu\nu}$ в виде

$$\frac{1}{4\pi}\Pi_{\mu\nu} = D^{-1}_{\mu\lambda}\mathcal{D}^{\lambda\rho}D^{-1}_{\rho\nu} - D^{-1}_{\mu\nu}$$

и подставив в это равенство (103.16), (103.19) и затем (103.21), получим

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi(k^2)\Big(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\Big), \quad \Pi = \frac{\mathcal{P}}{1 - \mathcal{P}/k^2}. \qquad (104.2)$$

Мы видим, что $\Pi_{\mu\nu}$ (как и $\mathcal{P}_{\mu\nu}$) — калибровочно-инвариантный тензор.

Полезность величины $\Pi_{\mu\nu}$ связана с ее выражением в координатном представлении. Его легко найти, заметив, что равенство

$$\frac{1}{4\pi}\Pi_{\mu\nu}(k) = D^{-1}_{\mu\lambda}D^{-1}_{\rho\nu}\{\mathcal{D}^{\lambda\rho}(k) - D^{\lambda\rho}(k)\},$$

с учетом следующей из (103.18) поперечности тензора $\mathcal{D}^{\lambda\rho} - D^{\lambda\rho}$, в координатном представления можно написать в виде

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x') = \\ = \frac{1}{4\pi}(\partial_\mu\partial_\lambda - g_{\mu\lambda}\partial_\sigma\partial^\sigma)(\partial'_\nu\partial'_\rho - g_{\nu\rho}\partial'_\sigma\partial'^\sigma)\{\mathcal{D}^{\lambda\rho}(x-x') - D^{\lambda\rho}(x-x')\}.$$

Для осуществления дифференцирования сюда надо подставить

$$\mathcal{D}^{\lambda\rho}(x-x') - D^{\lambda\rho}(x-x') = \\ = i\langle|\mathrm{T}A^\lambda(x)A^\rho(x') - \mathrm{T}A^\lambda_{\mathrm{int}}(x)A^\rho_{\mathrm{int}}(x')|0\rangle. \quad (104.3)$$

Мы видели в § 75, что дифференцирование Т-произведения требует, вообще говоря, осторожности ввиду его разрывного характера. Но усредняемая в (104.3) разность непрерывна вместе со своими первыми производными, так как правила коммутации для компонент операторов $\widehat{A}^\lambda(x)$ и $\widehat{A}^\lambda_{\mathrm{int}}(x)$ (взятых в один и тот же момент времени) одинаковы и соответствующие скачки сокращаются (ср. § 75). Поэтому дифференцирование разности (104.3) можно производить под знаком Т. Согласно (102.6) (и такому же уравнению без правой части для операторов свободного электромагнитного поля $\widehat{A}^\mu_{\mathrm{int}}(x)$) получим в результате выражение

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x') = 4\pi i e^2\langle 0|\mathrm{T}j_\mu(x)j_\nu(x')|0\rangle. \quad (104.4)$$

Оно в явном виде выявляет калибровочную инвариантность $\Pi_{\mu\nu}$, поскольку таковы операторы тока.

Из (104.4) можно получить важное интегральное представление этой функции.

Ввиду (104.2) достаточно рассмотреть скалярную функцию $\Pi = \Pi^\mu_\mu/3$. В координатном представлении

$$\Pi(x-x') = \frac{4\pi}{3}ie^2\langle 0|\mathrm{T}j_\mu(x)j^\mu(x')|0\rangle = \\ = \frac{4\pi}{3}ie^2\begin{cases}\sum\limits_n\langle 0|j_\mu(x)|n\rangle\langle n|j^\mu(x')|0\rangle, & t>t',\\ \sum\limits_n\langle 0|j_\mu(x')|n\rangle\langle n|j^\mu(x)|0\rangle, & t<t',\end{cases} \quad (104.5)$$

где символ n нумерует состояния системы «электромагнитное + + электрон-позитронное поля» [1]). Так как оператор тока $\widehat{j}(x)$ зависит от $x^\mu = (t,\ \mathbf{r})$, зависят от x также и его матричные элементы. Эту зависимость можно установить в явном виде, если выбрать в качестве состояний $|n\rangle$ состояния с определенными значениями полного 4-импульса.

Зависимость матричных элементов тока от времени, как и для всякого гейзенберговского оператора, дается выражением

$$\langle n|j^\mu(t,\,\mathbf{r})|m\rangle = \langle n|j^\mu(\mathbf{r})|m\rangle e^{-t(E_m-E_n)t},$$

где $E_n,\ E_m$ — энергии состояний $|n\rangle$ и $|m\rangle$, $\widehat{j}(\mathbf{r})$ — шредингеровский оператор.

Для определения координатной зависимости матричных элементов рассматриваем оператор $\widehat{j}(\mathbf{r})$ как результат преобразования оператора $\widehat{j}(0)$ путем параллельного переноса на расстояние $\mathbf{r}$. Оператор такого переноса есть $\exp(i\mathbf{r}\widehat{\mathbf{P}})$, где $\widehat{\mathbf{P}}$ — оператор полного импульса системы (см. III, (15.13)). Имея в виду общее правило преобразования матричных элементов (см. III, (12.7)), находим поэтому, что

$$\langle n|j^\mu(\mathbf{r})|m\rangle = \langle n|e^{-i\mathbf{r}\mathbf{P}}j^\mu(0)e^{i\mathbf{r}\mathbf{P}}|m\rangle = \langle n|j^\mu(0)|m\rangle e^{i(\mathbf{P}_m-\mathbf{P}_n)\mathbf{r}}.$$

Вместе с предыдущей формулой это дает окончательно

$$\langle n|j^\mu(t,\,\mathbf{r})|m\rangle = \langle n|j^\mu(0)|m\rangle e^{-i(\mathbf{p}_m-\mathbf{p}_n)x}. \qquad (104.6)$$

Отметим также, что матрица $\langle n|j^\mu(0)|m\rangle$ эрмитова (как и матрица (104.6) оператора $\widehat{j}^\mu(t,\,\mathbf{r})$ в целом), а в силу уравнения непрерывности (102.7) она удовлетворяет условию поперечности

$$(P_n-P_m)^\mu\langle n|j_\mu(0)|m\rangle. \qquad (104.7)$$

Вернемся к вычислению функции $\Pi(x-x')$. Подставив (104.6) в (104.5), получим

$$\Pi(\xi) = \frac{4\pi ie^2}{3}\langle 0|j_\mu(0)|n\rangle\langle n|j^\mu(0)|0\rangle e^{\mp iP_n\xi}, \quad \tau \gtrless 0, \qquad (104.8)$$

где $x-x'=\xi=(\tau,\ \boldsymbol{\xi})$. Обозначим

$$\rho(k^2) = -\frac{4\pi e^2}{3}(2\pi)^3\sum_n\langle 0|j_\mu(0)|n\rangle\langle 0|j^\mu(0)|n\rangle^*\delta^4(k-P_n). \quad (104.9)$$

[1]) Оператор тока сохраняет заряд, поэтому состояния $|n\rangle$ в (104.5) могут содержать лишь одинаковые числа электронов и позитронов.

Суммирование производится по всем системам реальных электронных пар и фотонов, которые могут быть рождены виртуальным фотоном с 4-импульсом $k = (\omega,\ \mathbf{k})$ $(\Delta > 0)$, а для каждой из таких систем — еще и по ее внутренним переменным (поляризации и импульсы частиц в системе центра инерции) [1]. В результате такого суммирования функция ρ может зависеть только от k, а ввиду ее скалярности — только от k^2. В частности, ρ не зависит от направления $\mathbf{k}$. Имея в виду эти свойства функции ρ, переписываем (104.8) в виде

$$\Pi(\xi) = -i \int\limits_0^\infty d\omega \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rho(k^2) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi} - i\omega|\tau|} =$$

$$= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \iint\limits_0^\infty d\omega d(\mu^2) \delta(\mu^2 - k^2) \rho(\mu^2) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\xi} - i\omega|\tau|}.$$

Переход к импульсному представлению осуществляется подстановкой сюда формулы

$$e^{-i\omega|\tau|} = 2i\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0\tau} \frac{1}{k_0^2 - \omega^2 + i0} \frac{dk_0}{2\pi} \tag{104.10}$$

(использованной уже в § 76) и дает

$$\Pi(k^2) = \int\limits_0^\infty d(\mu^2) \int\limits_0^\infty d(\omega^2) \delta(\mu^2 - \mathbf{k}^2 - \omega^2) \frac{\rho(\mu^2)}{k_0^2 - \omega^2 + i0},$$

или окончательно [2]

$$\Pi(k^2) = \int\limits_0^\infty \frac{\rho(\mu^2) d(\mu^2)}{k_0^2 - \omega^2 + i0}. \tag{104.11}$$

---

[1]) Такое определение состояний $|n\rangle$, очевидно, тождественно с определением их как состояний, для которых отличны от нуля матричные элементы $\langle 0|j|n\rangle$ зарядово-нечетного оператора.

[2]) Формальные вычисления, аналогичные произведенным выше, требуют осторожности ввиду наличия упоминавшихся уже расходимостей. Это приводит, в частности, к появлению в правой части (104.11) дополнительных расходящихся членов, не имеющих явно релятивистски инвариантного вида (так называемые *швингеровские члены*). Мы не выписываем их, поскольку они все равно исчезают при перенормировке (см. § 110) и не сказываются на дальнейших результатах.

Коэффициент ρ в этом интегральном представлении называют *спектральной плотностью* функции $\Pi(k^2)$. Он обладает свойствами:

$$\begin{aligned}\rho(k^2) &= 0 \text{ при } k^2 < 0,\\ \rho(k^2) &> 0 \text{ при } k^2 > 0.\end{aligned} \tag{104.12}$$

Действительно, 4-импульс k виртуального фотона, который может родить систему реальных частиц, непременно времениподобен (k^2 совпадает с квадратом полной энергии частиц в системе их центра инерции). В силу же условия поперечности (104.7) имеем

$$P_n^\mu u\langle 0|j_\mu|n\rangle = 0.$$

Но 4-вектор $\langle 0|j|n\rangle$, ортогональный времениподобному 4-вектору (P_n), пространственноподобен, т. е.

$$\langle 0|j_\mu|n\rangle\langle 0|j^\mu|n\rangle^* < 0,$$

а потому, согласно определению (104.9), $\rho > 0$.

§ 105. Точный электронный пропагатор

Подобно фотонному, точный электронный пропагатор определяется формулой

$$\mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i(x)\overline{\psi}_k(x')|0\rangle \tag{105.1}$$

(i, k — биспинорные индексы), отличающейся от определения (75.1) пропагатора свободных частиц

$$G_{ik}(x - x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i^{\mathrm{int}}(x)\overline{\psi}_k^{\mathrm{int}}(x')|0\rangle \tag{105.2}$$

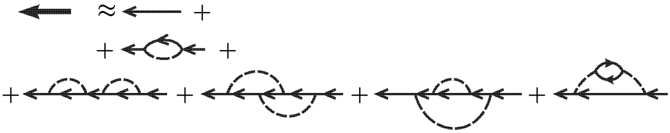
заменой ψ-операторов в представлении взаимодействия гейзенберговскими.

Те же рассуждения, что и при выводе (103.7), позволяют преобразовать $\mathcal{G}_{ik}$ к виду

$$\mathcal{G}_{ik}(x - x') = -i\frac{\langle 0|\mathrm{T}\psi_i^{\mathrm{int}}(x)\overline{\psi}_k^{\mathrm{int}}(x')S|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}. \tag{105.3}$$

Разложение этого выражения по степеням e^2 приводит к представлению $\mathcal{G}$-функции в виде совокупности диаграмм с двумя внешними электронными линиями и различным числом вершин. При этом роль знаменателя в (105.3) снова сводится к необходимости учитывать лишь диаграммы без изолированных «вакуумных петель». Так, с точностью до членов $\sim e^4$ графическое

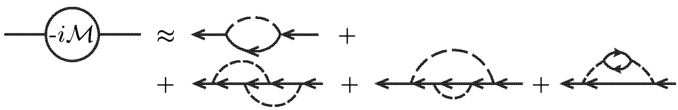
представление пропагатора $\mathcal{G}$ (жирная сплошная линия) имеет вид [1])



(105.4)

Жирной сплошной линии сопоставляется (в импульсном представлении) функция $i\mathcal{G}(p)$, а всем сплошным и штриховым линиям в диаграммах правой стороны равенства — пропагаторы свободных частиц соответственно iG и $-iD$.

Блок, заключенный между двумя электронными линиями, называют *электронной собственно-энергетической частью*. Как и в фотонном случае, такую часть называют *компактной*, если она не может быть разделена дальше на две другие собственно-энергетические части путем рассечения по одной электронной линии. Сумму всех возможных компактных частей обозначим через $-i\mathcal{M}_{ik}$, функцию $-i\mathcal{M}_{ik}(p)$ называют *массовым оператором*. Так, с точностью до членов $\sim e^4$ имеем



(105.5)

Путем суммирования, в точности аналогичного выводу (103.13), получим

$$\mathcal{G}(p) = G(p) + G(p)\mathcal{M}(p)\mathcal{G}(p) \tag{105.6}$$

(биспинорные индексы опускаем) или для обратных матриц

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = G^{-1}(p) - \mathcal{M}(p) = \gamma p - m - \mathcal{M}(p). \tag{105.7}$$

В § 102 уже было отмечено, что гейзенберговские ψ-операторы (в противоположность ψ-операторам в представлении взаимодействия) меняются в результате калибровочного преобразования электромагнитных потенциалов. Вместе с ними оказывается калибровочно-неинвариантным также и точный электронный пропагатор $\mathcal{G}$. Выясним закон его калибровочного преобразования (*Л. Д. Ландау, И. М. Халатников,* 1952).

[1]) Как уже было объяснено в § 103, не надо учитывать также и диаграммы с «замкнутыми на себя» линиями, которые появились бы здесь уже во втором порядке:



Заранее ясно, что изменение $\mathcal{G}$ при калибровочном преобразовании должно выражаться через ту же величину $D^{(l)}$, которая добавляется при этом преобразовании к фотонному пропагатору. Это станет очевидным, если заметить, что при вычислении $\mathcal{G}$ по диаграммам теории возмущений каждый член ряда выражается через функции D и никаких других электромагнитных величин в них не входит. Этим обстоятельством можно воспользоваться для упрощения выводов: можно делать любые частные предположения о свойствах произвольного оператора $\widehat{\chi}$ в преобразовании (102.8), лишь бы ответ был выражен через $D^{(l)}$.

В результате преобразования (102.8) пропагаторы $\mathcal{D}$ (103.1) и $\mathcal{G}$ (105.1) переходят в

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_{\mu\nu} \to i\langle 0|\mathrm{T}[A_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x)][A_\nu(x') - \partial'_\nu\chi(x')]|0\rangle, \\ \mathcal{G}_{ik} \to -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i(x)e^{ie\chi(x)}e^{-ie\chi(x)'}\overline{\psi}_k(x')|0\rangle.\end{gathered} \tag{105.8}$$

Будем считать теперь, что операторы $\widehat{\chi}$, усредняются независимо от всех остальных операторных множителей в T-произведении; это предположение вполне естественно, поскольку в силу калибровочной инвариантности «поле» $\widehat{\chi}$, не принимает никакого участия во взаимодействии. Положим также, что обращается в нуль среднее по вакууму от самого оператора $\widehat{\chi}$: $\langle 0|\chi|0\rangle = 0$. Тогда в (105.8) члены, содержащие $\widehat{\chi}$, отделяются и получается

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \to \mathcal{D}_{\mu\nu} + i\langle 0|\mathrm{T}[A_\mu - \partial_\mu\chi(x)\cdot\partial'_\nu\chi(x')]|0\rangle, \tag{105.9}$$

$$\mathcal{G}_{ik} \to \mathcal{G}_{ik}\langle 0|\mathrm{T}e^{ie\chi(x)}e^{-ie\chi(x')}|0\rangle. \tag{105.10}$$

Дальнейший вывод произведем для бесконечно малого преобразования; чтобы подчеркнуть эту малость, будем писать $\delta\widehat{\chi}$ вместо $\widehat{\chi}$

Преобразование (105.9) можно (независимо от малости $\delta\widehat{\chi}$) записать в виде [1])

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \to \mathcal{D}_{\mu\nu} + \delta\mathcal{D}_{\mu\nu},\ \delta\mathcal{D}_{\mu\nu} = \partial_\mu\partial'_\nu d^{(l)}(x - x'), \tag{105.11}$$

где

$$d^{(l)}(x - x') = i\langle 0|\mathrm{T}\delta\chi(x)\delta\chi(x')|0\rangle. \tag{105.12}$$

Отсюда видно, что функция $d^{(l)}$ определяет изменение при калибровочном преобразовании продольной части фотонного пропагатора $\mathcal{D}^{(l)}$. Предположение о зависимости этой функции только

[1]) Переход от (105.9) к (105.11) возможен, если функция $d^{(l)}$ и ее производная по t непрерывны при $t = t'$. В противном случае правые части этих выражений отличались бы δ-функционными членами (ср. вывод формулы (75.2)). В импульсном представлении это условие эквивалентно предположению о том, что $d^{(l)}(q)$ убывает при $|q^2| \to \infty$ быстрее, чем $1/q^2$.

от разности $x - x'$ означает, конечно, определенное ограничение на свойства оператора $\delta\widehat{\chi}$; в общем случае вполне произвольного калибровочного преобразования пространственно-временная однородность пропагатора может нарушиться.

В преобразовании же (105.11) разлагаем экспоненциальные множители по степеням $\delta\widehat{\chi}$ с точностью до квадратичных членов:

$$\langle 0|\mathrm{T}e^{ie\delta\chi(x)}e^{-ie\delta\chi(x')}|0\rangle \approx$$
$$\approx -\frac{1}{2}e^2\langle 0|\delta\chi^2(x) + \delta\chi^2(x') - 2\mathrm{T}\delta\chi(x)\delta\chi(x')|0\rangle.$$

С учетом определения (105.12) находим, таким образом, следующий закон преобразования электронного пропагатора:

$$\mathcal{G} \to \mathcal{G} + \delta\mathcal{G},\ \ \delta\mathcal{G} = ie^2\mathcal{G}(x - x')[d^{(l)}(0) - d^{(l)}(x - x')]. \quad (105.13)$$

В импульсном представлении [1])

$$\delta\mathcal{G}(p) = ie^2\int d^{(l)}(q)[\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p - q)]\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \quad (105.14)$$

При этом функция $d^{(l)}(q)$ связана с изменением функции $\mathcal{D}^{(l)}(q)$

$$\delta\mathcal{D}^{(l)}(q) = q^2 d^{(l)}(q). \quad (105.15)$$

Для электронного пропагатора можно было бы получить интегральное представление, аналогичное формуле (104.11). Его вывод основан на выражениях

$$\psi_{nm}(x) = \psi_{nm}(0)e^{-i(P_m - P_n)x} \quad (105.16)$$

для матричных элементов ψ-оператора, подобных использованным в § 104 выражениям (104.6) для матричных элементов тока. В противоположность току, однако, сами ψ-операторы калибровочно-неинвариантны. Поэтому и координатная зависимость вида (105.16) не имеет общего характера, а относится лишь к некоторой определенной калибровке. Тем самым относится лишь к

---

[1]) Если функция $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, то ее компоненты Фурье

$$f(p) = \int f(x)e^{ipx}d^4x =$$
$$= \iiint d^4x\frac{d^4q_1d^4q_2}{(2\pi)^8}e^{ix(p-q_1-q_2)}f_1(q_1)f_2(q_2) =$$
$$= \iint \frac{d^4q_1d^4q_2}{(2\pi)^4}\delta^4(p - q_1 - q_2)f_1(q_1)f_2(q_2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}f_1(q)f_2(p - q).$$

При переходе от (105.13) к (105.14) учтено также, что

$$f(x = 0) = \int f(q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

определенной калибровке и основанное на (105.16) интегральное представление пропагатора. Более глубокая физическая причина этой ситуации состоит в том, что равенство нулю массы фотона приводит к инфракрасной катастрофе (см. § 98). Вследствие этого электрон в процессе взаимодействия испускает бесконечное число мягких квантов, что в значительной степени лишает прямого смысла «одночастичный» пропагатор (105.1).

§ 106. Вершинный оператор

В сложных диаграммах можно выделить, наряду с собственно-энергетическими частями, также и не сводящиеся к ним блоки другого вида. К важной категории таких блоков мы придем, рассмотрев функцию

$$K^{\mu}_{ik}(x_1,\, x_2,\, x_3) = \langle 0|\mathrm{T}A^{\mu}(x_1)\psi_i(x_2)\overline{\psi}_k(x_3)|0\rangle \tag{106.1}$$

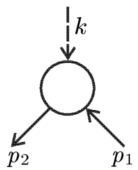
с одним 4-векторным и двумя биспинорными индексами; в силу однородности пространства-времени она зависит лишь от разностей аргументов x_1, x_2, x_3. Выраженная через операторы в представлении взаимодействия, функция K имеет вид

$$K^{\mu}_{ik}(x_1,\, x_2,\, x_3) = \frac{\langle 0|\mathrm{T}A^{\mu}_{\mathrm{int}}(x_1)\psi^{\mathrm{int}}_i(x_2)\overline{\psi}^{\mathrm{int}}_k(x_3)|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}. \tag{106.2}$$

Переход к импульсному представлению осуществляется формулой

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1+k-p_2)K^{\mu}_{ik}(p_2,\, p_1;\, k) = \\ = \iiint K^{\mu}_{ik}(x_1,\, x_2,\, x_3)e^{-ikx_1+ip_2x_2-ip_1x_3}d^4x_1d^4x_2d^4x_3. \tag{106.3}$$

В диаграммной технике функциям K^{μ}_{ik} соответствуют блоки (*треххвостки*) вида



(106.4)

с тремя (одним фотонным и двумя электронными) концами, импульсы которых связаны законом сохранения

$$p_1 + k = p_2. \tag{106.5}$$

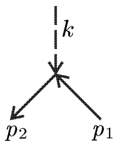
Член нулевого порядка в разложении этой функции обращается в нуль, а член первого порядка в координатном представлении

$$K^\mu(x_1, x_2, x_3) = e\int G(x_2 - x)\gamma_\nu G(x - x_3)\cdot D^{\nu\mu}(x_1 - x)d^4x$$

или в импульсном представлении

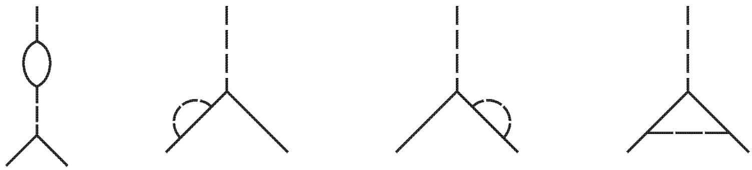
$$K^\mu(p_2, p_1; k) = eG(p_2)\gamma_\nu G(p_1)\cdot D^{\nu\mu}(k) \qquad (106.6)$$

(биспинорные индексы опущены); соответствующая диаграмма:



(106.7)

При переходе к следующим приближениям диаграммы усложняются за счет добавления новых вершин. Не все такие диаграммы, однако, дают нечто существенно новое. Так, в третьем порядке возникают диаграммы



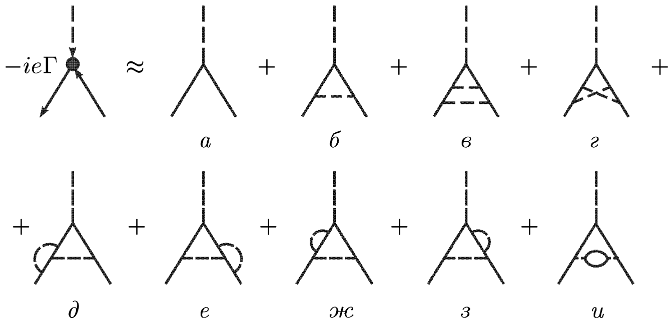
(106.8)

Первые три можно рассечь (по одной фотонной или электронной линии) на простую вершину (106.7) и собственно-энергетическую часть второго порядка; для четвертой диаграммы такое разбиение невозможно. Эта ситуация имеет общий характер. Поправки первого рода приведут просто к замене в (106.6) множителей G и D точными пропагаторами $\mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$. Остальные же члены разложения в сумме дадут новую величину, которая заменит в (106.6) множитель γ^μ. Обозначив эту величину через Γ^μ, получим, таким образом, по определению

$$K^\mu(p_2, p_1; k) = \{i\mathcal{G}(p_2)[-ie\Gamma_\nu(p_2, p_1; k)]i\mathcal{G}(p_1)\}[-i\mathcal{D}^{\nu\mu}(k)]. \qquad (106.9)$$

Блок, соединенный с другими частями диаграммы одной фотонной и двумя электронными линиями, называют *вершинной частью,* если этот блок нельзя разделить на части, соединенные между собой лишь одной (электронной или фотонной) линией. Величина Γ^μ представляет собой сумму всего (бесконечного) множества вершинных частей, включая простую вершину γ^μ ее называют *вершинным оператором,* или *вершинной функцией.*

Приведем все диаграммы вершинного оператора с точностью до величин пятого порядка:



(106.10)

(точный вершинный оператор $-ie\Gamma$ здесь обозначен черной точкой).

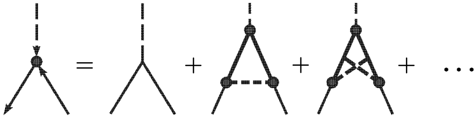
Оператор Γ (как и оператор у простой вершины) имеет два матричных (биспинорных) и один 4-векторный индекс; он является функцией двух электронных (p_1, p_2) и одного фотонного (k) импульсов. При этом все три импульса не могут одновременно относиться к реальным частицам: диаграмма (106.4) сама по себе (не как часть более сложной диаграммы) отвечала бы поглощению фотона свободным электроном, но такой процесс несовместим с законом сохранения 4-импульса реальных частиц. Поэтому хотя бы один из трех концов диаграммы должен относиться к виртуальной частице (или к внешнему полю).

Вершинные части можно разделить еще на две категории: *неприводимые* и *приводимые*. Неприводимыми называют те из них, которые не содержат в себе собственно-энергетических поправок к внутренним линиям и в которых нельзя выделить частей, представляющих собой поправки (более низкого порядка) к внутренним вершинам. Так, из диаграмм (106.10) неприводимы лишь *б*) и *г*) (не считая простой вершины *а*)). Диаграммы *ж*), *з*), *и*) содержат собственно-энергетические части; в диаграмме *в*) верхнюю горизонтальную штриховую линию можно рассматривать как поправку к верхней вершине, а боковые штриховые в диаграммах *д*) и *е*) — как поправки к боковым вершинам.

Заменив в неприводимых диаграммах внутренние линии такими же жирными линиями, а вершины — черными точками (т. е. заменив приближенные пропагаторы D, G точными $\mathcal{D}$, $\mathcal{G}$, а приближенные вершинные операторы γ — точными Γ [1]), мы получим, очевидно, совокупность всех вообще вершинных частей.

[1]) Получающиеся таким образом диаграммы называют *скелетными*.

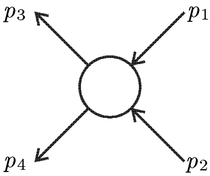
Таким образом, разложение вершинного оператора имеет вид



(106.11)

Это равенство представляет собой по отношению к Γ интегральное уравнение с бесконечным числом членов в правой его части.

Из изложенного ясен общий принцип составления точных выражений из диаграммных блоков с любым числом концов. Они строятся как средние по вакууму от Т-произведений гейзенберговских операторов: по одному оператору $\widehat{\psi}(x)$ на каждый конечный электрон, $\widehat{\overline{\psi}}(x)$ на каждый начальный электрон и $\widehat{A}(x)$ на каждый фотон. Приведем еще один пример: диаграммы вида



(106.12)

с четырьмя электронными концами («электронная четыреххвостка»). Мы придем к таким диаграммам, рассмотрев функцию

$$K_{ik,lm}(x_1,\, x_2;\, x_3,\, x_4) = \langle 0|\mathrm{T}\psi_i(x_1)\psi_k(x_2)\overline{\psi}_l(x_3)\overline{\psi}_m(x_4)|0\rangle \tag{106.13}$$

(зависящую, конечно, лишь от разностей четырех аргументов). Ее компоненты Фурье можно представить в виде

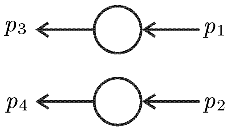
$$\int K_{ik,lm}(x_1,\, x_2;\, x_3,\, x_4)e^{i(p_3x_1+p_4x_2-p_1x_3-p_2x_4)}d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4 =$$
$$= (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)K_{ik,lm}(p_3,\, p_4;\, p_1,\, p_2), \tag{106.14}$$

причем

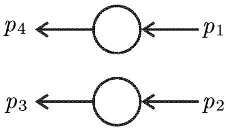
$$K_{ik,lm}(p_3,\, p_4;\, p_1,\, p_2) =$$
$$=(2\pi)^{(4)}[\delta^{(4)}(p_1-p_3)\mathcal{G}_{il}(p_1)\mathcal{G}_{km}(p_2)-\delta^{(4)}(p_2-p_3)\mathcal{G}_{im}(p_1)\mathcal{G}_{kl}(p_2)] +$$
$$+\mathcal{G}_{in}(p_3)\mathcal{G}_{kr}(p_4)[-i\Gamma_{nr,\,st}(p_3,\, p_4;\, p_1,\, p_2)]\mathcal{G}_{sl}(p_1)\mathcal{G}_{tm}(p_2). \tag{106.15}$$

В выражении (106.15) первые два члена исключают из определения функции $\Gamma(p_3,\, p_4;\, p_1,\, p_2)$ диаграммы, распадающиеся на две не связанные между собой части с двумя внешними концами

каждая:



или



В третьем же члене множители $\mathcal{G}$ исключают из определения Г те части диаграммы, которые представляют собой поправки к внешним электронным линиям.

Отметим также, что по свойствам Т-произведения фермиевских ψ-операторов функции $\Gamma(p_3, p_4; p_1, p_2)$ обладают свойствами антисимметрии:

$$\Gamma_{ik,lm}(p_3, p_4; p_1, p_2) = -\Gamma_{ki,lm}(p_4, p_3; p_1, p_2) = \\ = -\Gamma_{ik,ml}(p_3, p_4; p_2, p_1). \quad (106.16)$$

Если импульсы p_1, p_2, p_3, p_4 отвечают реальным частицам, то нераспадающиеся диаграммы (106.12) изображают процесс рассеяния двух электронов. Мы получим амплитуду этого процесса, сопоставив внешним концам диаграммы волновые амплитуды частиц (вместо пропагаторов $\mathcal{G}$) [1]:

$$iM_{fi}=\overline{u}_i(p_3)\overline{u}_k(p_4)[-ie\Gamma_{ik,lm}(p_3, p_4; p_1, p_2)]u_l(p_1)u_m(p_2). \quad (106.17)$$

Вследствие (106.16) эта амплитуда автоматически обладает должной антисимметрией по отношению к перестановкам электронов.

§ 107. Уравнения Дайсона

Точные пропагаторы и вершинная часть связаны между собой определенными интегральными соотношениями. Их происхождение становится в особенности ясным из диаграммного метода.

Введенное в предыдущем параграфе понятие о неприводимости или приводимости распространяется не только на вершинные части, но и на любые другие диаграммы (или их части). Рассмотрим с этой точки зрения компактные собственно-энергетические электронные диаграммы.

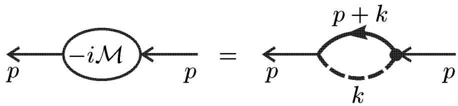
Легко сообразить, что из всего бесконечного множества этих диаграмм лишь одна неприводима; это — диаграмма второго порядка



[1]) Мы увидим в дальнейшем (см. § 110), что при составлении амплитуд реальных процессов не надо учитывать собственно-энергетических частей в свободных концах диаграммы.

Всякое усложнение этой диаграммы может рассматриваться как введение дальнейших поправок к ее внутренним (электронной или фотонной) линиям или же к одной из ее вершин. При этом существенно, что в силу очевидной симметрии диаграммы все вершинные поправки достаточно приписывать лишь к одной (любой) из ее двух вершин [1]).

Поскольку, таким образом, из всех компактных собственно-энергетических электронных частей лишь одна неприводима, совокупность всех таких частей (т. е. массовый оператор $\mathcal{M}$ изобразится всего одной скелетной диаграммой:

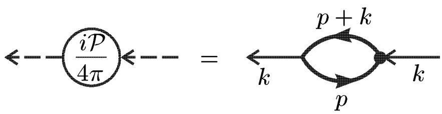


(107.1)

Записанное в аналитическом виде, это графическое равенство дает [2])

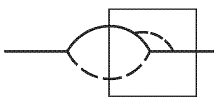
$$\mathcal{M}(p) = G^{-1}(p) - \mathcal{G}^{-1}(p) =$$
$$= -ie^2 \int \gamma^\nu \mathcal{G}(p+k)\Gamma^\mu(p+k,\, p;\, k) \cdot \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) \frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \quad (107.2)$$

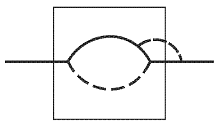
Аналогичное выражение может быть написано и для поляризационного оператора $\mathcal{P}$. Среди фотонных компактных собственно-энергетических частей тоже лишь одна неприводима, так что $\mathcal{P}$ представляется всего одной скелетной диаграммой:



(107.3)

[1]) Для ясности подчеркнем, что хотя мы получим всю требуемую совокупность диаграмм, вводя поправки лишь к одной из вершин, но для каждой определенной диаграммы структура поправочного блока, вообще говоря, зависит от того, которой из вершин он приписывается. Например:





где для одной и той же диаграммы обведены квадратами блоки, которые играют роль вершинной части при отнесении ее к правой или левой вершине.

[2]) Если в (107.1) точную вершинную часть приписать левой вершине, то в уравнении (107.2) переставятся множители γ и Γ. Обе формы уравнения, разумеется, по существу эквивалентны.

Соответствующее аналитическое равенство:

$$\frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)}{4\pi} = D^{-1}_{\mu\nu}(k) - \mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu}(k) = \\ = ie^2 \operatorname{Sp} \int \gamma_\mu \mathcal{G}(p+k)\Gamma_\nu(p+k,\, p;\, k)\mathcal{G}(p)\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \quad (107.4)$$

(биспинорные индексы в (107.2) и (107.4) опущены). Соотношения (107.2) и (107.4) называют *уравнениями Дайсона*. Их можно получить также и прямым аналитическим вычислением. Так, для вывода уравнения (107.2)рассмотрим величину

$$(\gamma\widehat{p} - m)_{il}\mathcal{G}_{lk}(x-x') = -i(\gamma\widehat{p} - m)_{il}\langle 0|\mathrm{T}\psi_l(x)\overline{\psi}_k(x')|0\rangle$$

($\widehat{p} = i\partial$ — оператор дифференцирования по x). Она вычисляется с помощью (102.5) точно так же, как это было сделано в § 75 при выводе уравнения (75.7) для пропагатора свободных частиц. В результате получим

$$(\gamma\widehat{p} - m)_{il}\mathcal{G}_{lk}(x-x') = \\ = -ie\gamma^\nu_{il}\langle 0|\mathrm{T}A_\nu(x)\psi_l(x)\overline{\psi}_k(x')|0\rangle + \delta_{ik}\delta^{(4)}(x-x');$$

δ-функционный член в правой части этого равенства такой же, как в (75.7), поскольку коммутационные соотношения при $t = t'$ для ψ-операторов в гейзенберговском представлении и в представлении взаимодействия одинаковы. Первый же член есть $-ie\gamma_\nu K^\nu_{lk}(x,\, x,\, x')$, так что можно написать (снова опуская биспинорные индексы):

$$(\gamma\widehat{p} - m)\mathcal{G}(x-x') = -ie\gamma^\mu K_\mu(x,\, x,\, x') + \delta^{(4)}(x-x'). \quad (107.5)$$

Для перехода к компонентам Фурье замечаем, что если проинтегрировать определение (106.3) по $d^4k\, d^4p_2/(2\pi)^8$, то получим

$$\int K^\mu(p+k,\, p;\, k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4} = \int K^\mu(0,\, 0,\, x_3)e^{-ipx_3}d^4x_3 = \\ = \int K^\mu(x,\, x,\, x')e^{ip(x-x')}d^4(x-x'), \quad (107.6)$$

откуда видно, что интеграл в левой части представляет собой компоненту Фурье функции $K^\mu(x,\, x,\, x')$. Таким образом, взяв компоненту Фурье от обеих частей уравнения (107.5), использовав затем определение (106.9) и вспомнив, что $\gamma p - m = G^{-1}(p)$, получим

$$G^{-1}(p)\mathcal{G}(p) = 1 - ie^2\int \gamma^\nu \mathcal{G}(p+k)\Gamma^\mu(p+k,\, p;\, k)\mathcal{G}(p)\cdot\mathcal{D}_{\mu\nu}(k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4}.$$

Наконец, умножив это равенство справа на $\mathcal{G}^{-1}(p)$, придем вновь к уравнению (107.2).

§ 108. Тождество Уорда

Еще одна связь между фотонным пропагатором и вершинной частью, более простая, чем уравнение Дайсона, возникает как следствие калибровочной инвариантности.

Для ее вывода совершим калибровочное преобразование (102.8), предполагая $\chi(x) \equiv \delta\chi(x)$ бесконечно малой простой (неоператорной) функцией 4-координат x. Тогда электронный пропагатор изменится на величину

$$\delta\mathcal{G}(x,\, x') = ie\mathcal{G}(x - x')[\delta\chi(x) - \delta\chi(x')]. \tag{108.1}$$

Подчеркнем, что калибровочное преобразование такого вида нарушает пространственно-временную однородность и функция $\delta\mathcal{G}$ зависит уже от аргументов x и x' по отдельности, а не только от разности $x - x'$. Ее разложение Фурье происходит поэтому по переменным x и x' в отдельности. Другими словами, в импульсном представлении $\delta\mathcal{G}$ является функцией двух 4-импульсов:

$$\delta\mathcal{G}(p_2,\, p_1) = \iint \delta\mathcal{G}(x,\, x')e^{ip_2x - ip_1x'}d^4xd^4x'$$

Подставив сюда (108.1) и произведя интегрирование по $d^4xd^4\xi$ или $d^4\xi d^4x'$ $(\xi = x - x')$, получим

$$\delta\mathcal{G}(p + q,\, p) = ie\delta\chi(q)[\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p + q)]. \tag{108.2}$$

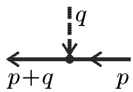
С другой стороны, при том же калибровочном преобразовании к оператору $\widehat{A}_\mu(x)$ добавляется функция

$$\delta A_\mu^{(e)}(x) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta\chi, \tag{108.3}$$

которую можно рассматривать как бесконечно малое внешнее поле. В импульсном представлении:

$$\delta A_\mu^{(e)}(q) = iq_\mu\delta\chi(q). \tag{108.4}$$

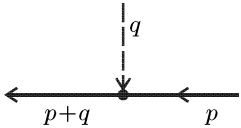
Величину $\delta\mathcal{G}$ можно вычислить и как изменение пропагатора под влиянием этого поля. С точностью до величин первого порядка по $\delta\chi$ это изменение изобразится, очевидно, одной скелетной диаграммой:

$i\delta\mathcal{G}(p+q,p) =$ 

Здесь жирная штриховая линия — эффективная линия внешнего поля, т. е. ей сопоставляется множитель (см. (103.15))

$$\delta A_\mu^{(e)}(q) + \delta A_\lambda^{(e)}(q)\frac{\mathcal{P}^{\lambda\nu}(q)}{4\pi}\mathcal{D}_{\mu\nu}(q).$$

Но 4-вектор $\delta A_\lambda^{(e)}(q)$ продолен (по отношению к q), а тензор $\mathcal{P}^{\lambda\nu}$ поперечен. Поэтому второй член здесь обращается в нуль, так что остается

$i\delta\mathcal{G}(p+q,p) =$ 

(108.5)

где тонкой штриховой линии сопоставляется обычным образом просто поле $\delta A^{(e)}$. В аналитической форме:

$$\delta\mathcal{G} = e\mathcal{G}(p+q)\Gamma^\mu(p+q,\, p;\, q)\mathcal{G}(p)\cdot\delta A_\mu^{(e)}. \tag{108.6}$$

Подставив сюда (108.4) и сравнив с (108.2), находим соотношение

$$\mathcal{G}(p+q) - \mathcal{G}(p) = -\mathcal{G}(p+q)\Gamma^\mu(p+q,\, p;\, q)\mathcal{G}(p)\cdot q_\mu$$

или для обратных матриц

$$\mathcal{G}^{-1}(p+q) - \mathcal{G}^{-1}(p) = q_\mu\Gamma^\mu(p+q,\, p;\, q) \tag{108.7}$$

(*H. S. Green,* 1953).

Устремив в этом равенстве $q\to 0$ и сравнив коэффициенты при бесконечно малом q_μ в обеих его сторонах, получим

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\mathcal{G}^{-1}(p) = \Gamma^\mu(p,\, p;\, 0) \tag{108.8}$$

Это — так называемое *тождество Уорда* (*J. C. Ward,* 1950). Мы видим, что производная по импульсу от $\mathcal{G}^{-1}(p)$ совпадает с вершинным оператором при нулевой передаче импульса [1]. Производная же от самой функции $\mathcal{G}(p)$

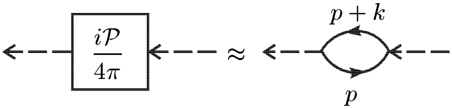
$$-\frac{\partial}{\partial p_\mu}i\mathcal{G}(p) = i\mathcal{G}(p)[-i\Gamma^\mu(p,\, p;\, 0)]i\mathcal{G}(p). \tag{108.9}$$

Аналогичным образом можно было бы найти также и высшие производные, проводя вычисления с точностью до членов более высоких порядков по $\delta\chi$. Нам такие формулы, однако, не понадобятся.

Рассмотрим теперь производную $\partial\mathcal{P}(k)/\partial k_\mu$ от поляризационного оператора. В отличие от функции $\mathcal{G}(p)$ величина $\mathcal{P}(k)$ калибровочно-инвариантна и не меняется при введении фиктивного внешнего поля (108.4). Поэтому производную от $\mathcal{P}$ нельзя вычислить тем же способом. Однако и для нее можно получить определенное диаграммное выражение.

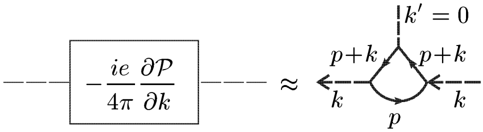
[1]) В нулевом приближении, т. е. для пропагатора свободных частиц, это тождество очевидно: $G^{-1}(p) = \gamma p - m$, и потому $\partial G^{-1}/\partial p_\mu = \gamma^\mu$.

Для этого рассмотрим первую из диаграмм, входящих в определение $\mathcal{P}$, — диаграмму второго порядка



(108.10)

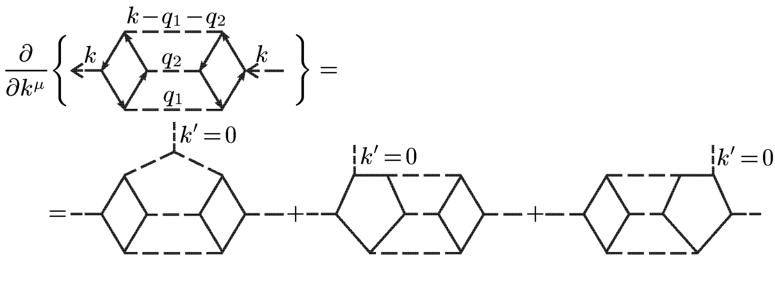
Сплошным линиям в ней отвечают множители $iG(p)$ и $iG(p+k)$. Дифференцирование по k заменит второй из них на $\partial G(p+k)/\partial k$, а согласно тождеству (108.9) такая замена эквивалентна добавлению лишней вершины на электронной линии:



(108.11)

Мы видим, что в первом неисчезающем порядке искомая производная выразилась через диаграмму с тремя фотонными концами («фотонная треххвостка»). Сразу же подчеркнем, что эта диаграмма сама по себе отнюдь не дает амплитуду превращения одного фотона в два. Амплитуда такого процесса выразилась бы суммой диаграммы (108.11) и другой такой же диаграммы с измененным направлением обхода петли; согласно теореме Фарри эта сумма обращается и нуль. Сама же по себе диаграмма (108.11) не равна нулю.

Подобным образом можно дифференцировать и более сложные диаграммы, последовательно добавляя вершины с $k' = 0$ на все электронные линии, зависящие от k. Существуют, однако, диаграммы, в которых зависимость от k имеется и во внутренних фотонных линиях, например диаграмма слева на рисунке



Производная от графика в фигурной скобке представлена здесь в диаграммном виде путем введения нового графического обозначения — фиктивной трехчастичной фотонной вершины — точки,

в которой сходятся три штриховых линии и которой сопоставляется величина

$$4\pi i\frac{\partial D^{-1}}{\partial k^{\mu}} = 2ik_{\mu} \equiv v_{\mu}. \tag{108.12}$$

Теперь можно дифференцировать любой график, добавляя на зависящие от k линии вершины v_{μ} или γ_{μ} и вычисляя далее по

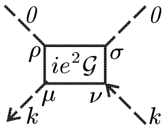
$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^{\lambda}} = \mathcal{V}_{\mu\lambda\nu}, \tag{108.13}$$

где $ie\mathcal{V}_{\mu\lambda\nu}$ сумма внутренних частей всех полученных указанным способом «фотонных треххвосток».

Для дальнейшего нам понадобится еще и вторая производная поляризационного оператора. Аналогичным образом дифференцируя еще раз равенство (108.13), имеем

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^{\rho}\partial k^{\sigma}} = \mathcal{G}_{\mu\rho\sigma\nu} + \mathcal{G}_{\mu\sigma\rho\nu}, \tag{108.14}$$

где $ie^2\mathcal{G}$ — сумма внутренних частей всех «фотонных четыреххвосток» вида



(108.15)

(разумеется, с включением и графиков с фиктивными трехфотонными вершинами (108.12)).

§ 109. Электронный пропагатор во внешнем поле

Если система находится в заданном внешнем поле $A^{(e)}(x)$, то точный электронный пропагатор определяется той же формулой (105.1), но в гамильтониан $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}$, осуществляющий преобразование к гейзенберговскому представлению операторов, входит также и взаимодействие электронов с внешним полем:

$$\widehat{V} = e\int \widehat{A}_{\mu}\widehat{j}^{\mu}d^3x + e\int \widehat{A}_{\mu}^{(e)}\widehat{j}^{\mu}d^3x. \tag{109.1}$$

Поскольку внешнее поле нарушает однородность пространства и времени, то пропагатор $\mathcal{G}(x, x')$ будет зависеть теперь уже от обоих аргументов x и x' в отдельности, а не только от их разности $x - x'$.

Если перейти обычным образом к представлению взаимодействия, то получится обычная диаграммная техника, в которой наряду с виртуальными фотонными линиями будут фигурировать также и линии внешнего поля. Такая техника, однако, неудобна в тех случаях, когда внешнее поле нельзя рассматривать

как малое возмущение, прежде всего — когда частицы в поле могут находиться в связанных состояниях. Между тем электронный пропагатор во внешнем поле необходим в первую очередь как раз для изучения свойств связанных состояний, в частности для определения уровней энергии с учетом радиационных поправок. Для построения такого пропагатора следует исходить из представления операторов, в котором внешнее поле учитывается точно, уже в нулевом приближении по электрон-фотонному взаимодействию (*W. H. Furry*, 1951).

В дальнейшем мы будем предполагать внешнее поле стационарным, т. е. не зависящим от времени.

Требуемое представление ψ-операторов дается формулами (32.9) вторичного квантования во внешнем поле:

$$\widehat{\psi}^{(e)}(t,\,\mathbf{r}) = \sum_n \{\widehat{a}_n \psi_n^{(+)}(\mathbf{r}) \exp(-i\varepsilon_n^{(+)}t) + \widehat{b}_n^+ \psi_n^{(-)}(\mathbf{r}) \exp(i\varepsilon_n^{(-)}t)\},$$
$$\widehat{\overline{\psi}}^{(e)}(t,\,\mathbf{r}) = \sum_n \{\widehat{a}_n^+ \overline{\psi}_n^{(+)}(\mathbf{r}) \exp(i\varepsilon_n^{(+)}t) + \widehat{b}_n \overline{\psi}_n^{(-)}(\mathbf{r}) \exp(-i\varepsilon_n^{(-)}t)\}, \tag{109.2}$$

где $\psi_n^{(\pm)}(\mathbf{r})$ и $\varepsilon_n^{(\pm)}$ — волновые функции и уровни энергии соответственно электрона и позитрона, являющиеся решениями «одночастичной» задачи — уравнения Дирака для частицы в поле. Легко понять, что операторы (109.2) являются ψ-операторами в некотором представлении (*представлении Фарри*), как бы промежуточном между гейзенберговским и представлением взаимодействия. Их можно записать в виде

$$\widehat{\psi}^{(e)}(t,\,\mathbf{r}) = \exp(i\widehat{H}_1 t)\widehat{\psi}(\mathbf{r}) \exp(-i\widehat{H}_1 t),$$
$$\widehat{\overline{\psi}}^{(e)}(t,\,\mathbf{r}) = \exp(i\widehat{H}_1 t)\widehat{\overline{\psi}}(\mathbf{r}) \exp(-i\widehat{H}_1 t), \tag{109.3}$$

где

$$\widehat{H}_1 = \widehat{H}_0 + e\int A_\mu^{(e)}(x)\widehat{j}^\mu(x)d^3x.$$

Оператор же электромагнитного поля $\widehat{A}_\mu$, разумеется, коммутирует со вторым членом в $\widehat{H}_1$, и потому для него представление Фарри совпадает с представлением взаимодействия.

Электронный пропагатор нулевого приближения в новом представлении определяется как

$$G_{ik}^{(e)}(x,\,x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i^{(e)}(x)\overline{\psi}_k^{(e)}(x')|0\rangle. \tag{109.4}$$

Оператор $\widehat{\psi}^{(e)}(t,\,\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Дирака во внешнем поле

$$[\gamma\widehat{p} - e\gamma A^{(e)}(x) - m]\overline{\psi}^{(e)}(t,\,\mathbf{r}) = 0, \tag{109.5}$$

а функция $G^{(e)}$ — соответственно уравнению

$$[\gamma\widehat{p} - e\gamma A^{(e)}(x) - m]G^{(e)}(x,\, x') = \delta^4(x - x'), \tag{109.6}$$

(ср. вывод (107.5)).

Диаграммная техника, выражающая точный пропагатор $\mathcal{G}$ в виде ряда по e^2, строится путем перехода от гейзенберговского представления к представлению Фарри — в точности так, как мы производили ранее переход к представлению взаимодействия. Мы получим в результате диаграммы того же вида, причем сплошным линиям будут соответствовать теперь множители $iG^{(e)}$ (вместо iG).

Незначительное отличие в правилах записи аналитических выражений диаграмм возникает лишь в связи с тем, что в координатном представлении $G^{(e)}$ — функция не только от разности $x - x'$. В постоянном внешнем поле, однако, сохраняется однородность времени, и потому моменты t и t' по-прежнему будут входить лишь в виде разности $t - t' \equiv \tau$, так что

$$G^{(e)} = G^{(e)}(\tau,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}').$$

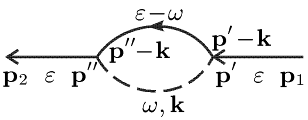
Переход к импульсному представлению осуществляется разложением Фурье по каждому из аргументов функции:

$$G^{(e)}(\tau,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}) = \iiint e^{i(\mathbf{p}_2\mathbf{r} - \mathbf{p}_1\mathbf{r} - \varepsilon\tau)} G(\varepsilon,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{p}_1) \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}. \tag{109.7}$$

Каждой линии, которой отвечает множитель $iG^{(e)}(\varepsilon,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{p}_1)$, должно приписываться теперь одно значение виртуальной энергии ε, но два значения импульса — начальный $\mathbf{p}_1$ и конечный $\mathbf{p}_2$:

$$iG^{(e)}(\varepsilon,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{p}_1) = \xleftarrow{\mathbf{p}_2\ \varepsilon\ \mathbf{p}_1}\ . \tag{109.8}$$

В результате получается правило записи аналитических выражений диаграмм, в которых обычным образом производятся интегрирования по $d\varepsilon/(2\pi)$, а по $d^3p_1/(2\pi)^3$ и $d^3p_2/(2\pi)^3$ интегрирования производятся независимо, с учетом сохранения импульса в каждой вершине. Например,

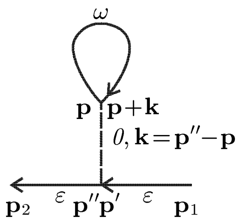


=

$$= e^2 \iiint G^{(e)}(\varepsilon,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{p}'')\gamma^\mu G^{(e)}(\varepsilon - \omega,\, \mathbf{p}'' - \mathbf{k},\, \mathbf{p}' - \mathbf{k}) \times$$

$$\times \gamma^\nu G^{(e)}(\varepsilon,\, \mathbf{p}',\, \mathbf{p}_1) D_{\mu\nu}(\omega,\, \mathbf{k}) \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3p''}{(2\pi)^3}. \tag{109.9}$$

Важно отметить, что в излагаемой технике необходимо учитывать также и диаграммы с «замкнутыми на себя» электронными линиями, которые в обычной технике отбрасываются как связанные с «вакуумным током». При наличии внешнего поля этот ток уже не должен обращаться в нуль в связи с вызываемой полем «поляризацией вакуума». Так, в диаграмме



(109.10)

верхней петле отвечает множитель

$$i\iint G^{(e)}(\omega,\,\mathbf{p}+\mathbf{k},\,\mathbf{p})\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{109.11}$$

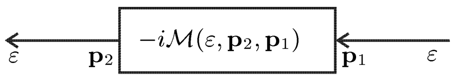
Здесь, однако, надо еще уточнить смысл, придаваемый интегралу по ω. Дело в том, что интегрирование компоненты Фурье функции $G^{(e)}(\tau)$ по ω сводится к взятию значения этой функции при $\tau = 0$; но функция $G^{(e)}(\tau)$ разрывна в этой точке, так что надо указать, какое именно из ее двух предельных значений должно быть взято. Для выяснения этого вопроса достаточно заметить, что интеграл (109.11) происходит от свертывания ψ-операторов, стоящих в одном и том же операторе тока:

$$\hat{j}^\mu = \hat{\overline{\psi}}^{(e)}(t,\,\mathbf{r})\gamma^\mu\hat{\psi}^{(e)}(t,\,\mathbf{r}),$$

где $\hat{\overline{\psi}}^{(e)}(t,\,\mathbf{r})$ стоит слева от $\hat{\psi}^{(e)}(t,\,\mathbf{r})$. Согласно определению пропагатора (109.4) такой порядок множителей при $t = t'$ получится, если понимать t' как $t' = t+0$, т е. предельное значение функции $G^{(e)}(t-t')$ — как предел при $t - t' \to -0$. Иначе можно сказать, что интеграл по $d\omega/2\pi$ в (109.11) надо понимать как

$$\int \ldots e^{-i\omega\tau}\frac{d\omega}{2\pi}, \quad \tau \to -0. \tag{109.12}$$

Массовый оператор во внешнем поле определяется так же, как в § 105: $-i\mathcal{M}$ есть сумма всех компактных собственно-энергетических блоков. Он является теперь функцией энергии ε и импульсов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ на тех концах внешних линий, которыми они соответственно входят и выходят из блока:



(109.13)

Поступая в точности так, как при выводе (105.6), получим уравнение

$$\mathcal{G}(\varepsilon,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{p}_1) - G^{(e)}(\varepsilon,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{p}_1) = \\ = \iint G^{(e)}(\varepsilon,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{p}'')\mathcal{M}(\varepsilon,\, \mathbf{p}'',\, \mathbf{p}')\mathcal{G}(\varepsilon,\, \mathbf{p}',\, \mathbf{p}_1)\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3p''}{(2\pi)^3}. \quad (109.14)$$

Более естественный вид этому уравнению можно придать, если вернуться к координатному представлению по пространственным переменным, введя функцию

$$\mathcal{G}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}') = \iint \mathcal{G}(\varepsilon,\, \mathbf{p}_2,\, \mathbf{p}_1)e^{i(\mathbf{p}_2\mathbf{r}-\mathbf{p}_1\mathbf{r}')}\frac{d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^6}, \quad (109.15)$$

и аналогично для других величии. Произведя в (109.14) обратное преобразование Фурье, получим

$$\mathcal{G}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}') - G^{(e)}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}') = \\ = \iint G^{(e)}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}_2)\mathcal{M}(\varepsilon,\, \mathbf{r}_2,\, \mathbf{r}_1)\mathcal{G}(\varepsilon,\, \mathbf{r}_1,\, \mathbf{r}')d^3x_1 d^3x_2.$$

Применим теперь к обеим сторонам равенства оператор

$$\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\widehat{\mathbf{p}} - e\gamma^\mu A_\mu^{(e)}(x)$$

(ε — число, $\widehat{\mathbf{p}} = -i\boldsymbol{\nabla}$ — оператор дифференцирования по координатам $\mathbf{r}$). При этом надо учесть, что согласно (109.6)

$$[\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\widehat{\mathbf{p}} - e\gamma A^{(e)}(x)]G^{(e)}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (109.16)$$

В результате получим следующее уравнение:

$$[\gamma^0\varepsilon - \boldsymbol{\gamma}\widehat{\mathbf{p}} - e\gamma A^{(e)}(x)]\mathcal{G}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}') - \int \mathcal{M}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}_1)\mathcal{G}(\varepsilon,\, \mathbf{r}_1,\, \mathbf{r}')d^3x_1 = \\ = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (109.17)$$

Особая ценность функции $\mathcal{G}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}')$ состоит в том, что ее полюсы определяют уровни энергии электрона во внешнем поле.

Покажем это сначала для приближенной функции $G^{(e)}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}')$. Подставив операторы (109.2) в определение пропагатора (109.4), получим (в точности аналогично формулам (75.12) для пропагатора свободных частиц)

$$G_{ik}^{(e)}(t-t',\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}') = \\ = \begin{cases} -i\sum\limits_n \psi_{ni}^{(+)}(\mathbf{r})\overline{\psi}_{nk}^{(+)}(\mathbf{r}')\exp\{-i\varepsilon_n^{(+)}(t-t')\}, & t > t', \\ i\sum\limits_n \psi_{ni}^{(-)}(\mathbf{r})\overline{\psi}_{nk}^{(-)}(\mathbf{r}')\exp\{i\varepsilon_n^{(-)}(t-t')\}, & t < t', \end{cases} \quad (109.18)$$

и после перехода к компонентам Фурье по времени

$$G^{(e)}_{ik}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}') = \sum_n \left\{ \frac{\psi^{(+)}_{ni}(\mathbf{r})\overline{\psi}^{(+)}_{nk}(\mathbf{r}')}{\varepsilon - \varepsilon^{(+)}_n + i0} + \frac{\psi^{(-)}_{ni}(\mathbf{r})\overline{\psi}^{(-)}_{nk}(\mathbf{r}')}{\varepsilon + \varepsilon^{(-)}_n - i0} \right\}. \qquad (109.19)$$

Мы видим, что $G^{(e)}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}')$ как аналитическая функция ε имеет на положительной вещественной полуоси полюсы, совпадающие с уровнями энергии электрона, а полюсы на отрицательной полуоси совпадают с уровнями энергии позитрона. Значения $\varepsilon^{(\pm)}_n > m$ образуют непрерывный спектр [1]), и соответствующие полюсы сливаются в два разреза плоскости ε: от $-\infty$ до $-m$ и от m до $+\infty$. На отрезке $|\varepsilon| < m$ лежат полюсы, определяющие дискретные уровни энергии.

Для точного пропагатора $\mathcal{G}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}')$ можно получить аналогичное разложение, выразив его через матричные элементы шредингеровских операторов, с которыми матричные элементы гейзенберговских ψ-операторов связаны равенствами

$$\langle m|\psi(t,\, \mathbf{r})|n\rangle = \langle m|\psi(\mathbf{r})|n\rangle \exp[-i(E_n - E_m)t]. \qquad (109.20)$$

Здесь E_n — точные (т. е. со всеми радиационными поправками) уровни энергии системы во внешнем поле. Оператор $\widehat{\psi}$ увеличивает, а оператор $\widehat{\overline{\psi}}$ уменьшает на 1 (т. е. на $+|e|$) заряд системы. Это значит, что в матричных элементах $\langle n|\psi|0\rangle$ и $\langle 0|\widehat{\psi}|n\rangle$ состояния $|n\rangle$ должны соответствовать равному $+1$ заряду системы, т. е. могут содержать, помимо одного позитрона, лишь некоторое число электрон-позитронных пар и фотонов; энергии этих состояний обозначим через $E^{(-)}_n$. Аналогичным образом в матричных элементах $\langle 0|\psi|n\rangle$ и $\langle n|\widehat{\psi}|0\rangle$ состояния $|n\rangle$ содержат один электрон и некоторое число пар и фотонов (энергия $E^{(+)}_n$). Вместо (109.18) получим теперь

$$\mathcal{G}_{ik}(t - t',\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}') = \\ = \begin{cases} -i\sum\limits_n \langle 0|\psi_i(\mathbf{r})|n\rangle\langle n|\overline{\psi}_k(\mathbf{r}')|0\rangle \exp[-iE^{(+)}_n(t - t')], & t > t', \\ i\sum\limits_n \langle 0|\widehat{\psi}_k(\mathbf{r}')|n\rangle\langle n|\psi_i(\mathbf{r}')|0\rangle \exp[iE^{(-)}_n(t - t')], & t < t', \end{cases} \qquad (109.21)$$

и отсюда

$$\mathcal{G}_{ik}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}') = \sum_n \left\{ \frac{\langle 0|\psi_i(\mathbf{r})|n\rangle\langle n|\overline{\psi}_k(\mathbf{r}')|0\rangle}{\varepsilon - E^{(+)}_n + i0} + \frac{\langle 0|\widehat{\psi}_k(\mathbf{r}')|n\rangle\langle n|\psi_i(\mathbf{r})|0\rangle}{\varepsilon + E^{(-)}_n - i0} \right\}, \qquad (109.22)$$

---

[1]) Предполагается, что внешнее поле исчезает на бесконечности.

Пусть ε близко к какому-либо из дискретных уровней энергии $E_n^{(+)}$ (или к одному из $-E_n^{(-)}$). Тогда из всей суммы в (109.22) можно оставить лишь один соответствующий полюсный член. Подставив его затем в (109.17), мы увидим, что множители, зависящие от второго аргумента $\mathbf{r}'$ (при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$), из уравнения выпадают. В результате мы получим однородное интегродифференциальное уравнение для функции $\langle 0|\psi(\mathbf{r})|n\rangle$ (или $\langle n|\psi(\mathbf{r})|0\rangle$, которую мы обозначим для краткости через $\Psi_n(\mathbf{r})$ [1]). Опуская индекс n, имеем

$$[\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla} - e\gamma A^{(e)}(\mathbf{r})]_{ik}\Psi_k(\mathbf{r}) - \int \mathcal{M}_{ik}(\varepsilon,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}_1)\Psi_k(\mathbf{r}_1)d^3x_1 = 0 \tag{109.23}$$

(*J. Schwinger,* 1951). Дискретные уровни энергии E_n выступают теперь как собственные значения этого уравнения. Тем самым уравнение (109.23) становится основой регулярной процедуры для определения этих уровней.

Выразим, например, из (109.23) поправку первого порядка по $\mathcal{M}$ к дискретному уровню энергии электрона ε_n, полученному в результате решения уравнения Дирака

$$[\gamma^0\varepsilon_n + i\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla} - e\gamma A^{(e)}(\mathbf{r})]\psi_n(\mathbf{r}) = 0; \tag{109.24}$$

волновая функция $\psi_n(\mathbf{r})$ пусть нормирована условием

$$\int \psi_n^*\psi_n d^3x = 1. \tag{109.25}$$

Собственную функцию уравнения (109.23) запишем в виде

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = \psi_n(\mathbf{r}) + \psi_n^{(1)}(\mathbf{r}), \tag{109.26}$$

где $\psi_n^{(1)}$ — поправка к ψ_n. Подставив (109.26) в уравнение (109.23), умножив его слева на $\overline{\psi}_n(\mathbf{r})$ и проинтегрировав по d^3x [2]), получим искомое выражение

$$E_n - \varepsilon_n \approx \int \overline{\psi}_{ni}(\mathbf{r})\mathcal{M}_{ik}(\varepsilon_n,\, \mathbf{r},\, \mathbf{r}_1)\psi_{nk}(\mathbf{r}_1)d^3x\, d^3x_1. \tag{109.27}$$

---

[1]) В пренебрежении радиационными поправками $\Psi_n(\mathbf{r})$ совпадают (для состояний с одним электроном или позитроном) с волновыми функциями $\psi_n^{(+)}$ или $\psi_n^{(-)}$ — решениями уравнения Дирака.

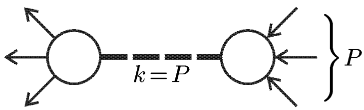
[2]) При интегрировании надо использовать самосопряженность дифференциального оператора уравнения (109.24) с целью перебросить его действие с $\psi_n^{(1)}$ на $\overline{\psi}_n$

§ 110. Физические условия перенормировки

Излагавшаяся до сих пор в этой главе теория носила в значительной степени формальный характер. Мы оперировали со всеми величинами так, как если бы они были конечными, и намеренно не обращали внимания на встречающиеся в теории бесконечности. Между тем при фактическом вычислении функций $\mathcal{D}$, $\mathcal{G}$, Γ по теории возмущений встречаются расходящиеся интегралы, которым нельзя, без привлечения дополнительных соображений, приписать какого-либо определенного значения. В возникновении таких расходимостей проявляется логическое несовершенство излагаемой квантовой электродинамики. Мы увидим, однако, что в этой теории можно установить определенные предписания, позволяющие однозначным образом производить «вычитание бесконечностей» и в результате получать конечные значения для всех величин, имеющих непосредственный физический смысл. В основе этих предписаний лежат очевидные физические требования, сводящиеся к тому, чтобы масса фотона была равна нулю, а заряд и масса электрона были равны их наблюдаемым значениям.

Начнем с выяснения условий, налагаемых на фотонный пропагатор.

Рассмотрим процесс рассеяния, который может происходить через одночастичные промежуточные состояния с одним виртуальным фотоном. Амплитуда такого процесса должна иметь полюс, когда квадрат суммарного 4-импульса начальных частиц P совпадает с квадратом массы реального фотона, т. е. $P^2 = 0$; мы видели в § 79, что это требование следует из общего условия унитарности. Полюсный член в амплитуде возникает из диаграммы вида (79.1):



(110.1)

причем с учетом радиационных поправок обе части диаграммы должны быть соединены жирной штриховой линией (точный фотонный пропагатор). Это значит, что функция $\mathcal{D}(k^2)$ должна иметь полюс при $k^2 = 0$, т. е. должно быть

$$\mathcal{D} \to \frac{4\pi Z}{k^2} \quad \text{при} \quad k^2 \to 0, \tag{110.2}$$

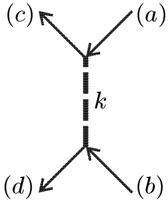
где Z — постоянная. Для поляризационного оператора же $\mathcal{P}(k^2)$ отсюда получается, согласно (103.21), условие

$$\mathcal{P}(0) = 0. \tag{110.3}$$

При этом коэффициент (110.2)

$$\frac{1}{Z} = 1 - \frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2}\Big|_{k^2\to 0}.$$

Дальнейшие ограничения на функцию $\mathcal{P}(k^2)$ можно получить из анализа физического определения электрического заряда частицы. Оно состоит в том, что две классические (т. е. сколь угодно тяжелые) частицы, покоящиеся на больших расстояниях друг от друга, должны взаимодействовать по закону Кулона: $U = e^2/r$ (имеются в виду расстояния $r \gg 1/m$, m — масса электрона). С другой стороны, это взаимодействие выражается диаграммой



(110.4)

где верхние и нижние линии отвечают классическим частицам. Фотонные собственно-энергетические поправки учтены на линии виртуального фотона. Всякие же другие поправки, затрагивающие линии тяжелых частиц, привели бы к обращению диаграммы в нуль. Действительно, добавление каких-либо еще внутренних линий в диаграмме (110.4) (например, соединение линий a и c или a и b фотонной линией) приводит к появлению на диаграмме линий виртуальных тяжелых частиц, которым сопоставляются соответствующие пропагаторы. Но пропагатор частицы содержит ее массу M в знаменателе и обращается в нуль при $M \to \infty$.

Из вида диаграммы (110.4) ясно (ср. § 83), что множитель $e^2\mathcal{D}(k^2)$ в ней должен представлять собой (с точностью до знака) фурье-образ потенциала взаимодействия частиц. Статичность взаимодействия означает, что частоты виртуальных фотонов $\omega = 0$, а большим расстояниям отвечают малые волновые векторы $\mathbf{k}$. Фурье-образ кулонова потенциала есть $4\pi e^2/\mathbf{k}^2$. Наконец, поскольку функция $\mathcal{D}$ зависит только от квадрата $k^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2$, то мы приходим к условию

$$\mathcal{D} \to 4\pi/k^2, \qquad k^2 \to 0, \tag{110.5}$$

т. е. коэффициент в (110.2) должен быть $Z = 1$ (знак в условии (110.5) очевиден: $\mathcal{D}(k^2)$ стремится к пропагатору свободных фотонов $D(k^2)$). Для поляризационного оператора $\mathcal{P}(k^2)$ это значит, что должно быть

$$\mathcal{P}(k^2)/k^2 \to 0, \qquad k^2 \to 0. \tag{110.6}$$

Помимо известного уже нам условия (110.3), отсюда следует, что должно быть также и

$$\mathcal{P}'(0) = 0. \tag{110.7}$$

В § 103 было отмечено, что эффективной внешней линии реального фотона отвечает в диаграмме множитель (103.15), или, с учетом (103.16) и (103.20),

$$\left[1 + \frac{1}{4\pi}\mathcal{P}(0)\mathcal{D}(0)\right]e^{\mu}.$$

Мы видим теперь, что ввиду (110.5),(110.6) поправочный член здесь обращается в нуль. Другими словами, мы приходим к важному результату: во внешних фотонных линиях вообще не надо учитывать радиационных, поправок.

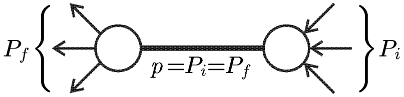
Таким образом, естественные физические требования приводят к установлению определенных (равных нулю) значений величин $\mathcal{P}(0)$ и $\mathcal{P}'(0)$. Между тем вычисление этих величин по диаграммам теории возмущений привело бы для них к расходящимся интегралам. Мы видим, что способ устранения этих бесконечностей состоит в приписывании расходящимся выражениям наперед заданных значений, устанавливаемых физическими требованиями. О такой процедуре говорят как о перенормировке соответствующих величин [1]).

Способ проведения этой операции можно сформулировать и в несколько иной форме. Так, для перенормировки заряда частицы вводят нефизический «затравочный» заряд e_c как параметр, который входит в выражение исходного оператора электромагнитного взаимодействия, фигурирующего в формальной теории возмущений. После этого условие перенормировки формулируется как требование $e_c^2\mathcal{D}(k^2) \to 4\pi e^2/k^2$ (при $k^2 \to 0$), где e — истинный, физический заряд частицы. Отсюда находим связь $e_c^2 Z = e^2$, и с ее помощью нефизическая величина e_c исключается из формул, определяющих наблюдаемые эффекты. Потребовав же сразу $Z = 1$, мы тем самым произведем перенормировку как бы «на ходу» и избавимся от необходимости введения фиктивных величин даже в промежуточных выкладках.

Перейдем к выяснению условий перенормировки электронного пропагатора. Для этого рассмотрим процесс рассеяния, который может проходить через одночастичное промежуточное состояние с одним виртуальным электроном. Амплитуда такого процесса должна иметь полюс, когда квадрат суммарного 4-импульса начальных частиц P_i совпадает с квадратом массы реаль-

[1]) Идея такого подхода была высказана впервые *Крамерсом* (*H. Kramers*, 1947). Систематическое же использование метода перенормировок в квантовой электродинамике осуществлено в работах *Дайсона, Томонаги* (*S. Tomonaga*), *Фейнмана* и *Швингера*.

ного электрона: $P_i^2 = m^2$. Полюсной член в амплитуде возникает из диаграммы вида



(110.8)

где с учетом радиационных поправок жирная линия — точный электронный пропагатор. Это значит, что функция $\mathcal{G}(p)$ должна иметь полюс при $p^2 = m^2$, т. е. должна иметь предельную форму

$$\mathcal{G}(p) \approx Z_1 \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i0} + g(p), \quad p^2 \to m^2, \tag{110.9}$$

где Z_1 — скалярная постоянная, а $g(p)$ остается при $p^2 \to m^2$ конечной. Матричная структура полюсного члена в (110.9) (пропорциональность $\gamma p + m$) является следствием того же условия унитарности, из которого возникает и само требование наличия полюса. Покажем это, одновременно выяснив важный вопрос об условиях перенормировки внешних электронных линий.

Если $\mathcal{G}(P)$ имеет предельный вид (110.9), то обратная матрица

$$\mathcal{G}^{-1}(p) \approx \frac{1}{Z_1}(\gamma p - m) - (\gamma p - m) g(\gamma p - m), \quad p^2 \to m^2. \tag{110.10}$$

Массовый же оператор

$$\mathcal{M} = G^{-1} - \mathcal{G}^{-1} \approx \left(1 - \frac{1}{Z_1}\right)(\gamma p - m) + (\gamma p - m) g(\gamma p - m), \quad p^2 \to m^2. \tag{110.11}$$

Эффективной внешней (скажем, входящей) электронной линии отвечает в диаграмме множитель (ср. (103.15))

$$\mathcal{U}(p) = u(p) + \mathcal{G}(p)\mathcal{M}(p)u(p), \tag{110.12}$$

где $u(p)$ — обычная амплитуда волновой функции электрона, удовлетворяющая уравнению Дирака $(\gamma p - m)u = 0$. В силу требований релятивистской инвариантности ($\mathcal{U}$, как и u, — биспинор) предельное значение $\mathcal{U}(p)$ при $p^2 \to m^2$ может отличаться от $u(p)$ лишь постоянным скалярным множителем:

$$\mathcal{U}(p) = Z' u(p). \tag{110.13}$$

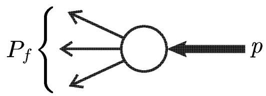
Этот множитель Z' определенным образом связан с множителем Z_1, но найти эту связь просто подстановкой (110.10),(110.11) в (110.12) нельзя ввиду возникающей неопределенности: результат будет зависеть от порядка, в котором совершается предельный переход в различных множителях в (110.12).

Можно, однако, обойтись без выяснения вопроса о правильном способе предельного перехода, обратившись вместо этого к условию унитарности в применении к реакции, изображаемой диаграммой (110.8). Соотношение унитарности относится, вообще говоря, не к отдельным диаграммам, а к амплитудам процессов в целом. Но при $p^2 \to m^2$ полюсная диаграмма (110.8) дает основной вклад в соответствующую амплитуду M_{fi}, так что другие диаграммы, относящиеся к той же реакции, можно не рассматривать.

В силу требований унитарности, как это было показано в § 79, одночастичное промежуточное состояние приводит к появлению в амплитуде реакции мнимой части с δ-функционным членом

$$i\pi\delta(p^2 - m^2) \sum_{\text{поляр}} M_{fn} M_{in}^*, \tag{110.14}$$

где в данном случае индекс n относится к состоянию с одним реальным электроном, а суммирование производится по его поляризациям (во избежание лишних усложнений считаем, как и в § 79, что произведена симметризация обеих сторон соотношения унитарности по спиральностям начальных и конечных частиц; тогда $M_{fi} = M_{if}$). Амплитуда M_{fn} отвечает процессу, изображаемому диаграммой



и имеет вид

$$M_{fn} = (M'_{fn}\mathcal{U}) = Z'(M'_{fn}u),$$

где M'_{fn} — множитель с одним свободным биспинорным индексом [1]. Аналогичным образом амплитуда M_{in}^* имеет структуру вида

$$M_{in}^* = (\overline{\mathcal{U}}M'^*_{in}) = Z'(\overline{u}M'^*_{in}).$$

Суммирование по поляризациям электрона заменяет произведение $(M'_{fn}u)(\overline{u}M'^*_{in})$ на $M'_{fn}(\gamma p + m)M'^*_{in}$, так что член (110.14) в амплитуде M'_{fi} принимает вид

$$Z'^2 i\pi\delta(p^2 - m^2)[M'_{fn}(\gamma p + m)M'^*_{in}].$$

[1]) Здесь необходимо некоторое уточнение. Электрон как стабильная частица не может в действительности превратиться в другую совокупность реальных частиц. Можно, однако, формально рассматривать в качестве последних некоторые воображаемые частицы с такими массами, которые бы допускали такое превращение. Получающееся соотношение надо понимать тогда в смысле аналитического продолжения к реальным значениям масс.

По этому члену в мнимой части можно восстановить весь полюсной член в амплитуде рассеяния; согласно (79.5) находим

$$M_{fi} = -\frac{Z'^2\{M'_{fn}(\gamma p + m)M'^*_{in}\}}{(p^2 - m^2 + i0)}, \qquad p^2 \to m^2.$$

С другой стороны, вычисление этой же амплитуды непосредственно по диаграмме (110.8) дает

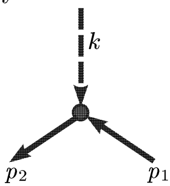
$$iM_{fi} = iM'_{fn} \cdot i\mathcal{G}(p) \cdot iM'^*_{in}.$$

Сравнение обеих формул подтверждает написанное выше предельное выражение для $\mathcal{G}(p)$ (первый член в (110.9)), причем

$$Z' = \sqrt{Z_1}. \tag{110.15}$$

Покажем теперь, что после установления требуемого предельного вида электронного пропагатора уже нет необходимости в постановке каких-либо новых условий для вершинного оператора.

Рассмотрим диаграмму



(110.16)

описывающую рассеяние электрона во внешнем поле $A^{(e)}(k)$ (в первом порядке по полю) с учетом всех радиационных поправок. В пределе $k \to 0$, $p_2 \to p_1 \equiv p$ собственно-энергетические поправки к линии внешнего поля исчезают (напомним, что эти поправки исчезают вообще при всяком $k^2 = 0$). Тогда диаграмме будет соответствовать амплитуда

$$M_{fi} = -e\overline{\mathcal{U}}(p)\Gamma(p,\, p;\, 0)\mathcal{U}(p)A^{(e)}(k \to 0) \tag{110.17}$$

— произведение потенциала $A^{(e)}$ на электронный ток перехода $\overline{\mathcal{U}}\Gamma\mathcal{U}$. Но при $k \to 0$ потенциал $A^{(e)}(x)$ сводится к не зависящей от координат и времени постоянной. Такому потенциалу вообще не соответствует никакое физическое поле (частный случай калибровочной инвариантности), так что он не может вызвать никакого изменения электронного тока. Другими словами, в рассматриваемом пределе ток перехода $\overline{\mathcal{U}}\Gamma\mathcal{U}$ должен просто совпадать со свободным током $\overline{u}\gamma u$:

$$\overline{\mathcal{U}}(p)\Gamma^\mu(p,\, p;\, 0)\mathcal{U}(p) = Z_1\overline{u}(p)\Gamma^\mu u(p) = \overline{u}(p)\gamma^\mu u(p). \tag{110.18}$$

Это требование есть, по существу, тоже выражение определения физического заряда электрона. Легко видеть, что оно автоматически выполняется вне зависимости от значения Z_1. Действительно, подставив $\mathcal{G}^{-1}(p)$ из (110.10) в тождество Уорда (108.8), найдем

$$\Gamma^\mu(p, p; 0) = Z_1^{-1}\gamma^\mu - \gamma^\mu g(p)(\gamma p - m) - (\gamma p - m)g(p)\gamma^\mu,$$

и равенство (110.18) удовлетворяется в силу уравнений

$$(\gamma p - m)u = 0 \quad \overline{u}(\gamma p - m) = 0.$$

Мы видим, что при составлении амплитуды физического процесса «перенормировочная постоянная» Z_1 вообще выпадает. Мало того, воспользовавшись неопределенностью, возникающей из-за расходимостей при вычислении Γ, можно просто потребовать, чтобы было

$$\overline{u}(p)\Gamma^\mu(p, p; 0)u(p) = \overline{u}(p)\gamma^\mu u(p), \quad p^2 = m^2, \tag{110.19}$$

т. е. положить $Z_1 = 1$.

Удобство такого определения состоит в том, что отпадает необходимость во введении поправок во внешние электронные линии: имеем просто

$$\mathcal{U}(p) = u(p).$$

В этом можно убедиться и непосредственно, заметив, что при $Z_1 = 1$ массовый оператор (110.11)

$$\mathcal{M} = (\gamma p - m)g(\gamma p - m) \tag{110.20}$$

и второй член в (110.12) очевидным образом обращается в нуль. Таким образом, не будут требовать «перенормировки» внешние линии всех реальных частиц — как фотонов, так и электронов [1]) .

§ 111. Аналитические свойства фотонного пропагатора

Исследование аналитических свойств фотонного пропагатора удобно начать с изучения свойств функции $\Pi(k^2)$. Дело в том, что прямое использование для этой цели определения (103.1) затрудняется калибровочной неоднозначностью операторов $\widehat{A}^\mu(x)$ и проистекающей отсюда неопределенностью их свойств.

[1]) При перенормировке фотонного пропагатора условие $Z = 1$ возникало как необходимое физическое требование, а после этого исчезновение поправок к внешним фотонным линиям происходит уже автоматически. С формальной точки зрения, однако, ситуации для фотонных и электронных внешних линий аналогичны: при $Z \neq 1$ волновая амплитуда e_μ реального фотона с учетом поправок умножалась бы на $\sqrt{Z}$.

Исходя из выражения собственно-энергетической функции фотона через матричные элементы калибровочно-инвариантного оператора тока в § 104 было получено интегральное представление функции $\Pi(k^2)$ (104.11). Обозначив переменную k^2 через t [1]), рассмотрим свойства функции $\Pi(t)$ в плоскости комплексного t. Из интегрального представления

$$\Pi(t) = \int_0^\infty \frac{\rho(t')dt'}{t - t' + i0} \tag{111.1}$$

видно, что на отрицательной вещественной полуоси функция $\Pi(t)$ вещественна, а во всей остальной плоскости удовлетворяет соотношению симметрии

$$\Pi(t^*) = \Pi^*(t). \tag{111.2}$$

Функция $\Pi(t)$ может иметь особенность лишь в особых точках функции $\rho(t)$. Последние лежат при значениях $t = k^2$, являющихся пороговыми для рождения виртуальным фотоном различных совокупностей реальных частиц. При этих значениях «вступают в игру» новые типы промежуточных состояний в сумме (104.9). Вклад от этих состояний равен нулю ниже порога и отличен от нуля выше порога, что и приводит к особенности функции в самой точке порога. Эти пороговые значения, разумеется, вещественны и неотрицательны [2]). Поэтому и особые точки функции $\Pi(t)$ лежат на положительной вещественной полуоси переменной t. Если провести разрез по этой полуоси, то функция $\Pi(t)$ будет аналитична во всей разрезанной таким образом плоскости.

Член $+i0$ в знаменателе подынтегрального выражения в (111.1) показывает, что полюс $t' = t$ должен обходиться снизу. Иными словами, под значением функции $\Pi(t)$ при вещественном t следует понимать ее значение на верхнем берегу разреза. Используя правило (75.18):

$$\frac{1}{x \pm i0} = P\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \tag{111.3}$$

находим, что для вещественных t

$$\operatorname{Im}\Pi(t) \equiv \operatorname{Im}\Pi(t + i0) = -i\pi\rho(t). \tag{111.4}$$

На нижнем же берегу разреза $\operatorname{Im}\Pi$ имеет обратный знак, а $\operatorname{Re}\Pi$ на обоих берегах одинаково. Поэтому скачок функции $\Pi(t)$ на разрезе

$$\operatorname{Im}\Pi(t + i0) - \operatorname{Im}\Pi(t - i0) = -2\pi i\rho(t). \tag{111.5}$$

---

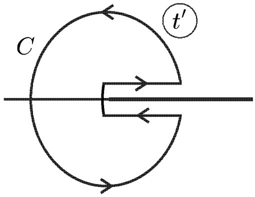
[1]) Не смешивать с обозначением времени!

[2]) Так, точка $k^2 = 0$ является порогом для рождения трех (или большего нечетного числа) реальных фотонов, точка $k^2 = 4m^2$ — порог для рождения электрон-позитронной пары и т. п.

Само интегральное представление (111.1) можно рассматривать в этом аспекте просто как формулу Коши для аналитической функции $\Pi(t)$. Действительно, применим формулу Коши

$$\Pi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_G \frac{\Pi(t')dt'}{t'-t} \tag{111.6}$$

к контуру



(111.7)

огибающему разрез. В предположении достаточно быстрого убывания $\Pi(t)$ на бесконечности, интеграл по большой окружности исчезает, а интегралы по берегам разреза дают следующую формулу (*дисперсионное соотношение*), определяющую функцию $\Pi(t)$ по ее мнимой части:

$$\Pi(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\Pi(t'+i0)}{t'-t}dt' = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\Pi(t')}{t'-t-i0}dt'. \tag{111.8}$$

Подставив сюда (111.4), получим (111.1) [1]).

Аналитические свойства функций $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{D}(t)$ совпадают со свойствами функции $\Pi(t)$, через которую они выражаются простыми формулами (104.2) и (103.21). Для $\mathcal{D}(t)$ имеем

$$\mathcal{D}(t) = \frac{4\pi}{t}\left(1 + \frac{\Pi(t)}{t}\right). \tag{111.9}$$

На вещественной полуоси ($t > 0$), согласно сказанному выше, надо понимать t как $t + i0$. Мнимую часть $\mathcal{D}(t)$ можно вычислить затем с помощью (111.3) и (111.4), причем надо учесть, что согласно (110.6) $\Pi(t)/t \to 0$ при $t \to 0$. Тогда найдем

$$\operatorname{Im}\mathcal{D}(t) = -4\pi^2\delta(t) + \frac{4\pi}{t^2}\operatorname{Im}\Pi(t) = -4\pi^2\delta(t) - \frac{4\pi^2}{t^2}\rho(t). \tag{111.10}$$

Применив теперь к функции $\mathcal{D}(t)$ дисперсионное соотношение вида (111.8), получим для нее следующее интегральное

[1]) Дисперсионные соотношения была введены в квантовую теорию поля *Гелл-Маном, Гольдбергером* и *Тиррингом* (*M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, W. E. Thirring,* 1954).

представление:

$$\mathcal{D}(t) = \frac{4pi}{t + i0} + 4\pi \int_0^\infty \frac{\rho(t')}{t'^2} \frac{dt'}{t - t' + i0}. \tag{111.11}$$

Эту формулу называют *разложением Челлена–Лемана* (*G. Källen,* 1952; *H. Lehmann,* 1954).

Существует тесная связь между положением разреза для функции $\mathcal{D}(t)$ (а тем самым и ее мнимой частью на разрезе), с одной стороны, и условием унитарности для амплитуды процесса $a + b \to c + d$, изображаемого диаграммой (110.4), с другой стороны (эта реакция, конечно, чисто воображаемая; она не противоречит, однако, законам сохранения, и формальное условие унитарности для нее должно выполняться).

В начальном состоянии (i) этого процесса имеются две «классические» частицы a и b, а в конечном — две другие c и d Условие унитарности (71.2) [1]:

$$T_{fi} - T_{if}^* = i(2\pi)^4 \sum_n T_{fn} T_{in}^* \delta^4(P_f - P_i); \tag{111.12}$$

суммирование в правой стороне производится по всем физическим «промежуточным» состояниям n. В данном случае этими состояниями являются, очевидно, состояния систем реальных пар и фотонов, которые могут быть рождены виртуальным фотоном k, т. е. как раз те состояния, которые фигурируют в матричных элементах в определении функции $\rho(k^2)$ (104.9). Амплитуды M_{fi} и M_{if} содержат соответственно множителя $\mathcal{D}(k^2)$ и $\mathcal{D}^*(k^2)$, а их разность — мнимую часть $\operatorname{Im}\mathcal{D}(k^2)$. Мы видим, таким образом, что уже известная нам (из (111.4)) связь между появлением у $\mathcal{D}$ мнимой части и существованием указанных промежуточных состояний является следствием необходимых требований унитарности.

Мы увидим в дальнейшем, что фактические вычисления по теории возмущений функции $\mathcal{D}(t)$ (или, что то же, функции $\mathcal{P}(t)$) удобно начать с вычисления мнимой части $\mathcal{P}$, в которой не возникает расходящихся выражений. Но если затем вычислять функцию $\mathcal{P}(t)$ по дисперсионной формуле вида (111.8), то интеграл окажется расходящимся и понадобится производить дополнительные операции вычитания с целью удовлетворить условиям $\mathcal{P}(0) = 0$ и $\mathcal{P}'(0) = 0$. Это вычитание можно, однако, произвести без явного оперирования с расходящимся интегралом. Для этого достаточно применить дисперсионное соотношение (111.8) не к

[1]) Напомним, что амплитуды T_{fi} отличаются от амплитуд M_{fi} лишь множителями (см. (64.10)).

самой функции $\mathcal{P}(t)$, а к функции $\mathcal{P}(t)/t^2$. Тогда $\mathcal{P}(t)$ представится в виде

$$\mathcal{P}(t) = \frac{t^2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t')}{t'^2(t' - t - i0)} dt'. \tag{111.13}$$

Этот интеграл уже сходится, а получаемая таким образом функция $\mathcal{P}(t)$ автоматически удовлетворяет требуемым условиям.

О соотношении вида (111.13) говорят как о дисперсионном соотношении «с двумя вычитаниями». Смысл использованного в нем перехода к функции $\mathcal{P}(t)/t^2$ становится особенно наглядным, если записать (111.13) в виде

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t') dt'}{t' - t - i0} - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t')}{t'} dt' - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{Im} \mathcal{P}(t')}{t'^2} dt'. \tag{111.14}$$

Если обозначить первый («нерегуляризованный») интеграл как $\overline{\mathcal{P}}(t)$, то все выражение в правой стороне будет равно

$$\overline{\mathcal{P}}(t) - \overline{\mathcal{P}}(0) - t\overline{\mathcal{P}}'(0).$$

§ 112. Регуляризация интегралов Фейнмана

Рассмотренные в § 110 физические условия перенормировки позволяют, в принципе, получить однозначным образом конечное значение амплитуды всякого электродинамического процесса при ее вычислении в любом приближении теории возмущений.

Ознакомимся прежде всего с характером расходимостей, возникающих в интегралах, написанных непосредственно по диаграммам Фейнмана. Важные указания на этот предмет дает подсчет степеней виртуальных 4-импульсов, входящих в подынтегральные выражения для этих интегралов.

Рассмотрим диаграмму n-го порядка (т. е. содержащую n вершин), имеющую N_e электронных и N_γ фотонных внешних линий. Число N_e четно, и электронные линии образуют $N_e/2$ непрерывных последовательностей, каждая из которых начинается и заканчивается внешним концом. Число же внутренних электронных линий в каждой такой последовательности на единицу меньше числа вершин на ней; поэтому полное число внутренних электронных линий в диаграмме равно

$$n - N_e/2.$$

В каждую вершину входит одна фотонная линия; в N_γ вершинах фотонная линия — внешняя, а в остальных $n - N_\gamma$ — внутренняя.

Поскольку каждая внутренняя фотонная линия связывает две вершины, полное число таких линий равно

$$(n - N_\gamma)/2.$$

Каждой фотонной внутренней линии сопоставляется множитель $D(k)$, содержащий k в степени -2. Каждой же электронной внутренней линии сопоставляется множитель $G(p)$, содержащий p (при $p^2 \gg m^2$) в степени -1. Таким образом, суммарная степень 4-импульсов в знаменателе диаграммы равна

$$2n - N_e/2 - N_\gamma.$$

Число же интегрирований (по d^4p или d^4k) в диаграмме равно числу внутренних линий, за вычетом числа $n-1$ налагаемых на виртуальные импульсы дополнительных условий (из n законов сохранения в вершинах один связывает импульсы внешних концов диаграммы). Учетверив, получим число интегрирований по всем компонентам 4-импульсов:

$$2(n - N_e - N_\gamma + 2).$$

Наконец, разность между числом интегрирований и степенью импульсов в знаменателе интегрируемого выражения (обозначим ее через r) равна

$$r = 4 - {}^3\!/_2 N_e - N_\gamma. \tag{112.1}$$

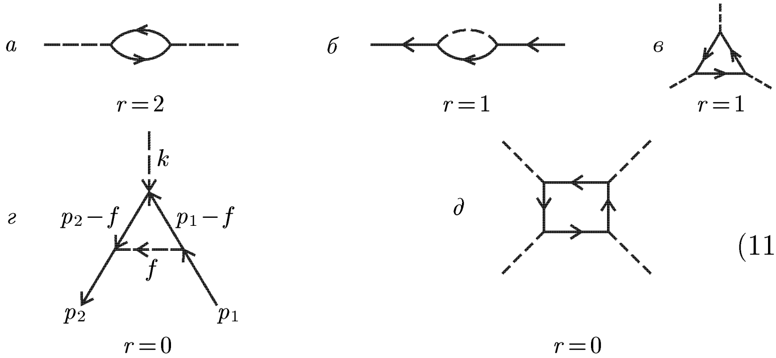
Отметим, что это число не зависит от порядка диаграммы n.

Условия $r < 0$ для диаграммы в целом, вообще говоря, недостаточно для сходимости интеграла; необходимо, чтобы были отрицательны аналогичные числа r' и для внутренних блоков, которые можно было бы выделить из диаграммы. Наличие блоков с $r' > 0$ привело бы к их расходимости, хотя остальные интегрирования в диаграмме и сходились бы при этом даже «с избытком». Условия $r < 0$, однако, достаточно для сходимости простейших диаграмм, в которых $n = N_e + N_\gamma$ и имеется всего одно интегрирование по d^4p.

Если же $r \geqslant 0$, то интеграл во всяком случае расходится. При этом степень расходимости — не менее чем r, если число r четно, и не менее чем $r-1$, если r нечетно (уменьшение степени расходимости на 1 в последнем случае связано с обращением п нуль интеграла от произведений нечетного числа 4-векторов при интегрировании по всему 4-пространству). Степень расходимости может увеличиться при наличии внутренних блоков с $r' > 0$.

Отметим, что так как N_e и N_γ — целые положительные числа, из (112.1) видно, что существует лишь несколько пар значений этих чисел, при которых $r \geqslant 0$. Перечислим простейшие диаграммы каждого из таких типов, но сразу же исключим из них

случаи $N_e = N_\gamma = 0$ (вакуумные петли) и $N_e = 0,\ N_\gamma = 1$ (среднее значение вакуумного тока), поскольку они не имеют физического смысла и соответствующие диаграммы должны просто отбрасываться, как уже было указано в § 103. Остальные случаи таковы:



(112.2)

В первом из этих случаев расходимость квадратичная, а во всех остальных ($r = 0$ или $r = 1$) — логарифмическая.

Диаграмма *г* — первая поправка к вершинному оператору. Она должна удовлетворять условию (110.19), которое запишем здесь в виде

$$\overline{u}(p)\Lambda^\mu(p, p; 0)u(p) = 0, \quad p^2 = m^2. \tag{112.3}$$

где

$$\Lambda^\mu = \Gamma^\mu - \gamma^\mu. \tag{112.4}$$

Обозначим интеграл Фейнмана, записанный прямо по диаграмме, через $\overline{\Lambda}^\mu(p_2, p_1; k)$. Этот интеграл логарифмически расходится и сам по себе условию (112.3) не удовлетворяет. Мы, однако, получим величину, удовлетворяющую этому условию, образовав разность

$$\Lambda^\mu(p_2, p_1; k) = \overline{\Lambda}^\mu(p_2, p_1; k) - \overline{\Lambda}^\mu(p_1, p_1; 0)|_{p_1^2=m^2}. \tag{112.5}$$

Главный член расходимости в интеграле $\overline{\Lambda}^\mu(p_2, p_1; k)$ получится, если считать в подынтегральном выражении 4-импульс виртуального фотона f сколь угодно большой величиной. Он имеет вид [1])

$$-4\pi i e^2 \int \frac{\gamma^\nu(\gamma f)\gamma^\mu(\gamma f)\gamma_\nu}{f^2 f^2 f^2}\frac{d^4 f}{(2\pi)^4}$$

и не зависит от значений 4-импульсов внешних линий. Поэтому в разности (112.5) расходимость сокращается и получается конечная величина. О такой операции устранения расходимости путем вычитаний говорят как о *регуляризации* интеграла.

[1]) Полное выражение для интеграла записано в § 117 (см. (117.2)).

Подчеркнем, что возможность регуляризации интеграла $\overline{\Lambda}^{\mu}(p_2, p_1; k)$ путем одного вычитания обеспечивается тем, что в данном случае расходимость — лишь логарифмическая, т. е. наименее сильная из всех возможных. Если бы в интеграле содержались расходимости различных порядков, то одно вычитание при $k = 0$ могло бы оказаться недостаточным для устранения всех расходящихся членов.

После определения первой поправки в Γ^{μ} (первого члена разложения Λ^{μ}) первая поправка в электронном пропагаторе (диаграмма (112.2,*б*)) может быть вычислена по тождеству Уорда (108.8), которое можно записать также и в виде

$$\frac{\partial \mathcal{M}(p)}{\partial p_{\mu}} = -\Lambda^{\mu}(p, p; 0), \tag{112.6}$$

введя массовый оператор $\mathcal{M}$ вместо $\mathcal{G}$ и Λ^{μ} вместо Γ^{μ}. Это уравнение должно быть проинтегрировано с граничным условием

$$\overline{u}(p)\mathcal{M}(p)u(p) = 0, \quad p^2 = m^2, \tag{112.7}$$

следующим из (110.20).

Наконец, для вычисления первого члена разложения поляризационного оператора обратимся к тождеству (108.14); после упрощения по двум парам индексов оно дает уравнение

$$\frac{3}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial k_{\sigma}\partial k^{\sigma}} = 2\mathcal{G},$$

связывающее скалярные функции

$$\mathcal{P} = {}^1\!/_3\mathcal{P}^{\mu}_{\mu} \quad \text{и} \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mu\rho}{}^{\rho\mu}.$$

Обе эти функции зависят только от скалярной же переменной k^2 поэтому находим

$$2k^2\mathcal{P}''(k^2) + \mathcal{P}'(k^2) = \frac{4\pi}{3}\mathcal{P}(k^2), \tag{112.8}$$

где штрихи означают дифференцирование по k^2. Ввиду условия $\mathcal{P}'(0) = 0$ из этого уравнения ясно, что должно быть и

$$\mathcal{P}(0) = 0. \tag{112.9}$$

В первом приближении теории возмущений $\mathcal{P}(k^2)$ определяется диаграммой (112.2,*д*) (с 4-импульсами концов k, k, 0, 0). Соответствующий интеграл Фейнмана (обозначим его через $\overline{\mathcal{G}}(k^2)$) расходится логарифмически, и его регуляризация осуществляется одним вычитанием по условию (112.9):

$$\mathcal{G}(k^2) = \overline{\mathcal{G}}(k^2) - \overline{\mathcal{G}}(0).$$

После этого $\mathcal{P}(k^2)$ определяется решением уравнения (112.8) с граничными условиями $\mathcal{P}(0) = 0$, $\mathcal{P}'(0) = 0$.

В следующем приближении теории возмущений поправка к вершинному оператору ($\Lambda_\mu^{(2)}$) определяется диаграммами (106.10,*в–и*). Из них неприводимая (106.10,*г*) вычисляется такой же регуляризацией интегралов с помощью одного вычитания согласно (112.5), как и при вычислении поправки первого приближения $\Lambda_\mu^{(1)}$. Содержащиеся же в приводимых диаграммах внутренние собственно-энергетические и вершинные части более низкого порядка сразу заменяются известными уже (регуляризованными) величинами первого приближения ($\mathcal{P}^{(1)}$, $\mathcal{M}^{(1)}$, $\Lambda_\mu^{(1)}$), после чего получившиеся интегралы регуляризуются снова согласно (112.5) [1]). Поправки $\mathcal{P}^{(2)}$ и $\mathcal{M}^{(2)}$ могут быть затем вычислены с помощью уравнений (112.6) и (112.8).

Описанная систематическая процедура дает, в принципе, возможность получить конечные выражения для $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$ и Λ_μ в любом приближении теории возмущений. Тем самым становится возможным и вычисление амплитуд физических процессов рассеяния, описывающихся диаграммами, в которые блоки $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$, Λ_μ входят как составные части.

Мы видим, таким образом, что установленные выше (см. § 111) физические условия оказываются достаточными для однозначной регуляризации всех встречающихся в теории диаграмм Фейнмана. Это обстоятельство является отнюдь не тривиальным свойством квантовой электродинамики и носит название *перенормируемости* [2]).

Для фактического вычисления радиационных поправок описанная выше процедура может, однако, оказаться не наиболее простым и рациональным путем. В следующей главе мы увидим, в частности, что целесообразный путь может начинаться с вычисления мнимой части соответствующих величин; эти части даются интегралами, не содержащими расходимостей. Вся величина в целом определяется затем путем аналитического продолжения с помощью дисперсионных соотношений. Тем самым оказывается возможным избежать громоздких вычислений, требуемых для прямой регуляризации путем вычитаний.

---

[1]) В диаграммах же еще более высоких приближений может оказаться необходимым заранее заменить уже регуляризованными значениями также и «четыреххвостые» блоки $\mathcal{G}$.

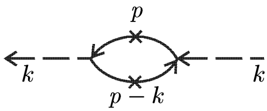
[2]) Другой подход к теории перенормировок в квантовой электродинамике изложен в книге: *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1984.

ГЛАВА XII

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ

§ 113. Вычисление поляризационного оператора

Приступая к фактическому вычислению радиационных поправок, начнем с вычисления поляризационного оператора (*J. Schwinger,* 1949; *R. P. Feynman,* 1949). В первом приближении теории возмущений он дается петлей в диаграмме



(113.1)

Как уже отмечалось, задача облегчается, если начать ее с вычисления мнимой части искомой функции. В свою очередь это вычисление проще всего осуществляется путем использования соотношения унитарности. При этом линии виртуального фотона рассматриваются как отвечающие воображаемой «реальной» частице — векторному бозону массы $M^2 = k^2$, взаимодействующему с электроном по тому же закону, что и фотон. Тем самым (113.1) становится диаграммой «реального» процесса, чем и оправдывается применение к ней условия унитарности.

Таким образом, рассматриваем (113.1) как диаграмму для амплитуды перехода бозона самого в себя (диагональный элемент S-матрицы) через распад на электрон-позитронную пару. Крестики на диаграмме (113.1) показывают, по каким линиям она должна быть рассечена на две части так, чтобы показать промежуточное состояние, фигурирующее при применении соотношения унитарности. Это состояние содержит электрон с 4-импульсом $p_- = p$ и позитрон с $p_+ = -(p-k)$.

Соотношение унитарности с двухчастичным промежуточным состоянием (71.4) при совпадающих начальном и конечном состояниях дает

$$2\,\mathrm{Im}\,M_{ii} = \frac{|\mathbf{p}|}{(4\pi)^2\varepsilon}\sum_{\text{поляр}}\int |M_{ni}|^2 do. \tag{113.2}$$

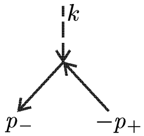
Здесь амплитуда M_{ii}, составленная по диаграмме (113.1), есть

$$iM_{ii} = \sqrt{4\pi}e^*_\mu\sqrt{4\pi}e_\nu\frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi}, \tag{113.3}$$

где e_μ — 4-вектор поляризации бозона; согласно (14.13) он удовлетворяет уравнению

$$e_\mu k^\mu = 0.$$

Амплитуде же M_{ni} отвечает диаграмма распада бозона на пару:



Соответствующее выражение имеет вид

$$M_{ni} = -e\sqrt{4\pi} e_\mu j^\mu, \quad j^\mu = \overline{u}(p_-)\gamma^\mu u(-p_+). \tag{113.4}$$

Подставив (113.3),(113.4) в (113.2), получим

$$2e^*_\mu e_\nu \operatorname{Im} \mathcal{P}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi}\frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \sum_{\text{поляр}} \int j^{\mu^*} j^\nu e^*_\mu e_\nu \, do. \tag{113.5}$$

При этом $\mathbf{p} = \mathbf{p}_- = -\mathbf{p}_+$ и $\varepsilon = \varepsilon_+ + \varepsilon_- = 2\varepsilon_+$ — импульсы и суммарная энергия пары в системе ее центра инерции; интегрирование производится по направлениям $\mathbf{p}$, а суммирование — по поляризациям обеих частиц.

Усредним теперь обе стороны равенства (113.5) по поляризациям бозона. Усреднение осуществляется формулой

$$\overline{e^*_\mu e_\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$

(ср. (14.5)). Приняв во внимание поперечность тензора $\mathcal{P}^{\mu\nu}$ и вектора j^μ ($\mathcal{P}^{\mu\nu}k_\nu = 0$, $j^\mu k_\mu = 0$) и использовав, что $\mathcal{P}^\mu_\mu = 3\mathcal{P}$, получим в результате

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{P} = \frac{1}{12\pi}\frac{|\mathbf{p}|}{\varepsilon} \sum_{\text{поляр}} \int (jj^*) do. \tag{113.6}$$

Суммирование по поляризациям производится обычным образом, интегрирование по do сводится к умножению на 4π, и в результате находим

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{P} = e^2 \frac{|\mathbf{p}|}{3\varepsilon} \operatorname{Sp} \gamma_\mu(\gamma p_- + m)\gamma^\mu(\gamma p_+ - m) =$$
$$= -e^2 \frac{8|\mathbf{p}|}{3\varepsilon}(p_+ p_- + 2m^2).$$

Введем переменную

$$t = k^2 = (p_+ + p_-)^2 = 2(m^2 + p_+ p_-). \tag{113.7}$$

Тогда

$$\varepsilon^2 = t, \quad \mathbf{p}^2 = t/4 - m^2,$$

и окончательная формула для $\operatorname{Im}\mathcal{P}$ принимает вид

$$\operatorname{Im}\mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{3}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}(t+2m^2), \qquad t \geqslant 4m^2. \tag{113.8}$$

Значение $t = 4m^2$ — пороговое для рождения виртуальным фотоном одной электрон-позитронной пары (ср. примечание на с. 550); в рассматриваемом приближении теории возмущений ($\sim e^2$) состояние с одной парой является единственным, которое может фигурировать в качестве промежуточного состояния в условии унитарности (113.2). В том же приближении, следовательно, при $t < 4m^2$, правая сторона в (113.2) равна нулю, так что

$$\operatorname{Im}\mathcal{P}(t) = 0, \qquad t < 4m^2. \tag{113.9}$$

По этой же причине в рассматриваемом приближении разрез для функции $\mathcal{P}(t)$ в плоскости комплексного t простирается лишь от точки $t = 4m^2$ на вещественной оси, и эта точка долж-

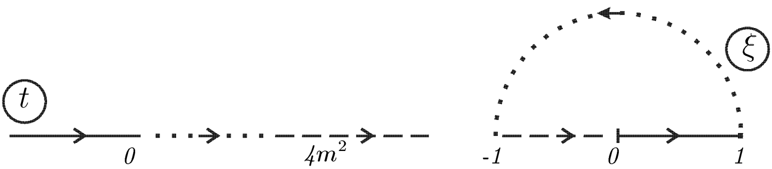


Рис. 19

на фигурировать в качестве нижнего предела в дисперсионном интеграле (111.13). Таким образом, имеем

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{3\pi}t^2\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{dt'}{t'-t-i0}\sqrt{\frac{t'-4m^2}{t'}}\,\frac{t'+2m^2}{t'^2}. \tag{113.10}$$

Для формулировки результата удобно ввести вместо t другую переменную, определив ее следующим образом:

$$t/m^2 = -(1-\xi)^2/\xi. \tag{113.11}$$

Это преобразование отображает верхнюю полуплоскость комплексного t на полукруг единичного радиуса в верхней полуплоскости комплексного ξ, как показано на рис. 19 (одинаковой штриховкой изображены соответствующие друг другу отрезки в обеих плоскостях). Нефизической области ($0 \leqslant t/m^2 \leqslant 4$) отвечает при

этом полуокружность $\xi = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Физическим же областям ($t<0$ и $t/m^2>4$) отвечают правый и левый вещественные радиусы.

Интеграл (113.10) проще всего вычисляется с помощью подстановки

$$t'/(4m^2) = 1/(1-x^2),$$

причем сначала имеем в виду случай $t<0$ (тогда знаменатель в области интегрирования не обращается в нуль и мнимую добавку $i0$ можно опустить). Выраженный через переменную ξ результат интегрирования имеет вид

$$\mathcal{P}(\xi) = \frac{\alpha m^2}{3\pi}\left\{-\frac{22}{3} + \frac{5}{3}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) + \left(\xi + \frac{1}{\xi} - 4\right)\frac{1+\xi}{1-\xi}\ln\xi\right\}. \qquad (113.12)$$

Аналитическое продолжение этой формулы определит функцию $\mathcal{P}(t)$ и в области $t>4m^2$: для этого надо положить в ней $\xi = \xi e^{i\pi}$ (при этом логарифм дает вклад в мнимую часть: $\ln\xi = \ln\xi + i\pi$) [1]. Для нефизической области надо положить $\xi = e^{i\varphi}$, и тогда

$$\mathcal{P}(t) = \frac{2\alpha m^2}{3\pi}\left\{-\frac{10}{3}\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2 + \left(1 + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\varphi\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right\}, \quad \frac{t}{4m^2} = \sin^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (113.13)$$

В предельном случае малых $|t|$ ($\xi \to 1$) эти формулы дают

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{15\pi}\frac{t}{m^2}, \qquad |t| \ll 4m^2. \qquad (113.14)$$

В обратном же случае больших $|t|$ ($\xi \to 0$), получим

$$\mathcal{P}(t) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{3\pi}|t|\ln\dfrac{|t|}{m^2}, & -t \gg 4m^2, \\ \dfrac{\alpha}{3\pi}t\left(\ln\dfrac{t}{m^2} - i\pi\right), & t \gg 4m^2. \end{cases} \qquad (113.15)$$

По смыслу теории возмущений полученные формулы справедливы до тех пор, пока $\mathcal{P}/(4\pi) \ll D^{-1} = t/(4\pi)$. Поэтому условие применимости формул (113.15):

$$\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|t|}{m^2} \ll 1. \qquad (113.16)$$

Радиационные поправки, содержащие $\alpha\ln(|t|/m)$, называют *логарифмическими*.

---

[1]) Осуществляемое таким образом аналитическое продолжение есть, как и требуется, продолжение на верхний берег разреза, поскольку полукруг на плоскости ξ соответствует именно верхней полуплоскости t.

§ 114. Радиационные поправки к закону Кулона

Исследуем на основании полученных формул радиационные поправки к закону Кулона. Эти поправки можно наглядно описать как результат *поляризации вакуума* вокруг точечного заряда.

Без учета поправок поле неподвижного центра (с зарядом e_1) дается кулоновым скалярным потенциалом $\Phi \equiv A_0^{(e)} = e_1/r$. Компоненты его трехмерного разложения Фурье:

$$\Phi(\mathbf{k}) \equiv A_0^{(e)}(\mathbf{k}) = 4\pi e_1/\mathbf{k}^2.$$

С учетом радиационных поправок это поле заменяется «эффективным полем»:

$$\mathcal{A}_0^{(e)} = A_0^{(e)} + \mathcal{D}_{0\rho}\frac{\mathcal{P}^{\rho\lambda}}{4\pi}A_\lambda^{(e)} = A_0^{(e)} + \frac{1}{4\pi}\mathcal{P}\mathcal{D}A_0^{(e)} \tag{114.1}$$

(ср. (103.5)). Второй член и дает искомую добавку к скалярному потенциалу. В первом приближении теории возмущений для $\mathcal{P}(k^2)$ надо взять полученное в предыдущем параграфе выражение, а функцию $\mathcal{D}(k^2)$ заменить ее нулевым приближением

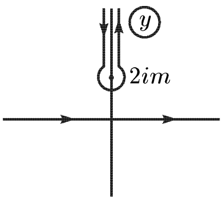


Рис. 20

$$\mathcal{D}(k^2) \approx D(k^2) = -4\pi/\mathbf{k}^2.$$

Таким образом, радиационная поправка к потенциалу поля

$$\delta\Phi(\mathbf{k}) = -\frac{4\pi e_1}{(\mathbf{k}^2)^2}\mathcal{P}(-\mathbf{k}^2). \tag{114.2}$$

Для определения вида этой поправки в координатном представлении надо произвести обратное преобразование Фурье:

$$\delta\Phi(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\delta\Phi(\mathbf{k})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{114.3}$$

Поскольку $\delta\Phi(\mathbf{k})$ — функция лишь от $t = -\mathbf{k}^2$, то, произведя интегрирование по углам, получим

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty \delta\Phi(t)\frac{\sin(r\sqrt{-t})}{r}d(-t) = \frac{1}{4\pi^2 r}\,\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^\infty \delta\Phi(-y^2)e^{iry}y\,dy$$

(в последнем преобразовании использована четность подынтегрального выражения как функции от $y = \sqrt{-t}$). Теперь можно сместить контур интегрирования в верхнюю полуплоскость комплексной переменной y, совместив его с разрезом функции

$\mathcal{P}(-y^2)$ (рис. 20). Этот разрез начинается от точки $2im$ и идет вверх по мнимой оси (причем физическому листу соответствует левый берег разреза). Введя вместо y новую переменную, согласно $y = ix$, найдем

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{2\pi^2 r}\int\limits_{2m}^{\infty} \operatorname{Im}\delta\Phi(x^2)e^{-rx}x\,dx.$$

Наконец, возвращаясь к интегрированию по $t = x^2$, имеем окончательно:

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{2\pi^2 r}\int\limits_{4m^2}^{\infty} \operatorname{Im}\delta\Phi(t)e^{-r\sqrt{t}}\,dt. \tag{114.4}$$

Мнимую часть

$$\operatorname{Im}\delta\Phi(t) = -\frac{4\pi e}{t^2}\operatorname{Im}\mathcal{P}(t)$$

берем из (113.8) и после очевидной замены переменной находим

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r} + \delta\Phi(r) = \frac{e_1}{r}\left\{1 + \frac{2\alpha}{3\pi}\int\limits_1^{\infty} e^{-2mr\zeta}\left(1 + \frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2}\,d\zeta\right\} \tag{114.5}$$

(*E. Uehling, R. Serber,* 1935).

Входящий сюда интеграл может быть вычислен в двух предельных случаях.

Рассмотрим прежде всего малые r ($mr \ll 1$). Разобьем интеграл от первого члена в круглой скобке на два:

$$I = \int\limits_1^{\infty} e^{-2mr\zeta}\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2}\,d\zeta = \int\limits_1^{\zeta_1}\ldots d\zeta + \int\limits_{\zeta_1}^{\infty}\ldots d\zeta \equiv I_1 + I_2,$$

причем ζ_1 выбрано так, что $1/(mr) \gg \zeta_1 \gg 1$. В силу этого в первом интеграле можно положить $r = 0$, и тогда

$$I_1 \approx \int\limits_1^{\zeta_1}\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2}\,d\zeta \approx \ln 2\zeta_1 - 1.$$

В I_2 можно, напротив, пренебречь единицей под корнем:

$$I_2 \approx \int\limits_{\zeta_1}^{\infty} e^{-2mr\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta} = -\ln\zeta_1\cdot e^{-2mr\zeta_1} + 2mr\int\limits_{\zeta_1}^{\infty} e^{-2mr\zeta}\ln\zeta\,d\zeta.$$

В экспоненте и нижнем пределе интеграла можно положить $\zeta_1 = 0$. Сделав после этого замену переменной $2mr\zeta = x$, получим

$$I_2 = -\ln(2\zeta_1) + \ln\frac{1}{mr} + \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\ln(2\zeta_1) + \ln\frac{1}{mr} - C,$$

где $C = 0,577\ \ldots$ — постоянная Эйлера. В интеграле же от второго члена в (114.5) можно сразу положить $r = 0$:

$$I_3 \approx \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^4}\,d\zeta = \frac{1}{6}.$$

Складывая все три интеграла (причем вспомогательное число ζ_1 сокращается), получаем

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r}\left[1 + \frac{2\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{1}{mr} - C - \frac{5}{6}\right)\right], \quad r \ll \frac{1}{m}. \qquad (114.6)$$

При $mr \gg 1$ в интеграле существенна область $\zeta - 1 \sim 1/(mr) \ll 1$. Заменой $\zeta = 1 + \xi$ и соответствующими пренебрежениями он сводится к интегралу

$$e^{-2mr}\int_0^\infty e^{-2mr\xi}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2\xi}\,d\xi = \frac{3}{8(mr)^{3/2}}\sqrt{\pi}e^{-2mr}.$$

Таким образом, в этом случае [1])

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r}\left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}\right), \quad r \gg \frac{1}{m}. \qquad (114.7)$$

Мы видим, что поляризация вакуума искажает кулоново поле точечного заряда в области $r \sim 1/m$ $(= \hbar/(mc))$, где m — масса электрона. Вне этой области искажение поля убывает по экспоненциальному закону.

Сделаем еще одно замечание, имеющее общий характер. Мы подразумевали до сих пор, что радиационные поправки происходят от взаимодействия фотонного поля с электрон-позитронным. Так, приписывая внутренние замкнутые петли в фотонных собственно-энергетических диаграммах электронам, мы учитывали тем самым взаимодействие фотона с «электронным вакуумом». Но фотон взаимодействует и с полями других частиц; взаимодействие с «вакуумами» этих полей описывается такими же собственно-энергетическими диаграммами, в которых внутренние

---

[1]) Происхождение множителя e^{-2mr} в $\delta\Phi(r)$ понятно уже из вида исходного интеграла (114.4): при больших r в нем существенны значения t вблизи нижнего предела. Другими словами, показатель экспоненциального множителя определяется положением первой особенности функции $\delta\Phi(e)$.

петли приписываются соответствующим частицам. Вклады таких диаграмм по порядку величины отличаются от вкладов электронных диаграмм некоторыми степенями отношения m_e/m, где m — масса данной частицы, а m_e — масса электрона.

Ближайшие по массе к электрону частицы — мюоны и пионы. Численно отношения m_e/m_μ и m_e/m_π близки к α. Поэтому радиационные поправки от этих частиц должны были бы учитываться вместе с электронными поправками следующих порядков. Но если для мюонов вычисление радиационных поправок с помощью существующей теории в принципе допустимо, то для пионов (являющихся сильно взаимодействующими частицами) это невозможно.

Это обстоятельство в принципе ограничивает возможность точных расчетов конкретных эффектов в существующей квантовой электродинамике. Рассмотрение же в сколь угодно высоких приближениях поправок от одного лишь фотон-электронного взаимодействия было бы превышением допустимой точности.

Рассмотренные в этом параграфе радиационные поправки к закону Кулона простираются, как мы видели, в области расстояний $r \lesssim 1/m_e$. Мы можем теперь добавить, что полученные формулы недостаточны на расстояниях $r < 1/m_\mu$ (или $1/m_\pi$), где становятся существенными также и эффекты поляризации вакуума других частиц.

§ 115. Вычисление мнимой части поляризационного оператора по интегралу Фейнмана

При прямом вычислении по диаграмме (петля на диаграмме (113.1)) поляризационный оператор в первом приближении теории возмущений давался бы интегралом

$$\frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi} \to -e^2 \int \mathrm{Sp}\, \gamma^\mu G(p) \gamma^\nu G(p-k) \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \qquad (115.1)$$

Однако этот интеграл, взятый по всему четырехмерному p-пространству, квадратично расходится и для получения конечного результата должен быть регуляризован по описанным в § 112 правилам.

Мы не будем воспроизводить здесь полностью такой вывод, но покажем, каким образом можно вычислить по интегралу (115.1) мнимую часть поляризационного оператора (которая была определена нами в § 113 с помощью условия унитарности); этот вывод содержит в себе ряд поучительных моментов.

Мнимая часть интеграла (115.1) не содержит расходимости и не требует поэтому регуляризации. Для скалярной функции

$\operatorname{Im}\mathcal{P} = {}^1\!/_3 \operatorname{Im}\mathcal{P}^\mu_\mu$ имеем

$$\operatorname{Im}\mathcal{P} = \operatorname{Im}\left\{ i\frac{4\pi e^2}{3(2\pi)^4}\int \frac{\operatorname{Sp}\gamma^\mu(\gamma p+m)\gamma_\mu(\gamma p+\gamma k+m)}{(p^2-m^2+i0)[(p-k)^2-m^2+i0]}\,d^4p\right\}.$$

После вычисления следа интеграл принимает вид

$$\operatorname{Im}\mathcal{P}(k^2) = \operatorname{Im}\int \frac{i\varphi(p)\,d^4p}{(p^2-m^2+i0)[(p-k)^2-m^2+i0]},$$
$$\varphi(p) = \frac{2e^2}{3\pi^3}(2m^2+pk-p^2). \qquad (115.2)$$

Пусть $k^2 > 0$. Переходим к системе отсчета, в которой $k = (k_0,\ 0)$. В этой системе

$$(p-k)^2 = (p_0-k_0)^2 - \mathbf{p}^2.$$

Введя также обозначение $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ (ε не совпадает с «энергией» виртуального электрона p_0!), перепишем (115.2) в виде

$$\operatorname{Im}\mathcal{P}(k^2) = \operatorname{Im}\int d^3p\int_{-\infty}^{\infty} dp_0\frac{i\varphi(p_0,\,\mathbf{p})}{(p_0^2-\varepsilon^2+i0)[(p_0-k_0)^2-\varepsilon^2+i0]},$$
$$\varphi(p_0,\,\mathbf{p}) = \frac{2e^2}{3\pi^3}(m^2+\varepsilon^2+p_0k_0-p_0^2). \qquad (115.3)$$

Подынтегральное выражение имеет четыре полюса по переменной p_0:

$$a)\; p_0 = \varepsilon - i0, \qquad a')\; p_0 = -\varepsilon - i0,$$
$$b)\; p_0 = k_0 - \varepsilon + i0, \qquad b')\; p_0 = k_0 + \varepsilon - i0.$$

На рис. 21 показано расположение этих полюсов; для определенности будем считать, что $k_0 > 0$ (окончательный ответ есть функция от k_0^2 и от знака k_0 не зависит). Вычислим скачок функции $\mathcal{P}(t)$, испытываемый ею на разрезе в плоскости комплексной переменной $t = k^2 = k_0^2$ или, что то же самое, на вещественной оси в плоскости комплексного k_0. Вещественная часть функции $\mathcal{P}(t)$ непрерывна на разрезе, так что скачок

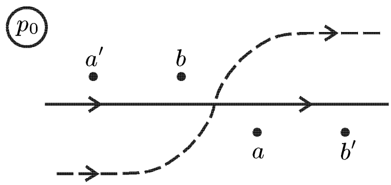


Рис. 21

$$\Delta\mathcal{P}(t) = 2i\operatorname{Im}\mathcal{P}(t). \qquad (115.4)$$

Прежде всего покажем, каким образом уже по виду интеграла можно установить положение разреза. Обозначим в (115.3) интеграл по p_0 как $I(\mathbf{p},\ k_0)$. До тех пор, пока верхние и нижние полюсы на рис. 21 находятся на конечных расстояниях друг

от друга, путь интегрирования по p_0 можно увести вдаль от полюсов (штриховая линия на рисунке). В этом случае интеграл $I(\mathbf{p},\ k_0)$ не изменится при бесконечно малом смещении полюсов b и b' вниз или вверх от вещественной оси, т. е. при замене $k_0 \to k_0 + i\delta$, $\delta \to 0$. Другими словами, значения $I(\mathbf{p},\ k_0)$ при стремлении k_0 к своему вещественному значению сверху и снизу будут одинаковы, так что $I(\mathbf{p},\ k_0)$ не даст вклада в скачок $\Delta\mathcal{P}$. Ситуация изменится, лишь если два полюса (при $k_0 > 0$ это могут быть полюсы a и b) окажутся как раз один под другим, так что контур интегрирования будет «зажат» между ними и не сможет быть уведен. Таким образом, скачок $\Delta\mathcal{P} \neq 0$, лишь если где-либо в области интегрирования по d^3p может быть выполнено условие $k_0 - \varepsilon = \varepsilon$, т. е. $k_0 = 2\varepsilon = 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Для этого, очевидно, должно быть $k_0 \geqslant 2m$, т. е. $t \geqslant 4m^2$ [1]).

Перепишем интеграл $I(\mathbf{p},\ k_0)$ в виде

$$I(\mathbf{p},\ k_0) = \int\limits_G \frac{i\varphi(p_0,\, \mathbf{p})\, dp_0}{(p_0^2 - \varepsilon^2)[(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2]}, \tag{115.5}$$

опустив члены $i0$ в знаменателе и соответственно изменив контур C интегрирования, как показано на рис. 22. Мы видим, что возникновение скачка $\Delta\mathcal{P}(t)$ связано с невозможностью увода

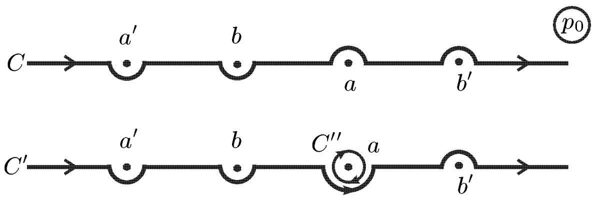


Рис. 22

контура от полюса a (когда контур зажат между a и b). Имея это в виду, заменим контур C контуром C', проходящим под точкой a, соответственно добавив интеграл по малой окружности C'' вокруг этой точки. После этого контур C' можно беспрепятственно увести от полюсов, так что интегрирование вдоль него дает вклад лишь в регулярную часть функции $\mathcal{P}(t)$. Для определения

[1]) Аналогичным образом убеждаемся в отсутствие разреза при $t = k^2 < 0$. Выбрав в этом случае систему отсчета, в которой $k = (0, \mathbf{k})$, найдем, что полюсы подынтегрального выражения лежат при

$$p_0 = \pm(\varepsilon - i0), \quad p_0 = \pm(\sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m^2} - i0).$$

Оба нижних полюса лежат всегда в правой, а оба верхних — в левой полуплоскости p_0, так что никакая их пара не может оказаться рядом.

же искомого скачка достаточно рассматривать лишь интеграл по окружности C'', что сводится к взятию вычета в полюсе a. Эта операция может быть осуществлена заменой в подынтегральном выражении:

$$\frac{1}{p_0^2 - \varepsilon^2} \to -2\pi i\delta(p_0^2 - \varepsilon^2) \tag{115.6}$$

(знак «$-$» связан с тем, что окружность вокруг полюса обходится в отрицательном направлении). При этом следует учитывать в аргументе δ-функции лишь корень $p_0 = +\varepsilon$ (обходится лишь полюс a, но не a'); это условие будет автоматически учтено, если условиться производить интегрирование лишь по половине импульсного 4-пространства: $p_0 > 0$.

После замены (115.6) скачок интеграла $I(\mathbf{p},\, k_0)$ вычисляется непосредственно:

$$\Delta I = \{I(\mathbf{p},\, k_0 + i\delta) - I(\mathbf{p},\, k_0 - i\delta)\}_{\delta\to+0} = -2\pi i \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty \delta(p_0^2 - \varepsilon^2) i\varphi(p_0,\, \mathbf{p}) \left[\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 + i\delta} - \frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 - i\delta}\right] dp_0.$$

Используя равенство

$$\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 \pm i\delta} = P\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2} \mp i\pi\delta[(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2]$$

(см. (111.3)), получаем

$$\Delta I = i(2\pi i)^2 \int\limits_0^\infty \delta(p_0^2 - \varepsilon^2)\delta[(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2]\, \varphi(p_0,\, \mathbf{p})\, dp_0.$$

Аргументы δ-функций можно переписать в инвариантном виде, вычитая и прибавляя к ним $\mathbf{p}^2$:

$$p_0^2 - \varepsilon^2 = p^2 - m^2, \quad (k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 = (k - p)^2 - m^2.$$

После этого находим окончательно

$$\Delta\mathcal{P}(k^2) = i(2\pi i)^2 \int\limits_{p_0>0} d^4p \cdot \varphi(p)\delta(p^2 - m^2)\delta[(p - k)^2 - m^2]. \tag{115.7}$$

Ввиду наличия δ-функций интегрирование производится фактически лишь в области пересечения гиперповерхностей

$$p^2 = m^2, \quad (p - k)^2 = m^2. \tag{115.8}$$

Поскольку в этой области все 4-векторы p времениподобны, то условие интегрирования по $p_0 > 0$ имеет инвариантный характер (верхняя полость конуса $p^2 = m^2$).

Сравним (115.7) с исходной формулой (115.2). Мы видим, что скачок функции $\mathcal{P}(t)$ на разрезе в плоскости t можно получить, если в исходном фейнмановском интеграле произвести замену

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i0} \to -2\pi i \delta(p^2 - m^2) \qquad (115.9)$$

в пропагаторах, отвечающих пересеченным на диаграмме (113.1) линиям петли (*S. Mandelstam,* 1958, *R. Cutkosky,* 1960).

Обратим внимание на то, что условия (115.8) выделяют ту область импульсного пространства, в которой линии виртуальных частиц на диаграмме отвечают реальным частицам (или, как говорят, 4-импульсы p и $p - k$ лежат на *массовой поверхности*). Здесь ясно видна связь с методом соотношения унитарности, в котором эти же линии заменялись на линии реальных частиц промежуточного состояния.

Мы видим также математическую причину отсутствия расходимости в мнимой части диаграммы: она определяется интегрированием по конечной области массовой поверхности вместо интегрирования по всему бесконечному импульсному 4-пространству в исходном фейнмановском интеграле.

Чтобы получить теперь из (115.7) выведенную в § 113 формулу, вернемся к системе отсчета, в которой $\mathbf{k} = 0$, и проведем интегрирование по

$$d^4p = |\mathbf{p}|\varepsilon \, d\varepsilon \, dp_0 \, do.$$

Интегрирование сводится к снятию δ-функций. При этом

$$\delta(p^2 - m^2)dp_0 = \delta(p_0^2 - \varepsilon^2)dp_0 \to \frac{1}{2\varepsilon}\delta(p_0 - \varepsilon)dp_0$$

и затем

$$\delta[(p-k)^2 - m^2]d\varepsilon = \delta[(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2]d\varepsilon = \\ = \delta(-2\varepsilon k_0 + k_0^2)d\varepsilon \to \frac{1}{2k_0}\delta\left(\varepsilon - \frac{k_0}{2}\right)d\varepsilon.$$

В результате получим

$$\Delta\mathcal{P}(t) = -\frac{i\pi^2}{2}\int\sqrt{\frac{t - 4m^2}{t}}\varphi(\varepsilon, \mathbf{p})do, \qquad (115.10)$$

где $t = k^2 = k_0^2$, а значение функции φ берется при

$$p_0 = \varepsilon = k_0/2, \quad \mathbf{p}^2 = \varepsilon^2 - m^2 = k_0^2/4 - m^2,$$

т. е. равно

$$\varphi(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{e^2}{3\pi^3}(2m^2 + t)$$

и не зависит от угла. Поэтому интегрирование по do сводится к умножению на 4π, и мы возвращаемся к (113.8).

В изложенном выводе существен только тот факт, что диаграмма рассекается на две части путем пересечения всего двух линий. Поэтому сформулированное правило остается в силе и для диаграмм, составленных из любых двух блоков, соединенных двумя (электронными или фотонными) линиями. Интеграл, вычисленный путем замены (115.9), определит при этом тот вклад в мнимую часть диаграммы, который в методе соотношения унитарности связан с соответствующим двухчастичным промежуточным состоянием.

§ 116. Электромагнитные формфакторы электрона

Рассмотрим вершинный оператор $\Gamma^\mu = \Gamma^\mu(p_2, p_1; k)$ в случае, когда две электронные линии являются внешними, а фотонная — внутренней. Электронным внешним линиям отвечают множители $u_1 = u(p_1)$ и $\overline{u}_2 = \overline{u}(p_2)$, так что Γ входит в выражение для диаграммы в виде произведения

$$j^\mu_{fi} = \overline{u}_2 \Gamma^\mu u_1. \tag{116.1}$$

Как уже отмечалось в § 111, оно представляет собой электронный ток перехода с учетом радиационных поправок. Требования релятивистской и калибровочной инвариантности позволяют установить общий вид матричной структуры этого тока.

Оператор электромагнитного взаимодействия $\widehat{V} = e(\widehat{j}\widehat{A})$ — истинный скаляр (а не псевдоскаляр), чем выражается сохранение пространственной четности в этих взаимодействиях. Поэтому ток перехода j_{fi} — истинный 4-вектор (а не псевдовектор). Он может выражаться, следовательно, только через истинные же 4-векторы, составленные из имеющихся в нашем распоряжении двух 4-векторов p_1 и p_2 (третий $k = p_2 - p_1$) и биспиноров u_1 и u_2. Таких независимых 4-векторов, билинейных по $\overline{u}_2$ и u_1, всего три:

$$\overline{u}_2 \gamma u_1, \quad (\overline{u}_2 u_1) p_1, \quad (\overline{u}_2 u_1) p_2,$$

или, что то же,

$$\overline{u}_2 \gamma u_1, \quad (\overline{u}_2 u_1) P, \quad (\overline{u}_2 u_1) k, \tag{116.2}$$

где $P = p_1 + p_2$. Но условие калибровочной инвариантности требует поперечности тока перехода к 4-импульсу фотона k:

$$j_{fi} k = 0. \tag{116.3}$$

Этому условию удовлетворяют первые два из 4-векторов (116.2): первый в силу уравнений Дирака

$$(\gamma p_1 - m) u_1 = 0, \quad \overline{u}_2 (\gamma p_2 - m) = 0, \tag{116.4}$$

а второй — потому, что $Pk = 0$. Ток j_{fi} представляется линейной комбинацией этих двух 4-векторов:

$$j^{\mu}_{fi} = f_1(\overline{u}_2 u_1)P^{\mu} + f_2(\overline{u}_2\gamma^{\mu}u_1),$$

где f_1, f_2 — инвариантные функции; их называют *электромагнитными формфакторами* электрона.

Так как 4-импульсы p_1 и p_2 относятся к свободному электрону, то $p_1^2 = p_2^2 = m^2$, и из трех 4-векторов p_1, p_2, k (связанных равенством $k = p_2 - p_1$) можно составить всего одну независимую скалярную переменную, в качестве которой выберем k^2. Тогда формфакторы — функции k^2.

Выражение для тока можно представить и в других видах, с другим выбором двух независимых членов. Использовав уравнения (116.4) и правила коммутации матриц γ, легко убедиться, что

$$(\overline{u}_2\sigma^{\mu\nu}u_1)k_{\nu} = -2m(\overline{u}_2\gamma^{\mu}u_1) + (\overline{u}_2 u_1)P^{\mu}, \tag{116.5}$$

где $\sigma^{\mu\nu} = {}^1\!/_2(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})$. Коэффициент при таком члене имеет, как мы увидим, важный физический смысл, так что будем писать

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}f(k^2) - \frac{1}{2m}g(k^2)\sigma^{\mu\nu}k_{\nu}, \tag{116.6}$$

где f, g — два других формфактора; смысл выделения множителя $1/(2m)$ выяснится ниже [1]. Для краткости мы пишем вместо тока вершинный оператор, подразумевая, что он должен браться «в обкладках» $\overline{u}_2 \ \ldots \ u_1$.

Для выяснения свойств формфакторов рассмотрим диаграмму (110.16) процесса взаимодействия электрона с внешним полем. Соответствующая ей амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = -ej^{\mu}_{fi}\mathcal{A}^{(e)}_{\mu}(k), \tag{116.7}$$

где $\mathcal{A}^{(e)}_{\mu}$ — эффективное (с учетом поляризации вакуума) внешнее поле.

Амплитуда (116.7) описывает два канала реакции. В канале рассеяния инвариантная переменная

$$t = k^2 = (p_2 - p_1)^2 \leqslant 0.$$

Заменив же $p_2 \to p_-$, $p_1 \to -p_+$, мы перейдем к аннигиляционному каналу, отвечающему рождению пары с 4-импульсами p_- и p_+. В этом канале

$$t = (p_- + p_+)^2 \geqslant 4m^2.$$

Область же значений $0 < t < 4m^2$ — нефизическая.

[1]) Во избежание недоразумений напомним: в определении (116.6) предполагается, что k — 4-импульс входящей в вершину фотонной линии; для выходящей линии знак второго члена был бы обратным.

Обратимся к условию унитарности (111.12). В канале рассеяния ($t<0$) нет в данном случае физических промежуточных состояний: один свободный электрон не может изменить свой импульс или родить какие-либо другие частицы. Нет их, конечно, и в нефизической области. Поэтому при $t<4m^2$ правая сторона в равенстве (111.12) отсутствует, так что матрица T_{fi} (или, что то же, M_{fi}) эрмитова:

$$M_{fi}=M_{if}^*.$$

Перестановка начального и конечного состояний означает перестановку p_2 и p_1, а тем самым замену $k\to -k$. Представив M_{fi} в виде (116.7), имеем поэтому

$$j_{fi}^{\mu}\mathcal{A}_{\mu}^{(e)}(k)=j_{if}^{\mu *}\mathcal{A}_{\mu}^{(e)*}(-k).$$

Но $\mathcal{A}^{(e)}(-k)=\mathcal{A}^{(e)*}(k)$, так что отсюда следует, что матрица токов перехода тоже эрмитова:

$$j_{fi}=j_{if}^* \quad \text{при} \quad t<4m^2. \tag{116.8}$$

Используя свойства матриц γ (21.7), легко проверить, что

$$(\overline{u}_2\gamma^{\mu}u_1)=(\overline{u}_1\gamma^{\mu}u_2)^*, \qquad (\overline{u}_2\sigma^{\mu\nu}u_1)=-(\overline{u}_1\sigma^{\mu\nu}u_2)^*.$$

Поэтому j_{if}^* отличается от j_{fi} лишь заменой функций $f(t)$ и $g(t)$ комплексно-сопряженными. Из равенства (116.8) следует тогда, что эти функции вещественны. Таким образом,

$$\operatorname{Im} f(t)=\operatorname{Im} g(t)=0, \quad t<4m^2. \tag{116.9}$$

В аннигиляционном же канале ($t>4m^2$) состояние f — пара, которая может превратиться в пару же с другими импульсами (упругое рассеяние) или в какую-либо более сложную систему. Поэтому правая часть условия унитарности отлична от нуля, матрица M_{fi} (а с нею и j_{fi}) не эрмитова, а потому формфакторы комплексны.

Аналитические свойства функций $f(t)$ и $g(t)$ вполне аналогичны рассмотренным в § 111 свойствам функции $\mathcal{P}(t)$ (хотя это и затруднительно доказать столь же прямым способом). Эти функции аналитичны в комплексной плоскости t, разрезанной вдоль положительной вещественной оси $t>4m^2$, причем

$$f^*(t)=f(t^*), \quad g^*(t)=g(t^*).$$

Условие перенормировки (110.19), примененное к вершинному оператору (116.6), приводит к требованию

$$f(0)=1. \tag{116.10}$$

Для того чтобы автоматически учесть это условие (при вычислении функции $f(t)$ по ее мнимой части), надо применить дисперсионное соотношение вида (111.8) не к самой функции $f(t)$, а к $(f-1)/t$. Тогда получим дисперсионное соотношение «с одним вычитанием»:

$$f(t)-1=\frac{t}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} f(t')}{t'(t'-t-i0)}\,dt'. \tag{116.11}$$

Для формфактора же $g(t)$ никакие значения физическими требованиями заранее не предписываются. Поэтому для него дисперсионное соотношение пишется «без вычитаний»:

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} g(t')}{t'-t-i0}\,dt'. \tag{116.12}$$

Значение $g(0)$ имеет важный физический смысл: оно дает поправку к магнитному моменту электрона. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим рассеяние нерелятивистского электрона в постоянном, медленно меняющемся в пространстве магнитном поле.

Член в амплитуде рассеяния (116.7), связанный с формфактором $g(k^2)$, имеет вид

$$\delta M_{fi}=\frac{e}{2m}g(k^2)(\overline{u}_2\sigma^{\mu\nu}u_1)k_\nu A^{(e)}_\mu(k). \tag{116.13}$$

Для чисто магнитного поля $A^{(e)\mu}=(0,\ \mathbf{A})$; постоянство поля во времени означает, что 4-вектор $k^\mu=(0,\ \mathbf{k})$, а медленному изменению поля в пространстве отвечают малые $\mathbf{k}$ (имея в виду дальнейший переход к пределу $\mathbf{k}\to 0$, сразу пишем в (116.13) $A^{(e)}$ вместо эффективного $\mathcal{A}^{(e)}$). Раскрыв выражение (116.13) и выразив его через трехмерные величины, получим

$$\delta M_{fi}=\frac{e}{2m}g(-\mathbf{k}^2)(\overline{u}_2\Sigma u_1)i[\mathbf{k}\mathbf{A}_\mathbf{k}],$$

где Σ — матрица (21.21). Произведение $i[\mathbf{k}\mathbf{A}_\mathbf{k}]$ заменяем напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}_\mathbf{k}$, после чего можно перейти к пределу $\mathbf{k}\to 0$. Наконец, введя нерелятивистские спинорные амплитуды w_1, w_2, согласно (23.12),

$$\overline{u}_2=\sqrt{2m}(w_2^*\,0),\qquad u_1=\sqrt{2m}\begin{pmatrix} w_1\\ 0\end{pmatrix},$$

находим окончательно

$$\delta M_{fi}=\frac{e}{2m}g(0)\mathbf{H}_\mathbf{k}\cdot 2m(w_2^*\boldsymbol{\sigma}w_1). \tag{116.14}$$

Сравним это выражение с амплитудой рассеяния в постоянном электрическом поле со скалярным потенциалом $\Phi_{\mathbf{k}}$:

$$M_{fi} = -e(\overline{u}_2\gamma^0 u_1)\Phi_{\mathbf{k}} \approx -e\Phi_{\mathbf{k}} \cdot 2m(w_2^* w_1).$$

Мы видим, что электрону в магнитном поле можно приписать дополнительную потенциальную энергию

$$-\frac{e}{2m}g(0)\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}_{\mathbf{k}}.$$

Это значит, что электрон обладает «аномальным» магнитным моментом

$$\mu' = \frac{e\hbar}{2mc}g(0) \qquad (116.15)$$

(обычные единицы) в дополнение к «нормальному» дираковскому магнитному моменту $e\hbar/(2mc)$.

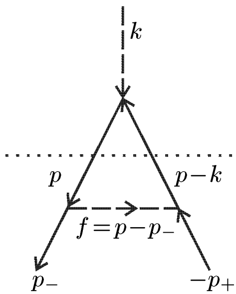
§ 117. Вычисление формфакторов электрона

Обратимся к фактическому вычислению формфакторов электрона (*J. Schwinger*, 1949).

В нулевом приближении теории возмущений вершинный оператор $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$, т. е. электронные формфакторы

$$f = 1, \qquad g = 0.$$

Первая радиационная поправка к формфакторам определяется вершинной диаграммой



(117.1)

(с двумя реальными электронными концами и одним виртуальным фотонным концом). Мы начнем с вычисления мнимых частей формфакторов. Как было показано в предыдущем параграфе, они отличны от нуля лишь в аннигиляционном канале ($k^2 > 4m^2$); в соответствии с этим 4-импульсы электронных концов в диаграмме (117.1) отвечают рождающимся электрону и

позитрону и обозначены через p_- и $-p_+$. Аналитическое выражение диаграммы (117.1):

$$-ie\overline{u}(p_-)\Gamma^\mu u(-p_+) = \\ =(-ie)^3\overline{u}(p_-)\gamma^\nu i\int G(p)\gamma^\mu G(p-k)\gamma^\lambda D_{\lambda\nu}(f)\frac{d^4p}{(2\pi)^4}u(-p_+), \quad (117.2)$$

или, в раскрытом виде,

$$\gamma^\mu f(k^2) - \frac{1}{2m}g(k^2)\sigma^{\mu\nu}k_\nu = \int\frac{i\varphi^\mu(p)\,d^4p}{(p^2-m^2)[(p^2-k^2)-m^2]}, \quad (117.3)$$

где обозначено

$$\varphi^\mu(p) = -e^2\frac{\gamma^\nu(\gamma p+m)\gamma^\mu(\gamma p-\gamma k+m)\gamma_\nu}{4\pi^3(p_--p)^2} \quad (117.4)$$

и для краткости опущены множители $\overline{u}(p_-)\ \ldots\ u(-p_+)$; везде ниже подразумевается, что обе стороны равенства берутся в этих «обкладках».

Проведенный на диаграмме (117.1) горизонтальный пунктир рассекает ее на две части таким образом, чтобы показать промежуточное состояние, которое фигурировало бы при вычислении мнимой части формфактора по условию унитарности: это есть состояние электрон-позитронной пары с импульсами, отличными от p_-, p_+. Это же рассечение показывает, где в интеграле (117.2) должна быть произведена замена полюсных множителей, если производить вычисление по правилу (115.9) (в (117.3) эти множители выделены в подынтегральном выражении).

Интеграл в (117.3) — того же вида, что и в (115.2). Поэтому мы можем сразу написать результат преобразования в форме (115.10), минуя промежуточные этапы:

$$2\gamma^\mu\,\mathrm{Im}\,f(t) - \frac{2}{2m}\sigma^{\mu\nu}k_\nu\,\mathrm{Im}\,g(t) = -\frac{\pi^2}{2}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}\int\varphi^\mu(p)do_{\mathbf{p}}, \quad (117.5)$$

где $t=k^2$, интегрирование производится по направлению вектора $\mathbf{p}$, а 4-векторы $p'_-\equiv p$ и $p'_+\equiv k-p$ в определении функции $\varphi^\mu(p)$ (см. (117.4)) становятся 4-импульсами реальных (а не виртуальных) частиц. Выражение (117.5) относится к системе отсчета, в которой $\mathbf{k}=0$; это — система центра инерции рождающейся пары p_-, p_+ (а тем самым — и «промежуточной» пары p'_-, p'_+). В этой системе, следовательно,

$$k=(k_0,\,0), \quad p_-=\left(\frac{k_0}{2},\,\mathbf{p}_-\right), \quad p_+=\left(\frac{k_0}{2},\,-\mathbf{p}_-\right), \quad p=\left(\frac{k_0}{2},\,\mathbf{p}\right),$$

и легко проверить, что

$$f^2=(p-p_-)^2=-2\mathbf{p}^2(1-\cos\theta) = -\frac{t-4m^2}{2}(1-\cos\theta), \quad (117.6)$$

где θ — угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_-$ (причем $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_-^2$). Подставив теперь (117.4) в (117.5) и исключив в подынтегральном выражении матрицы $\gamma^\nu \ \ldots \ \gamma_\nu$ с помощью формул (22.6), получим

$$\gamma^\mu \operatorname{Im} f(t) - \frac{1}{2m}\sigma^{\mu\nu}k_\nu \operatorname{Im} g(t) =$$

$$= -\frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}} \int \frac{do_{\mathbf{p}}}{2\pi(1-\cos\theta)} \gamma^\nu(\gamma p + m)\gamma^\mu(\gamma p - \gamma k + m)\gamma_\nu =$$

$$= -\frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}} \int \frac{do_{\mathbf{f}}}{2\pi(1-\cos\theta)} [-2m^2\gamma^\mu + 4m(P^\mu + 2f^\mu) + \\ + 2(\gamma p_+ - \gamma f)\gamma^\mu(\gamma p_- + \gamma f)], \quad (117.7)$$

где введены 4-векторы

$$f = p - p_- = (0, \mathbf{f}), \qquad P = p_- - p_+ = (0, 2\mathbf{p}_-). \qquad (117.8)$$

Интегрирование сводится теперь к вычислению интегралов

$$(I,\, I^\mu,\, I^{\mu\nu}) = \int \frac{(1,\, f^\mu,\, f^\mu f^\nu)}{1-\cos\theta} \frac{do_{\mathbf{f}}}{2\pi} \qquad (117.9)$$

с каждым из трех перечисленных числителей.

Интеграл I логарифмически расходится при $\theta \to 0$. Переписывая его как

$$I = \int\limits_0^{t-4m^2} \frac{d(\mathbf{f}^2)}{\mathbf{f}^2} = \int\limits_0^{-(t-4m^2)} \frac{d(f^2)}{f^2},$$

мы видим, что расходимость отвечает малым «массам» виртуального фотона. Таким образом, это — «инфракрасная» расходимость. Мы отложим ее подробное рассмотрение до § 122. Здесь отметим только, что она фиктивна в том смысле, что при правильном учете всех физических эффектов подобные расходимости взаимно компенсируются и исчезают. Поэтому мы можем произвольным образом «обрезать» интеграл снизу, а в дальнейшем, при расчете реальных физических явлений, устремить предел обрезания к нулю.

Здесь будет проще всего совершать обрезание релятивистски инвариантным образом. Для этого припишем виртуальному фотону f малую, но конечную массу λ ($\lambda \ll m$), т. е. заменим в фотонном пропагаторе $D(f^2)$ в (117.2)

$$f^2 \to f^2 - \lambda^2. \qquad (117.10)$$

После этого

$$I = \int\limits_0^{-(t-4m^2)} \frac{d(f^2)}{f^2-\lambda^2} = \ln\frac{t-4m^2}{\lambda^2}. \qquad (117.11)$$

Интеграл I^μ, в котором f^μ — пространственноподобный 4-вектор, должен выражаться через 4-вектор P^μ (из двух имеющихся в нашем распоряжении 4-векторов P^μ и k^μ пространственноподобен при произвольных p_+, p_- только P^μ). Поэтому $I^\mu = AP^\mu$. Умножив это равенство на P_μ и вычислив интеграл $P_\mu I^\mu$ в системе центра инерции пары (компоненты 4-векторов f и P — из (117.8)), найдем

$$A = \frac{1}{2\mathbf{p}^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathbf{f}\mathbf{p}_- d\cos\theta}{1-\cos\theta} = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} d\cos\theta = -1.$$

Таким образом,

$$I^\mu = -P^\mu. \tag{117.12}$$

Аналогичным образом вычисляется интеграл

$$I^{\mu\nu} = \frac{1}{4}P^2\left(g^{\mu\nu} - \frac{P^\mu P^\nu}{P^2}\right) + \frac{1}{4}P^\mu P^\nu \tag{117.13}$$

(для определения коэффициентов в этом выражении достаточно вычислить интегралы I^μ_μ и $I^{\mu\nu}P_\mu P_\nu$).

Дальнейшее вычисление происходит следующим образом. Подставив (117.11)–(117.13) в (117.7), мы получим между «обкладками» $\overline{u}(p_-)\ \ldots\ u(-p_+)$ сумму ряда членов. В каждом из них «прогоним» (с помощью правил коммутации матриц γ^μ) множитель γp_+ направо, а γp_- — налево; после этого можно заменить $\gamma p_- \to m$, $\gamma p_+ \to -m$, поскольку

$$\overline{u}(p_-)\gamma p_- = m\overline{u}(p_-), \qquad \gamma p_+ u(-p_+) = -mu(-p_+).$$

В получающейся в результате сумме

$$-4(p_+p_-)I\gamma^\mu + 2mP^\mu - 3P^2\gamma^\mu$$

можно еще заменить P^μ эквивалентным ему (в обкладках!) выражением

$$P^\mu \to 2m\gamma^\mu + \sigma^{\mu\nu}k_\nu$$

(ср. (116.5)). Наконец, выразив все величины через инвариант $t = k^2$ $(2p_+p_- = t-2m^2,\ P^2 = 4m^2-t)$ и сравнив затем обе стороны равенства (117.7), получим следующие формулы для мнимых частей формфакторов:

$$\operatorname{Im} g(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}}, \tag{117.14}$$

$$\operatorname{Im} f(t) = \frac{\alpha}{4\sqrt{t(t-4m^2)}}\left[-3t+8m^2+2(t-2m^2)\ln\frac{t-4m^2}{\lambda^2}\right]. \tag{117.15}$$

Инфракрасная расходимость имеется только в $\operatorname{Im} f(t)$.

Сами функции $f(t)$ и $g(t)$ вычисляются по их мнимым частям с помощью формул (116.11),(116.12). Интегрирование в этих формулах удобно произвести с помощью тех же подстановок, которые были использованы в § 113 при вычислении $\mathcal{P}(t)$. Выраженные через переменную ξ (113.11) формфакторы определяются формулами

$$g(\xi) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\xi \ln \xi}{\xi^2 - 1}, \tag{117.16}$$

$$f(\xi) - 1 = \frac{\alpha}{2\pi}\left\{2\left(1 + \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\ln\xi\right)\ln\frac{m}{\lambda} - \frac{3(1+\xi^2)+2\xi}{2(1-\xi^2)}\ln\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2\xi - 2F(\xi) + 2\ln\xi\ln(1+\xi)\right]\right\}, \tag{117.17}$$

где $F(\xi)$ — функция Спенса, определенная согласно (131.19).

В нефизической области ($0 < t/m^2 < 4$) надо положить $\xi = e^{i\varphi}$. Тогда выражения для формфакторов могут быть приведены к виду

$$f(\varphi) - 1 = \frac{\alpha}{\pi}\left\{\left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\ln\frac{m}{\lambda} + \frac{3\cos\varphi + 1}{2\sin\varphi}\varphi + \frac{2}{\operatorname{tg}\varphi}\int\limits_0^{\varphi/2} x\operatorname{tg}x\,dx\right\}, \tag{117.18}$$

$$g(\varphi) = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi}. \tag{117.19}$$

Наконец, выпишем предельные формулы для малых $|t|$:

$$f(t) - 1 = \frac{\alpha t}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8}\right), \quad g(t) = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad |t| \ll 4m^2, \tag{117.20}$$

и для больших $|t|$:

$$f(t) - 1 = -\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\ln^2\frac{|t|}{m^2} + 2\ln\frac{m}{\lambda}\ln\frac{|t|}{m^2}\right) + \begin{cases} i\dfrac{\alpha}{2}\ln\dfrac{t}{\lambda^2}, & t \gg 4m^2, \\ 0, & -t \gg 4m^2, \end{cases} \tag{117.21}$$

$$g(t) = -\frac{\alpha m^2}{\pi t}\ln\frac{|t|}{m^2} + \begin{cases} i\dfrac{\alpha m^2}{t}, & t \gg 4m^2, \\ 0, & -t \gg 4m^2. \end{cases} \tag{117.22}$$

Формула (117.21) справедлива (в отношении $\operatorname{Re} f$), как говорят, с дважды логарифмической точностью, т. е. с точностью до квадратов больших логарифмов [1]).

[1]) Выражение для вершинного оператора в случае одного виртуального и одного реального электронных концов и реального фотонного конца — см. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. — М.: Наука, 1981. — П. 5.1.3. — С. 330.

§ 118. Аномальный магнитный момент электрона

Как уже было указано в § 116, значение $g(0)$ определяет радиационную поправку к магнитному моменту электрона. Если ставить себе целью вычисление лишь этой величины, то вычисление всей функции $g(t)$, конечно, не обязательно. С помощью (117.14) и (116.12) имеем

$$g(0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} g(t')}{t'}\,dt' = \frac{\alpha}{4\pi}\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}\sqrt{x-1}} = \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{118.1}$$

С учетом этой поправки магнитный момент электрона

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right). \tag{118.2}$$

Эта формула была впервые получена *Швингером* (1949).

В следующем приближении ($\sim \alpha^2$) радиационные поправки в формфакторах изображаются семью диаграммами (106.10,*в*—*и*). Определение даже одного только значения $g(0)$ в этом приближении требует очень сложных вычислений. Отсылая за деталями вычислений к оригинальным статьям, приведем лишь окончательное значение поправки второго приближения [1]:

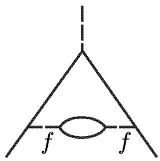
$$g^{(2)}(0) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\left(\frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\zeta(3)\right) = -\,0,328\frac{\alpha^2}{\pi^2}, \tag{118.3}$$

так что магнитный момент электрона

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) \tag{118.4}$$

(*C. Sommerfield,* 1957; *A. Petermann,* 1957).

Остановимся особо на вкладе поляризации вакуума в поправку $g^{(2)}(0)$. Это — диаграмма



(118.5)

содержащая фотонную собственно-энергетическую часть. Она отличается от диаграммы (117.1) первого приближения лишь тем, что вместо фотонного пропагатора $D(f^2) = 4\pi/f^2$ в ней стоит произведение

$$D(f^2)\frac{\mathcal{P}(f^2)}{4\pi}D(f^2) = \frac{4\pi}{f^2}\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2},$$

[1] Проведение вычислений по методу унитарности — см. *Терентьев М. В.*// ЖЭТФ. — 1962. — Т. 43.— С. 619.

где $\mathcal{P}(f^2)$ — вычисленный в § 113 поляризационный оператор в первом ($\sim\alpha$) приближении. Частично повторив (с этим изменением) произведенные в предыдущем параграфе вычисления, получим для «поляризационной части» поправки

$$\operatorname{Im} g^{(2)}_{\text{поляр}}(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} \frac{1+3\cos\theta}{2} d\cos\theta, \tag{118.6}$$

причем

$$f^2 = \frac{t-4m^2}{2}(1-\cos\theta) \tag{118.7}$$

(см. (117.6)). Вычисление этого интеграла, а затем интеграла

$$g^{(2)}_{\text{поляр}}(0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{4m^2}^{\infty} \operatorname{Im} g^{(2)}_{\text{поляр}}(t') \frac{dt'}{t'} \tag{118.8}$$

приводит к значению

$$g^{(2)}_{\text{поляр}}(0) = \frac{\alpha^2}{\pi^2}\left(\frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3}\right) = 0,016\frac{\alpha^2}{\pi^2}; \tag{118.9}$$

оно составляет $\sim 5\,\%$ всего значения (118.3).

Мы уже отмечали (в конце § 114), что определенный вклад в радиационные поправки могут вносить также и эффекты поляризации вакуума других частиц. Вклад мюонного вакуума в аномальный магнитный момент электрона мы получим по тем же формулам (118.6)–(118.8), в которых (в том числе в определении переменной f^2) m есть по-прежнему масса электрона (m_e), но в качестве параметра m, входящего в выражение $\mathcal{P}(f^2)$, должна быть взята масса мюона (m_μ). Величина $\mathcal{P}(f^2)/f^2$ есть функция только отношения f^2/m_μ^2. В интеграле же (118.8) существенна область значений t (а потому и f^2), сравнимых с m_e^2; так что отношение $f^2/m_\mu^2 \sim (m_e/m_\mu)^2 \ll 1$ и для оценки интегралов можно воспользоваться предельной формулой (113.14), согласно которой

$$\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} = -\frac{\alpha}{15\pi}\frac{f^2}{m_\mu^2}.$$

Отсюда видно, что вклад в $g^{(2)}(0)$, обязанный мюонной поляризации вакуума, имеет лишний малый множитель $(m_e/m_\mu)^2$.

Обратная ситуация возникает, однако, при нахождении поправок к магнитному моменту мюона. Поскольку в (118.3) масса частицы не входит, это значение $g^{(2)}(0)$ относится и к мюону, причем в нем учтен вклад поляризации мюонного же вакуума. Но вклад поляризации вакуума других частиц — электронов — оказывается в данном случае значительно больше. Он

вычисляется по формулам (118.6)–(118.8), в которых надо теперь заменить $m \to m_\mu$, а в качестве $\mathcal{P}(t)$ подставить электронный поляризационный оператор. В противоположность предыдущему случаю теперь будет существенна область значений $f^2/m_e^2 \sim (m_\mu/m_e)^2 \gg 1$ и в качестве $\mathcal{P}(f^2)$ нужно взять предельное выражение (113.15):

$$\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|f^2|}{m_e^2}.$$

Вычисление интегралов приводит к значению

$$[g^{(2)}(0)]_{\text{эл. п}} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{3} \ln \frac{m_\mu}{m_e} - \frac{25}{36}\right) = 1,09 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \tag{118.10}$$

(*H. Suura, E. H. Wichmann,* 1957; *A. Petermann,* 1957).

Сложив (118.10) со (118.3), получим для магнитного момента мюона

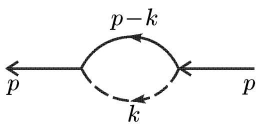
$$\mu_{\text{мюон}} = \frac{e\hbar}{2m_\mu c}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + 0,76 \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right). \tag{118.11}$$

Заметим, что вклад поляризации мюонного вакуума (118.9) составляет $\sim 2\,\%$ всего значения $g^{(2)}(0)$. Вклад такого же порядка (ввиду близости масс) дала бы и пионная поляризация вакуума, которая вообще не может быть вычислена точно. По этой причине не имело бы уже смысла и вычисление поправок $\sim \alpha^3$ к магнитному моменту мюона.

§ 119. Вычисление массового оператора

На примере вычисления массового оператора продемонстрируем метод прямой регуляризации интегралов Фейнмана.

В первом неисчезающем приближении массовый оператор представляется петлей в диаграмме



(119.1)

Ей отвечает интеграл

$$-i\overline{\mathcal{M}}(p) = (-ie)^2 \int \gamma^\mu G(p-k)\gamma^\nu D_{\mu\nu}(k) \frac{d^4k}{(2\pi)^4};$$

подставив пропагаторы и сведя вместе множители $\gamma^\mu \ \ldots \ \gamma_\mu$ с помощью формул (22.6), получим

$$\overline{\mathcal{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4} e^2 \int \frac{2m - (\gamma p) + (\gamma k)}{[(p-k)^2 - m^2](k^2 - \lambda^2)}\, d^4k \tag{119.2}$$

(чертой над буквой $\mathcal{M}$ мы обозначаем нерегуляризованное значение интеграла). В фотонный пропагатор введена фиктивная «масса фотона» λ с целью устранения (как и в § 117) инфракрасной расходимости.

Преобразуем интеграл с помощью формулы (131.4), понимая в ней под a_1 и a_2 два множителя в знаменателе (119.2). После простой перегруппировки членов в знаменателе нового интеграла получим

$$\overline{\mathcal{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2pi)^4}e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \frac{2m-(\gamma p)+(\gamma k)}{[(k-px)^2-a^2]^2}, \tag{119.3}$$

где

$$a^2 = m^2x^2 - (p^2-m^2)x(1-x) + \lambda^2(1-x). \tag{119.4}$$

Замена переменной $k \to k + px$ приводит подынтегральное выражение в (119.3) к виду, в котором его знаменатель зависит только от k^2. При этом однако, согласно (131.17),(131.18), к интегралу добавится аддитивная постоянная:

$$\overline{\mathcal{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4}e^2\left\{\int d^4k \int_0^1 dx \frac{2m-(\gamma p)(1-x)}{(k^2-a^2)^2} - \frac{i\pi^2}{4}(\gamma p)\right\}, \tag{119.5}$$

член с (γk) в числителе теперь опущен как обращающийся в нуль при интегрировании по направлениям 4-вектора k (ср. (131.8)).

Регуляризация этого интеграла заключается в таких вычитаниях, которые привели бы его к выражению вида (110.20). Последнее обращается в нуль при умножении на волновую амплитуду $u(p)$, если p — 4-импульс реального электрона. Не вводя $u(p)$ явно, можно сформулировать это условие как требование обращения $\mathcal{M}(p)$ в нуль при замене

$$(\gamma p) \to m, \qquad p^2 \to m^2. \tag{119.6}$$

Форма интеграла (119.5) удобна при этом тем, что 4-вектор p входит в него только в виде γp и p^2 (а члены вида kp отсутствуют).

Вычтя из (119.5) такое же выражение с заменой (119.6), получим

$$-\frac{8\pi i e^2}{(2\pi)^4}\left\{\int d^4k \int_0^1 dx \cdot [2m-(\gamma p)(1-x)]\left[\frac{1}{(k^2-a^2)^2} - \frac{1}{(k^2-a_0^2)^2}\right] - \right.$$

$$\left. - \int d^4k \int_0^1 dx \, \frac{1-x}{(k^2-a_0^2)^2}(\gamma p - m) - \frac{i\pi^2}{4}(\gamma p - m)\right\}, \tag{119.7}$$

где

$$a_0^2 = m^2x^2 + \lambda^2(1-x).$$

Для окончательной регуляризации, однако, должно быть произведено еще одно вычитание: согласно (110.20) при замене (119.6) должно обратиться в нуль не только $\mathcal{M}(p)$ в целом, но и оно же без одного множителя $\gamma p - m$. Соответствующим вычитанием целиком отбрасываются второй и третий члены в фигурных скобках в (119.7) [1]. Первый же интеграл предварительно преобразуем, введя еще одно вспомогательное интегрирование с помощью формулы (131.5), положив в ней $n = 2$ и понимая под a и b соответственно $k^2 - a^2$ и $k^2 - a_0^2$. Тогда выражение (119.7) принимает вид

$$(\gamma p - m)\frac{16\pi i}{(2\pi)^4}e^2 \int d^4k \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{(\gamma p + m)[2m - (\gamma p)(1-x)]x(1-x)}{[k^2 - a_0^2 + (p^2 - m^2)x(1-x)z]^3}$$

(здесь использовано также тождество $p^2 - m^2 = (\gamma p - m)(\gamma p + m)$). Сразу же произведем интегрирование по d^4k. Предположив, что $p^2 - m^2 < 0$, и воспользовавшись (131.14), получим

$$(\gamma p - m)\frac{e^2}{2\pi}\int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{(\gamma p + m)[2m - (\gamma p)(1-x)]x(1-x)}{m^2x^2 + \lambda^2(1-x) + (m^2 - p^2)x(1-x)z}.$$

Теперь остается, опустив временно множитель $(\gamma p - m)$, вычесть такой же интеграл с заменой (119.6); после простых приведений получим

$$\mathcal{M}(p) = (\gamma p - m)^2\frac{e^2}{2\pi} \times$$
$$\times \int_0^1 dx \int_0^1 dz \frac{m(1-x^2) - (\gamma p + m)(1-x)^2\left[1 - \dfrac{2x(1+x)z}{x^2 + (\lambda/m)^2}\right]}{m^2x + (m^2 - p^2)(1-x)z} \quad (119.8)$$

(в общем знаменателе опущен член с λ^2, так как это не приведет здесь к расходимости; в другом месте $\lambda^2(1-x)$ заменено на

---

[1]) Тем самым мы в процессе «перенормировки на ходу» (см. с. 545) опускаем поправки к перенормировочной константе Z_1 (см. § 110). Соответствующие интегралы логарифмически расходятся. Если ввести «параметр обрезания» $\Lambda^2 \gg m^2,\ p^2$, ограничив область интегрирования по d^4k условием $k^2 \leqslant \Lambda^2$, то эту поправку можно вычислить в явном виде. Вычисление приводит к результату

$$Z_1 = 1 + Z_1^{(1)}, \quad Z_1^{(1)} = -\frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln\frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{9}{4}\right]. \quad (119.7а)$$

λ^2, так как инфракрасной расходимости будет отвечать расходимость при $x \to 0$).

Интегрирование в (119.8) (сначала по z, затем по x) довольно длинно, но элементарно и приводит к следующему окончательному результату:

$$\mathcal{M}(p) = \frac{\alpha}{2\pi m}(\gamma p - m)^2\left\{\frac{1}{2(1-\rho)}\left(1 - \frac{2-3\rho}{1-\rho}\ln\rho\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\gamma p + m}{m\rho}\left[\frac{1}{2(1-\rho)}\left(2 - \rho + \frac{\rho^2+4\rho-4}{1-\rho}\ln\rho\right) + 1 + 2\ln\frac{\lambda}{m}\right]\right\}, \tag{119.9}$$

где обозначено

$$\rho = \frac{m^2 - p^2}{m^2}$$

(*R. Karplus, N. M. Kroll,* 1950). Интеграл вычислен в предположении $\rho > 0$, причем $\rho \gg \lambda/m$. В соответствии с правилом обхода полюсов, при аналитическом продолжении выражения (119.9) в область $\rho < 0$ фаза логарифма определяется заменой $m \to m - i0$; при этом $\rho \to \rho - i0$, так что $\ln\rho$ при $\rho < 0$ надо понимать как

$$\ln\rho = \ln|\rho| - i\pi, \quad \rho < 0. \tag{119.10}$$

Рассмотрим поведение массового оператора при $p^2 \gg m^2$. Имеем тогда $-\rho \approx p^2/m^2 \gg 1$ и с логарифмической точностью

$$\mathcal{M}(p) = -[\mathcal{G}^{-1}(p) - G^{-1}(p)] \approx \frac{\alpha}{4\pi}(\gamma p)\ln\frac{p^2}{m^2}. \tag{119.11}$$

Как и в случае фотонного пропагатора (ср. формулы (113.15), (113.16) для поляризационного оператора), поправка к G^{-1} оказывается малой только при не слишком большой энергии, именно при

$$\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{p^2}{m^2} \ll 1.$$

В данном случае, однако, логарифмический рост в известном смысле фиктивен, он может быть устранен надлежащим выбором калибровки, т. е. функции $D^{(l)}$ в фотонном пропагаторе (*Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников,* 1954). Именно, для этого надо положить (в обозначениях § 103)

$$D^{(l)} = 0, \tag{119.12}$$

между тем как формула (119.9) получена в калибровке

$$D^{(l)} = D. \tag{119.13}$$

Это свойство калибровки (119.12) делает ее особенно удобной для исследования характера теории при $p^2 \gg m^2$, что и будет использовано ниже, в § 132.

Для доказательства сделанного утверждения замечаем, что если мы интересуемся только членами $\sim e^2$, то преобразование от калибровки (119.13) к калибровке (119.12) можно считать бесконечно малым. Соответственно этому можно прямо воспользоваться формулой (105.14), положив в ней

$$d^{(l)}(q) = -\frac{D}{q^2} = -\frac{4\pi}{(q^2)^2},$$

а также заменив, с требуемой точностью, функции $\mathcal{G}$ в подынтегральном выражении на G. В интеграле по d^4q будет существенна область $q \gg p$; при этом $G(p-q)$ в подынтегральном выражении много меньше $G(p)$, и им можно пренебречь. Тогда

$$\delta\mathcal{G}^{-1} = -G^{-2}(p)\delta\mathcal{G}(p) = -ie^2G^{-1}(p)\int d^{(l)}(q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}.$$

Наконец, применив преобразование (113.11),(113.12), получим

$$\delta\mathcal{G}^{-1}(p) = -\frac{e^2}{4\pi}G^{-1}(p)\int\frac{d(-q^2)}{-q^2} \approx -\frac{e^2}{4\pi}(\gamma p)\ln\frac{\Lambda^2}{p^2},$$

где Λ — вспомогательный верхний предел, расходимость на котором устраняется перенормировкой. Последняя состоит в вычитании того же выражения при $p^2 \approx m^2$, так что окончательно имеем

$$\delta\mathcal{G}^{-1} = \frac{e^2}{4\pi}(\gamma p)\ln\frac{p^2}{m^2}.$$

Это выражение как раз сокращается с разностью $\mathcal{G}^{-1} - G^{-1}$ из (119.11).

Наконец, остановимся на вопросе о причинах, приводящих к необходимости введения конечной «массы фотона» λ при регуляризации интеграла (119.2), тесно связанной с его поведением при $p^2 \to m^2$.

Прежде всего отметим, что сам по себе этот интеграл с $\lambda = 0$ конечен при $p^2 = m^2$ (для устранения несущественной в данном аспекте расходимости на больших k полагаем при этом, что интеграл берется по большой, но конечной области k-пространства). Необходимость же введения λ возникает при вычитании перенормировочного интеграла, который без этого расходился бы при $p^2 = m^2$. Выясним поэтому, как вел бы себя при $p^2 \to m^2$ нерегуляризованный массовый оператор. Поскольку же это поведение существенно зависит от выбора калибровки, рассмотрим общий случай произвольной калибровки (между тем как интеграл (119.2) написан уже при определенном выборе — (119.13)).

Воспользуемся снова преобразованием (105.14). Представив $d^{(l)}$ в виде

$$d^{(l)}(q) = -\frac{\delta D^{(l)}}{q^2} = \frac{4\pi}{(q^2)^2}\delta a(q^2), \tag{119.14}$$

будем считать, что δa — вариация функции $a(q^2)$, существенно меняющейся лишь на интервалах $q^2 \sim m^2$ и конечной при $q^2 \approx \approx m^2$. В подынтегральном выражении в правой стороне (105.14) в разности $\mathcal{G}(p) - \mathcal{G}(p-q)$ при малых q оба члена близки и интеграл сходится. Поскольку при малых q

$$\mathcal{G}(p-q) \sim \frac{1}{p^2 - m^2 - 2pq},$$

$\mathcal{G}(p-q)$ можно опустить по сравнению с $\mathcal{G}(p)$ при $q \gg (p^2-m^2)/m$. Интеграл же

$$\delta\mathcal{G}(p) = ie^2\mathcal{G}(p)\int d^{(l)}(q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} = -\frac{e^2}{4\pi}\mathcal{G}(p)\int \delta a(q^2)\frac{d(-q^2)}{-q^2}$$

логарифмически расходится в области

$$(p^2 - m^2)/m^2 \ll q^2 \ll m^2.$$

С логарифмической точностью имеем поэтому

$$\frac{\delta\mathcal{G}}{\mathcal{G}} = -\frac{e^2}{4\pi}\delta a(m^2)\ln\frac{m^2}{p^2 - m^2}.$$

Это равенство можно проинтегрировать. Заметив, что при $\alpha^2 \equiv e^2 \to 0$ точный пропагатор $\mathcal{G}$ должен совпадать с пропагатором свободных частиц G, получим

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{\gamma p - m}\left(\frac{m^2}{p^2 - m^2}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}(C - a_0)}, \tag{119.15}$$

где $a_0 = a(m^2)$, C — некоторая постоянная. Для определения последней сравним выражение

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\gamma p - m)\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi}(C - a_0)\ln\rho\right], \tag{119.16}$$

получающееся из (119.15) в первом приближении по α, с аналогичным выражением, получающимся из интеграла (119.2) при $\lambda = 0$ [1]:

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\gamma p - m)\left[1 + \frac{\alpha}{\pi}\ln\rho\right]. \tag{119.17}$$

Согласно определению (119.14) функция $a(q^2)$ совпадает с отношением $D^{(l)}/D$. Поэтому калибровка (119.13), к которой относится (119.17), отвечает $a = a_0 = 1$. Потребовав совпадения (119.16) и (119.17) при этом значении a_0, получим $C = 3$.

[1]) Чтобы получить (119.17), нет необходимости производить вычисления заново. Член $\sim \ln\rho$ в (119.9) как раз и получен в предположении $\rho \gg \lambda$, допускающем переход $\lambda \to 0$. Член же $\sim \ln(\lambda/m)$ возникает из-за вычитания перенормировочного интеграла и в исходном интеграле (119.2) отсутствует. Это вычитание не затрагивает, как легко видеть, членов $\sim \ln\rho$.

Таким образом, окончательно находим следующее предельное выражение (*инфракрасную асимптотику*) неперенормированного электронного пропагатора при $p^2 \to m^2$:

$$\mathcal{G}(p) = \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2}\left(\frac{m^2}{p^2 - m^2}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}(3-a_0)} \tag{119.18}$$

(*А. А. Абрикосов,* 1955). Подчеркнем, что справедливость этой формулы связана лишь с неравенствами $\alpha \ll 1$, $|\ln\rho| \gg 1$, между тем как формулы теории возмущений требовали бы также и условия $\alpha|\ln\rho|/2\pi \ll 1$. Отметим также, что знак разности $p^2 - m^2$ здесь не существен, так как мнимая часть выражения (119.18) все равно находилась бы за пределами его точности.

Перенормированный пропагатор должен иметь при $p^2 = m^2$ простой полюс. Мы видим, что (119.18) удовлетворяет этому требованию только в калибровке, в которой

$$D^{(l)} = 3D \tag{119.19}$$

(так что $a_0 = 3$). В этом случае регуляризация интеграла Фейнмана (имеющая целью устранить его расходимость на верхних пределах) не будет требовать введения конечной «массы фотона». В других же калибровках нулевая масса фотона приводит к возникновению при $p^2 = m^2$ точки ветвления вместо простого полюса, и устранение этого «дефекта» требует введения конечного параметра λ.

§ 120. Испускание мягких фотонов с ненулевой массой

При вычислении электронных формфакторов в § 117 мы столкнулись с расходимостью интегралов на малых частотах виртуальных фотонов. Эта расходимость тесно связана с обсуждавшейся уже в § 98 инфракрасной катастрофой. Там было указано, что сечение любого процесса с участием заряженных частиц (в том числе рассеяния электрона внешним полем, изображаемого диаграммой вида (117.1)) имеет смысл не само по себе, а лишь при учете одновременного излучения любого числа мягких фотонов. Как будет подробно объяснено ниже (см. § 122), в суммарном сечении, учитывающем излучение мягких фотонов, все расходимости сокращаются. При этом, разумеется, для получения правильного результата предварительное «обрезание» расходящихся интегралов во всех складываемых сечениях должно производиться одинаковым образом.

В § 117 это обрезание было осуществлено путем введения фиктивной конечной массы виртуального фотона λ. Поэтому мы должны теперь видоизменить и полученные в § 98 формулы так,

чтобы они описывали излучение мягких «фотонов» с ненулевой массой.

С формальной точки зрения такой фотон относится к «векторным» частицам со спином 1, свободное поле которых рассматривалось в § 14. Оно описывается 4-векторным ψ-оператором

$$\widehat{\psi}_\mu = \sqrt{4\pi} \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\widehat{c}_{\mathbf{k}\alpha} e_\mu^{(\alpha)} e^{-ikx} + \widehat{c}^+{}_{\mathbf{k}\alpha} e_\mu^{(\alpha)*} e^{ikx}), \quad \alpha = 1,\, 2,\, 3 \tag{120.1}$$

(здесь изменены обозначения и нормировка по сравнению с (14.16) с целью приведения в соответствие с фотонным случаем).

Взаимодействие «фотонов» (120.1) с электронами надо описывать лагранжианом того же вида, что и для истинных фотонов:

$$-e\widehat{j}^\mu \widehat{\psi}_\mu \tag{120.2}$$

(с заменой операторов потенциала $\widehat{A}_\mu$ на $\widehat{\psi}_\mu$). Тогда амплитуды процессов испускания фотонов конечной массы будут даваться обычными формулами диаграммной техники, с тем лишь отличием, что

$$k^2 = \lambda^2. \tag{120.3}$$

Суммирование же по поляризациям испущенного фотона должно будет производиться по трем независимым поляризациям (двум поперечным и одной продольной) вместо двух у обычного фотона. Это эквивалентно усреднению по матрице плотности неполяризованных частиц

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2}\right) \tag{120.4}$$

(ср. (14.15)) с последующим умножением на 3.

Пропагатор «фотонов» с ненулевой массой

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2 - \lambda^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2}\right)$$

(ср. (76.18)). Однако в силу калибровочной инвариантности амплитуды реальных процессов рассеяния не зависят от продольной части фотонного пропагатора, и это свойство не связано с конкретным видом его поперечной части. Поэтому второй член в скобках фактически выпадает, и остается выражение того же типа, что и для обычных фотонов:

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2 - \lambda^2} g_{\mu\nu} \tag{120.5}$$

(которым мы и пользовались в § 117, 119).

Обратимся теперь к изучению мягких (в объясненном в § 98 смысле) фотонов.

Произведенный в § 98 вывод формул (98.5),(98.6) переносится на рассматриваемый случай с тем лишь изменением, что при раскрытии квадратов $(p \pm k)^2$ в знаменателях электронных пропагаторов прибавляется член $k^2 = \lambda^2$. В результате вместо (98.6) получим

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} \cdot e^2 \left| \frac{(p'e)}{(p'k) + \lambda^2/2} - \frac{(pe)}{(pk) - \lambda^2/2} \right|^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega},$$

где $d\sigma_{\text{упр}}$ — сечение того же процесса без излучения мягкого фотона (который называем условно «упругим» процессом). В дальнейшем при интегрированиях по d^3k будут существенны значения $|\mathbf{k}| \sim \lambda$. При этом $p'k \sim pk \gg \lambda^2$, так что членами λ^2 в знаменателях можно пренебречь. Суммирование по поляризациям фотона осуществляется, как указано, с помощью (120.4). После сделанного пренебрежения второй член в (120.4) не дает вклада в сечение, и остается [1])

$$d\sigma = -d\sigma_{\text{упр}} \cdot e^2 \left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right)^2 \frac{d^3k}{4\pi^2\omega}. \tag{120.6}$$

Таким образом, мы возвращаемся к формуле (98.7), в которой, однако, надо понимать теперь ω как

$$\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}. \tag{120.7}$$

Формула (120.6) имеет совершенно общий характер. Она применима как при упругом, так и при неупругом рассеянии и даже при изменении сорта частиц. Результат же дальнейшего интегрирования по d^3k зависит от 4-векторов p и p', иными словами, от характера основного процесса рассеяния.

Рассмотрим случай упругого рассеяния, когда

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|, \quad \varepsilon = \varepsilon',$$

и определим полную вероятность испускания фотонов с частотой, меньшей некоторого $\omega_{\max}$; при этом предполагается, что

$$\omega_{\max} \gg \lambda, \tag{120.8}$$

а сверху значение $\omega_{\max}$ ограничено условиями применимости теории излучения мягких фотонов (98.9),(98.10).

Вычислим прежде всего интеграл по d^3k в нерелятивистском пределе. При $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \ll m$ имеем

$$\left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)} \right)^2 \approx \frac{(\mathbf{qk})^2}{m^2\omega^4} - \frac{\mathbf{q}^2}{m^2\omega^2}$$

[1]) На первый взгляд могло бы возникнуть сомнение в допустимости пренебрежения λ^2 до усреднения ввиду наличия λ^2 в знаменателе второго члена в (120.4). Однако легко непосредственно убедиться в том, что этот член при усреднении дает вклад $\sim \lambda^4 \cdot \lambda^{-2}$ которым можно пренебречь.

($\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$). Интегрирование этого выражения по направлениям $\mathbf{k}$ дает

$$\frac{4\pi\mathbf{q}^2}{m^2\omega^2}\left(\frac{\mathbf{k}^2}{3\omega^2} - 1\right).$$

После этого имеем из (120.6)

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} \cdot \frac{e^2\mathbf{q}^2}{\pi m^2} \int\limits_0^{\omega=\omega_{\max}} \left[1 - \frac{\mathbf{k}^2}{3(\mathbf{k}^2+\lambda^2)}\right] \frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}|}{(\mathbf{k}^2+\lambda^2)^{3/2}},$$

или, произведя интегрирование в предположении $\omega_{\max}/\lambda \gg 1$,

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} \cdot \frac{2\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{2\omega_{\max}}{\lambda} - \frac{5}{6}\right), \qquad \mathbf{q}^2 \ll m^2. \tag{120.9}$$

В общем релятивистском случае для вычисления интеграла воспользуемся формулой (131.4). С ее помощью имеем для интеграла по углам

$$I = \int \frac{do_{\mathbf{k}}}{(pk)(p'k)} = \int\limits_0^1 dx \int \frac{do_{\mathbf{k}}}{[(pk)x + (p'k)(1-x)]^2},$$

или, раскрыв скалярные произведения с $p = (\varepsilon,\ \mathbf{p})$, $p' = (\varepsilon,\ \mathbf{p}')$,

$$I = \int\limits_0^1 dx \int \frac{do_{\mathbf{k}}}{\{\varepsilon\omega - \mathbf{k}[\mathbf{p}x + \mathbf{p}'(1-x)]\}^2}.$$

Интеграл $do_{\mathbf{k}}$ легко вычисляется в сферических координатах с полярной осью вдоль вектора $\mathbf{p}x + \mathbf{p}'(1-x)$, после чего

$$I = \int\limits_0^1 \frac{4\pi\, dx}{(\varepsilon\omega)^2 - [\mathbf{p}x + \mathbf{p}'(1-x)]^2\mathbf{k}^2} = \int\limits_0^1 \frac{4\pi\, dx}{[m^2 + \mathbf{q}^2x(1-x)]\mathbf{k}^2 + \varepsilon^2\lambda^2}.$$

Два других интеграла (с $(pk)^2$ и $(p'k)^2$ в знаменателях) получаются отсюда при $\mathbf{q} = 0$. Заметив также, что

$$pp' = \varepsilon^2 - \mathbf{p}\mathbf{p}' = m^2 + \mathbf{q}^2/2,$$

получим

$$d\sigma = \frac{2e^2}{\pi} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\omega_{\max}} \frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}|}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} \left\{ \frac{m^2 + \mathbf{q}^2/2}{[m^2 + \mathbf{q}^2x(1-x)]\mathbf{k}^2 + \varepsilon^2\lambda^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{m^2}{[m^2\mathbf{k}^2 + \varepsilon^2\lambda^2} \right\} d\sigma_{\text{упр}}. \tag{120.10}$$

Интегрирование по $d|\mathbf{k}|$ сводится к вычислению интегралов вида

$$\int_0^{\omega_{\max}} \frac{\mathbf{k}^2 d|\mathbf{k}|}{(a\mathbf{k}^2+\lambda^2)\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} = \frac{1}{a}\int_0^{\omega_{\max}} \frac{d|\mathbf{k}|}{\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} - \frac{\lambda^2}{a}\int_0^{\omega_{\max}} \frac{d|\mathbf{k}|}{(a\mathbf{k}^2+\lambda^2)\sqrt{\mathbf{k}^2+\lambda^2}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{a}\ln\frac{2\omega_{\max}}{\lambda} - \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{dz}{(az^2+1)\sqrt{z^2+1}}.$$

Во втором интеграле подставлено $|\mathbf{k}| \to \lambda z$ и верхний предел $(\omega_{\max}/\lambda)$ заменен на ∞, что допустимо ввиду сходимости интеграла.

Возникающие затем интегралы по x в (120.10) не могут быть полностью выражены через элементарные функции. Результат представим в виде

$$d\sigma = \alpha\left[F\left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m}\right)\ln\frac{2\omega_{\max}}{\lambda} + F_1\right]d\sigma_{\text{упр}}, \tag{120.11}$$

где [1])

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\xi^2+1}{\xi\sqrt{\xi^2+1}}\ln(\xi+\sqrt{\xi^2+1}) - 1\right], \tag{120.12}$$

$$F_1 = \frac{2\varepsilon}{\pi|\mathbf{p}|}\ln\frac{\varepsilon+|\mathbf{p}|}{m} - \frac{2m^2+\mathbf{q}^2}{\pi\varepsilon^2}\int_0^1 \frac{dx}{a\sqrt{1-a}}\ln\frac{1+\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}}, \tag{120.13}$$

$$a = \frac{1}{\varepsilon^2}[m^2 + \mathbf{q}^2 x(1-x)].$$

Найдем асимптотическое выражение для сечения в ультрарелятивистском случае. При этом предполагается, что не только $\varepsilon \gg m$, но и $|\mathbf{q}| \gg m$, т. е. угол рассеяния не слишком мал. В этих условиях в интеграле (120.13) существенна область значений x, в которой $a \ll 1$; после соответствующих пренебрежений

$$F_1 \approx \frac{\mathbf{q}^2}{2\pi\varepsilon^2}\frac{\ln a}{a}dx \approx \frac{1}{2\pi}\int \frac{\ln(\mathbf{q}^2/\varepsilon^2) + \ln x + \ln(1-x)}{x(1-x)}dx.$$

[1]) Функция $F(\xi)$ уже встречалась в задачах к § 98. Это неудивительно, так как с логарифмической точностью (120.11) можно получить, интегрируя сечение испускания фотонов нулевой массы (98.8) по ω в пределах от λ до $\omega_{\max}$. Если ввести вместо ξ переменную θ согласно $\xi = \operatorname{sh}(\theta/2)$, то

$$F(\theta) = \frac{2}{\pi}(\theta\operatorname{cth}\theta - 1). \tag{120.12a}$$

Интеграл надо обрезать при $a \sim m^2/\varepsilon^2$, т. е. при $x \sim m^2/\mathbf{q}^2$ снизу и при $1 - x \sim m^2/\mathbf{q}^2$ сверху. Тогда

$$F_1 \approx \frac{1}{2\pi}\left[2\ln\frac{\mathbf{q}^2}{\varepsilon^2}\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2} - \ln^2\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\ln^2\frac{\mathbf{q}^2}{m^2} - 4\ln\frac{\varepsilon}{m}\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\right].$$

Эта формула справедлива с точностью до квадратов логарифмов, как говорят, с *дважды логарифмической* точностью. С этой же точностью достаточно положить в первом члене в (120.11)

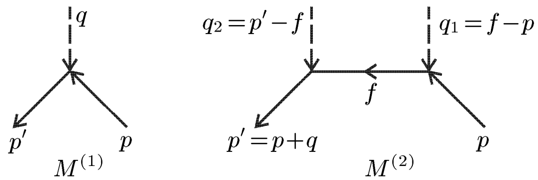
$$F(\xi) \approx \frac{4}{\pi}\ln\xi, \qquad \xi \gg 1.$$

Окончательно

$$d\sigma = \frac{2\alpha}{\pi}\left[\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\ln\frac{\omega_{\max}}{\lambda} - \ln\frac{\varepsilon}{m}\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2} + \frac{1}{4}\ln^2\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\right]d\sigma_{\text{упр}}, \quad \mathbf{q}^2 \gg m^2. \tag{120.14}$$

§ 121. Рассеяние электрона во внешнем поле во втором борновском приближении

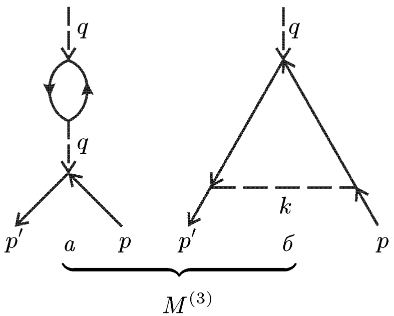
В первых двух приближениях по внешнему полю рассеяние электрона изображается диаграммами



(121.1)

Первой из них отвечает амплитуда $M^{(1)} \sim Ze^2$, рассмотренная в § 80. Амплитуда же второго приближения $M^{(2)} \sim (Ze^2)^2$.

Легко видеть, что члены такого же порядка возникают и от радиационных поправок. В третьем порядке теории возмущений радиационные поправки к амплитуде рассеяния изображаются диаграммами



(121.2)

При этом $M^{(3)} \sim Ze^2 \cdot e^2$, и если $Z \sim 1$, то $M^{(3)} \sim M^{(2)}$. Согласно (64.26) сечение рассеяния

$$d\sigma = |M_{fi}^{(1)} + M_{fi}^{(2)} + M_{fi}^{(3)}|^2 \frac{do'}{16\pi^2}. \tag{121.3}$$

В стоящем здесь квадрате амплитуды мы имеем право сохранить, наряду с $|M_{fi}^{(1)}|^2$, также и интерференционные члены между $M_{fi}^{(1)}$ и $M_{fi}^{(2)}$ и между $M_{fi}^{(1)}$ и $M_{fi}^{(3)}$. Таким образом, с точностью до членов $\sim e^6$ сечение представится суммой

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma^{(2)} + d\sigma_{\text{рад}}, \tag{121.4}$$

где $d\sigma^{(1)}$ — сечение в первом борновском приближении (см. § 80), а поправки к нему

$$\begin{aligned} d\sigma^{(2)} &= 2\,\mathrm{Re}\, M_{fi}^{(1)} M_{fi}^{(2)*} \frac{do'}{16\pi^2}, \\ d\sigma_{\text{рад}} &= 2\,\mathrm{Re}\, M_{fi}^{(1)} M_{fi}^{(3)*} \frac{do'}{16\pi^2}. \end{aligned} \tag{121.5}$$

Напомним (см. § 80), что

$$M_{fi}^{(1)} = |e|(\overline{u}'\gamma^0 u)\Phi(\mathbf{q}), \tag{121.6}$$

где $\Phi(\mathbf{q})$ — компонента Фурье скалярного потенциала постоянного внешнего поля ($\Phi \equiv A_0^{(e)}$) и учтено, что заряд электрона $e = -|e|$.

Два выражения (121.5) могут, очевидно, вычисляться независимо. Первое будет рассмотрено в этом, а второе — в следующем параграфе.

Амплитуда второго приближения, построенная по диаграмме (121.1), дается интегралом [1])

$$M_{fi}^{(2)} = -e^2 \int \left\{ \overline{u}(p')\gamma^0 \frac{\gamma f + m}{f^2 - m^2 + i0} \gamma^0 u(p) \right\} \Phi(\mathbf{p}' - \mathbf{f})\Phi(\mathbf{f} - \mathbf{p}) \frac{d^3 f}{(2\pi)^3}; \tag{121.7}$$

«4-импульсы» внешнего постоянного поля $q_1 = f - p$ и $q_2 = p' - f$ не имеют временных компонент. Поэтому

$$f_0 = \varepsilon = \varepsilon', \tag{121.8}$$

где ε и ε' — начальная и конечная энергии электрона, совпадающие друг с другом при упругом рассеянии.

[1]) Напомним, что здесь надо пользоваться правилом диаграммной техники, относящимся к постоянному внешнему полю, — см. сформулированное в § 77 правило 8.

В чисто кулоновом поле неподвижного заряда $Z|e|$:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \frac{4\pi Z|e|}{\mathbf{q}^2}.$$

Для такого потенциала интеграл (121.7) логарифмически расходится (при $\mathbf{f} \approx \mathbf{p}$ и $\mathbf{f} \approx \mathbf{p}'$). Эта расходимость специфична для кулонова поля и связана с медленностью его убывания на больших расстояниях. Ее происхождение легче всего уяснить на примере нерелятивистского случая. Согласно т. III, (135.8), коэффициент при сферической волне $\exp(i|\mathbf{p}|r)/r$ в асимптотическом выражении волновой функции электрона в кулоновом поле имеет вид

$$f(\theta)\exp\left(-i\frac{Z\alpha m}{|\mathbf{p}|}\ln|\mathbf{p}|r\right).$$

Но этот коэффициент и является амплитудой рассеяния электрона в поле, и мы видим, что ее фаза содержит расходящийся (при $r \to \infty$) член. При разложении амплитуды рассеяния по степеням $Z\alpha$ этот член приведет к расходимости всех членов разложения, начиная со второго (так как сама функция $f(\theta)$ пропорциональна $Z\alpha$). Ситуация в релятивистском случае имеет, разумеется, аналогичный характер.

Эти рассуждения показывают в то же время, что расходящиеся члены должны сократиться при вычислении сечения рассеяния, в котором фаза амплитуды несущественна. Простейший путь корректного проведения вычислений состоит в том, чтобы рассмотреть сначала рассеяние в экранированном кулоновом поле, т. е. положить

$$\Phi(q) = \frac{4\pi Z|e|}{\mathbf{q}^2 + \delta^2} \tag{121.9}$$

с малой константой экранирования δ ($\delta \ll |\mathbf{p}|$). Тем самым устраняется расходимость в амплитуде рассеяния, а в окончательном ответе для сечения уже можно положить $\delta = 0$.

Подставив (121.9) в (121.7), получим

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi}Z^2\alpha^2\overline{u}(p')[(\gamma^0\varepsilon + m)J_1 + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{J}]u(p),$$

где введены обозначения:

$$\begin{gathered} J_1 = \int\frac{d^3f}{[(\mathbf{p}'-\mathbf{f})^2+\delta^2][(\mathbf{f}-\mathbf{p})^2+\delta^2][\mathbf{p}^2-\mathbf{f}^2+i0]}, \\ \mathbf{J} = \int\frac{\mathbf{f}d^3f}{[(\mathbf{p}'-\mathbf{f})^2+\delta^2][(\mathbf{f}-\mathbf{p})^2+\delta^2][\mathbf{p}^2-\mathbf{f}^2+i0]} \equiv \frac{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}{2}J_2. \end{gathered} \tag{121.10}$$

Здесь $\mathbf{p}^2 = \varepsilon^2 - m^2 = \mathbf{p}'^2$ и интеграл $\mathbf{J}$ симметричен по отношению к $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$; из соображений векторной симметрии очевидно,

что вектор $\mathbf{J}$ должен быть направлен вдоль $\mathbf{p}+\mathbf{p}'$. Исключив теперь матрицы $\boldsymbol{\gamma}$ с помощью равенств

$$\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}u = (\gamma^0\varepsilon - m)u, \quad \overline{u}'\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}' = \overline{u}'(\gamma^0\varepsilon - m),$$

получим

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi}Z^2\alpha^2\overline{u}(p')[\gamma^0\varepsilon(J_1+J_2) + m(J_1-J_2)]u(p). \quad (121.11)$$

Для проведения дальнейших вычислений перейдем (как и в § 80) от биспинорных амплитуд u и u' к соответствующим им (согласно (23.9) и (23.11)) 3-спинорам w и w'. Прямым перемножением находим

$$\overline{u}'u = w'^*\{(\varepsilon+m) - (\varepsilon-m)\cos\theta + i\boldsymbol{\nu\sigma}(\varepsilon-m)\sin\theta\}w,$$
$$\overline{u}'\gamma^0 u = w'^*\{(\varepsilon+m) + (\varepsilon-m)\cos\theta - i\boldsymbol{\nu\sigma}(\varepsilon-m)\sin\theta\}w,$$

где

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{[\mathbf{nn}']}{\sin\theta}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \qquad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}'|}, \qquad \cos\theta = \mathbf{nn}'.$$

После этого амплитуда (121.11) представится в виде [1])

$$M_{fi}^{(2)} = 4\pi w'^*(A^{(2)} + B^{(2)}\boldsymbol{\nu\sigma})w,$$
$$A^{(2)} = -\frac{1}{2\pi^2}Z^2\alpha^2\{[(\varepsilon+m) + (\varepsilon-m)\cos\theta]\varepsilon(J_1+J_2) +$$
$$+[(\varepsilon+m) - (\varepsilon-m)\cos\theta]m(J_1-J_2)\}, \quad (121.12)$$
$$B^{(2)} = \frac{i}{2\pi^2}Z^2\alpha^2(\varepsilon-m)\sin\theta[\varepsilon(J_1+J_2) - m(J_1-J_2)].$$

Амплитуда же рассеяния первого приближения в аналогичных обозначениях имеет вид

$$M_{fi}^{(1)} = 4\pi w'^*(A^{(1)} + B^{(1)}\boldsymbol{\nu\sigma})w,$$
$$A^{(1)} = \frac{Z\alpha}{\mathbf{q}^2}[(\varepsilon+m) + (\varepsilon-m)\cos\theta], \quad (121.13)$$
$$B^{(1)} = -i\frac{Z\alpha}{\mathbf{q}^2}(\varepsilon-m)\sin\theta,$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$.

Сечение рассеяния и поляризационные эффекты выражаются через величины $A = A^{(1)} + A^{(2)}$ и $B = B^{(1)} + B^{(2)}$ формулами, полученными в т. III, § 140. Так, сечение рассеяния неполяризованных электронов:

$$d\sigma = (|A|^2 + |B|^2)do' \approx d\sigma^{(1)} + 2(A^{(1)}\operatorname{Re}A^{(2)} - iB^{(1)}\operatorname{Im}B^{(2)})do'.$$

[1]) Определение величин A и B здесь соответствует определению в § 37 и в т. III, § 140, и отличается множителем от определения в § 80.

После подстановки (121.12),(121.13) простое вычисление дает

$$d\sigma^{(2)} = -do' \frac{Z^3\alpha^3\varepsilon^3}{\pi^2 \mathbf{p}^2 \sin^2(\theta/2)} \left[\left(1 - \mathbf{v}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \operatorname{Re}(J_1 + J_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{m^2}{\varepsilon^2} \operatorname{Re}(J_1 - J_2) \right], \quad (121.14)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\varepsilon$ — скорость электрона, θ — угол рассеяния. В результате рассеяния электроны поляризуются, вектор поляризации конечных электронов

$$\boldsymbol{\zeta}' = \frac{2\operatorname{Re}(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2} \boldsymbol{\nu} \approx \frac{2(A^{(1)} \operatorname{Re} B^{(2)} - iB^{(1)} \operatorname{Im} A^{(2)})}{|A|^2 + |B|^2} \boldsymbol{\nu},$$

или, после подстановки (121.12),(121.13),

$$\boldsymbol{\zeta}' = \frac{4Z\alpha m \mathbf{p}^4}{\pi^2 \varepsilon^2} \frac{\sin^3(\theta/2)\cos(\theta/2)}{1 - v^2 \sin^2(\theta/2)} \operatorname{Im}(J_1 - J_2) \boldsymbol{\nu}. \quad (121.15)$$

Перейдем к вычислению интегралов J_1 и J_2. Оно облегчается применением метода параметризации по формуле (131.2). Интеграл J_1 принимает вид

$$J_1 = -2 \int \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d^3 f\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \cdot \delta(1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3)}{\{[(\mathbf{p}' - \mathbf{f})^2 + \delta^2]\xi_1 + [(\mathbf{p} - \mathbf{f})^2 + \delta^2]\xi_2 + [\mathbf{f}^2 - \mathbf{p}^2 - i0]\xi_3\}^3}.$$

Интегрирование по ξ_3 устраняет δ-функцию; приведя подобные члены в знаменателе, получим

$$J_1 = -2 \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \int \frac{d^3 f\, d\xi_1\, d\xi_2}{\{\delta^2(\xi_1 + \xi_2) + \mathbf{p}^2(2\xi_1 + 2\xi_2 - 1) - 2\mathbf{f}(\xi_1 \mathbf{p}' + \xi_2 \mathbf{p}) + \mathbf{f}^2 - i0\}^3}.$$

Введя вместо $\mathbf{f}$ новую переменную $\mathbf{k} = \mathbf{f} - \xi_1 \mathbf{p}' - \xi_2 \mathbf{p}$, сведем интегрирование по $d^3 f$ к интегралу вида

$$\int \frac{d^3 k}{(\mathbf{k}^2 - a^2 - i0)^3} = i\frac{\pi^2}{4a^3},$$

так что

$$J_1 =$$
$$= -\frac{i\pi^2}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \frac{d\xi_1\, d\xi_2}{\{\mathbf{p}^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1 - 2\xi_2 + 1) + 2\xi_1\xi_2 \mathbf{p}\mathbf{p}' - \delta^2(\xi_1 + \xi_2) - i0\}^{3/2}}.$$

Вместо ξ_1 и ξ_2 вводим симметричные комбинации: $x = \xi_1 + \xi_2$, $y = \xi_1 - \xi_2$. Интегрирование по y (в пределах от 0 до x) элементарно

и дает

$$J_1 = -\frac{i\pi^2}{2|\mathbf{p}|^3}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\left[bx^2 - 2x + 1 - \dfrac{\delta^2}{\mathbf{p}^2}x - i0\right]\left[(1-x)^2 - \dfrac{\delta^2}{\mathbf{p}^2}x - i0\right]^{1/2}},$$

где $b = \dfrac{\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}'}{2\mathbf{p}^2} = \cos^2\dfrac{\theta}{2}$.

Для вычисления интеграла по x при $\delta \to 0$ разбиваем область интегрирования на две части:

$$\int_0^1 \ldots\, dx = \int_0^{1-\delta_1} \ldots\, dx + \int_{1-\delta_1}^1 \ldots\, dx, \qquad 1 \gg \delta_1 \gg \frac{\delta}{|\mathbf{p}|}.$$

В первом интеграле можно положить $\delta = 0$; тогда [1])

$$\int_0^{1-\delta_1} \ldots\, dx = \frac{1}{2(1-b)} \ln \frac{(1-x)^2}{bx^2 - 2x + 1 - i0}\Bigg|_0^{1-\delta_1} = \frac{1}{2(1-b)}\left[\ln\frac{\delta_1^2}{1-b} + i\pi\right].$$

Во втором же интеграле можно положить $x = 1$ везде, кроме члена $(1-x)^2$, а также положить $\delta = 0$ в первой скобке знаменателя. Тогда [2])

$$\int_{1-\delta_1}^1 \ldots\, dx = \frac{1}{1-b}\int_0^{\delta_1} \frac{dx'}{\left(x'^2 - \delta^2/\mathbf{p}^2 - i0\right)^{1/2}} =$$

$$= -\frac{1}{1-b}\left[\int_{\delta/|\mathbf{p}|}^{\delta_1} \frac{dx'}{\left(x'^2 - \delta^2/\mathbf{p}^2\right)^{1/2}} + i\int_0^{\delta/|\mathbf{p}|} \frac{dx'}{\left(\delta^2/\mathbf{p}^2 - x'^2\right)^{1/2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{1-b}\left[\ln\frac{2|\mathbf{p}|\delta_1}{\delta} + i\frac{\pi}{2}\right].$$

При сложении обоих интегралов величина δ_1, как и следовало ожидать, выпадает, и получается

$$J_1 = \frac{i\pi^2}{2|\mathbf{p}|^3\sin^2(\theta/2)} - \ln\left(\frac{2|\mathbf{p}|}{\delta}\sin\frac{\theta}{2}\right). \qquad (121.16)$$

[1]) Правило обхода (член $i0$) позволяет определить изменение аргумента выражения под знаком логарифма при переходе от 0 к $1-\delta_1$: при обходе точки ветвления снизу аргумент меняется от 0 до $-\pi$.

[2]) И здесь правило обхода определяет знак корня при переходе от положительных к отрицательным значениям подкоренного выражения.

Интеграл J_2 вычисляется аналогичным образом и равен

$$J_2 = J_1 - \frac{\pi^3\left[1-\sin(\theta/2)\right]}{4|\mathbf{p}|^3\cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}} - \frac{i\pi^2}{2|\mathbf{p}|^3\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\ln\sin\frac{\theta}{2}. \tag{121.17}$$

Остается подставить эти выражения в (121.14),(121.15), и мы получим окончательные результаты:

$$d\sigma^{(2)} = \frac{\pi(Z\alpha)^3\varepsilon}{4|\mathbf{p}|^3\sin\dfrac{\theta}{2}}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)do', \tag{121.18}$$

$$\boldsymbol{\zeta}' = \frac{2Z\alpha m|\mathbf{p}|}{\varepsilon^2}\frac{\sin^3\dfrac{\theta}{2}\ln\sin\dfrac{\theta}{2}}{\left(1-v^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\dfrac{\theta}{2}}\boldsymbol{\nu} \tag{121.19}$$

(*W. A. McKinley, H. Feshbach,* 1948; *R. H. Dalitz,* 1950).

В первом борновском приближении сечения рассеяния электрона и позитрона (в одном и том же внешнем поле) одинаковы. Во втором приближении эта симметрия исчезает. Для рассеяния позитрона (заряд $+|e|$) амплитуда первого приближения (121.6) имеет обратный знак, знак же $M_{fi}^{(2)}$ не меняется. Поэтому сечение $d\sigma^{(2)}$, представляющее собой интерференционный член между $M_{fi}^{(1)}$ и $M_{fi}^{(2)}$, изменит знак. То же самое произойдет и с выражением (121.19) для вектора поляризации. Вообще, переход от формул для рассеяния электрона к формулам для рассеяния позитрона можно произвести формальной заменой $Z \to -Z$.

§ 122. Радиационные поправки к рассеянию электрона во внешнем поле

Перейдем к вычислению радиационных поправок к рассеянию электрона во внешнем поле (*J. Schwinger,* 1949).

Соответствующая часть амплитуды рассеяния изображается двумя диаграммами (121.2). Диаграмма *а* дает в амплитуду вклад

$$-(\overline{u}'\gamma^0 u)\frac{\mathcal{P}(-\mathbf{q}^2)}{4\pi}D(-\mathbf{q}^2)\cdot e\Phi(\mathbf{q}),$$

где $\mathcal{P}(-\mathbf{q}^2)$ — поляризационный оператор, отвечающий петле в диаграмме. Вклад диаграммы *б*:

$$-(\overline{u}'\Lambda^0 u)e\Phi(\mathbf{q}),$$

где Λ^0 — поправочный член в вершинном операторе ($\Gamma^\mu=\gamma^\mu+\Lambda^\mu$);

согласно (116.6)

$$\Lambda^0 = \gamma^0[f(-\mathbf{q}^2) - 1] - \frac{1}{2m}\sigma^{0\nu} q_\nu g(-\mathbf{q}^2).$$

Сложив оба вклада, получим [1])

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(3)} &= -(\overline{u}'\gamma^0 Q_{\text{рад}} u)e\Phi(\mathbf{q}), \\ Q_{\text{рад}}(\mathbf{q}) &= f(-\mathbf{q}^2) - 1 - \frac{1}{\mathbf{q}^2}\mathcal{P}(-\mathbf{q}^2) + \frac{1}{2m} g(-\mathbf{q}^2)\mathbf{q}\boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \tag{122.1}$$

Обсудим прежде всего вопрос об инфракрасной расходимости, содержащейся в формфакторе $f(-\mathbf{q}^2)$, а тем самым и в амплитуде рассеяния (122.1).

Уже было указано (см. § 98), что точная амплитуда чисто упругого рассеяния сама по себе равна нулю, т. е. не имеет смысла. Физическим смыслом обладает лишь амплитуда рассеяния, определенного как процесс, в котором может быть испущено любое число мягких фотонов с энергией каждого, меньшей некоторого заданного значения $\omega_{\max}$, удовлетворяющего условиям применимости теории излучения мягких фотонов. Другими словами, имеет смысл лишь сумма

$$d\sigma = d\sigma_{\text{упр}} + d\sigma_{\text{упр}} \int\limits_0^{\omega_{\max}} dw_\omega + d\sigma_{\text{упр}} \frac{1}{2!} \int\limits_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_1} \int\limits_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_2} + \ldots, \tag{122.2}$$

где $d\sigma_{\text{упр}}$ — сечение рассеяния без испускания фотонов, dw_ω — дифференциальная вероятность испускания электроном фотона частоты ω. При этом предполагается, что $d\sigma_{\text{упр}}$ само вычисляется в виде ряда теории возмущений, т. е. в виде разложения по степеням α [2]). Тогда после сведения вместе членов каждого порядка по α из всех слагаемых в (122.2) мы получим $d\sigma$ в виде разложения по α, каждый из членов которого будет конечным.

В первом борновском приближении $d\sigma_{\text{упр}} \sim \alpha^2$. Этот член, естественно, имеет смысл сам по себе. Если же мы хотим учесть следующую поправку в $d\sigma_{\text{упр}}$ (член $\sim \alpha^3$), то наряду с ней надо взять также и второй член в сумме (122.2): поскольку $dw_\omega \sim \alpha$, при умножении на $d\sigma_{\text{упр}} \sim \alpha^2$ отсюда тоже возникает величина

[1]) При преобразовании надо помнить, что если $q^\mu = (0,\ \mathbf{q})$, то $q_\mu = (0,\ -\mathbf{q})$! Поэтому $\sigma^{0\nu} q_\nu = -\gamma^0 \mathbf{q}\boldsymbol{\gamma}$.

[2]) Что касается вероятности dw_ω, то необходимость учета радиационных поправок в ней зависит от $\omega_{\max}$; предел $\omega \to 0$ отвечает классическому случаю, в котором радиационные поправки исчезают; поэтому выбором достаточно малого $\omega_{\max}$ можно всегда сделать их малыми.

$\sim \alpha^3$. Покажем, что при сложении этих двух величин инфракрасная расходимость устраняется.

Расходящийся член в формфакторе f согласно (117.17) имеет вид [1])

$$-\frac{\alpha}{2}F\left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m}\right)\ln\frac{m}{\lambda}.$$

Соответствующий член в амплитуде (122.1):

$$\frac{\alpha}{2}F\ln\frac{m}{\lambda}\cdot(\overline{u}'\gamma^0 u)e\Phi(\mathbf{q}),$$

а в сечении рассеяния (121.5):

$$d\sigma^{\text{инфра}} = -\alpha F\ln\frac{m}{\lambda}\cdot|\overline{u}'\gamma^0 u|^2|e\Phi(\mathbf{q})|^2\frac{do'}{16\pi^2}.$$

Сравнив это с борновским сечением

$$d\sigma^{(1)} = |\overline{u}'\gamma^0 u|^2|e\Phi(\mathbf{q})|^2\frac{do'}{16\pi^2},$$

найдем, что

$$d\sigma^{\text{инфра}} = -\alpha F\ln\frac{m}{\lambda}\cdot d\sigma^{(1)}. \tag{122.3}$$

С другой стороны, второй член в (122.2) с $\int dw_\omega$ из (120.11) дает

$$d\sigma_{\text{упр}}\int\limits_0^{\omega_{\max}} dw_\omega = \alpha F\ln\frac{2\omega_{\max}}{\lambda}\cdot d\sigma^{(1)}. \tag{122.4}$$

Наконец, сложив (122.3) и (122.4), получим

$$-d\sigma^{(1)}\cdot\alpha F\left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m}\right)\ln\frac{m}{2\omega_{\max}}. \tag{122.5}$$

Мы видим, что расходящийся вклад от мягких ($|\mathbf{k}|\sim\lambda$) виртуальных фотонов действительно сокращается с вкладом излучения таких же реальных фотонов. Та же ситуация имеет место в любом другом процессе рассеяния.

В то же время появляется зависимость сечения рассеяния от $\omega_{\max}$. Эта зависимость — следствие того, что величина $\omega_{\max}$, входит в самое определение рассеяния как процесса, в котором может быть испущено любое число мягких фотонов. Естественно,

[1]) В этом легко убедиться, использовав соотношение

$$\frac{|\mathbf{q}|}{m} = \frac{1-\xi}{\sqrt{\xi}}$$

между $|\mathbf{q}|$ и переменной ξ, с помощью которой написана формула (117.17).

что сечение такого процесса будет тем меньше, чем ниже предел $\omega_{\max}$ частот фотонов, испускание которых мы еще относим к данному процессу рассеяния.

Найдем теперь полное выражение для радиационной поправки к сечению рассеяния. Поступая по стандартным правилам (см. (65.7)), находим для сечения, усредненного по поляризациям начального и просуммированного по поляризациям конечного электронов:

$$d\sigma = d\sigma^{(1)} + d\sigma_{\text{рад}} =$$
$$= |e\Phi(\mathbf{q})|^2 \operatorname{Sp}\{(\gamma p' + m)(\gamma^0 + \gamma^0 Q_{\text{рад}})(\gamma p + m)(\gamma^0 + \overline{Q}_{\text{рад}}\gamma^0)\} \frac{do'}{32\pi^2}. \tag{122.6}$$

Согласно (122.1)

$$Q_{\text{рад}} = a + b\boldsymbol{\gamma}\mathbf{q}, \quad \overline{Q}_{\text{рад}} = \gamma^0 Q^+{}_{\text{рад}}\gamma^0 = a + b\boldsymbol{\gamma}\mathbf{q},$$
$$a = f(-\mathbf{q}^2) - 1 - \frac{1}{\mathbf{q}^2}\mathcal{P}(-\mathbf{q}^2), \quad b = \frac{1}{2m}g(-\mathbf{q}^2).$$

С точностью до членов, линейных по a и b, след в (122.6) равен

$$\frac{1}{4}\operatorname{Sp}\{\dots\} = 2\left(\varepsilon^2 - \frac{\mathbf{q}^2}{4}\right)(1 + 2a) - 2bm\mathbf{q}^2.$$

Поэтому

$$d\sigma_{\text{рад}} = 2\left\{f_\lambda(-\mathbf{q}^2) - 1 - \frac{1}{\mathbf{q}^2}\mathcal{P}(-\mathbf{q}^2) - \frac{\mathbf{q}^2}{4\varepsilon^2 - \mathbf{q}^2}g(-\mathbf{q}^2)\right\} d\sigma^{(1)}, \tag{122.7}$$

где $d\sigma^{(1)}$ — борновское сечение рассеяния неполяризованных электронов (80.5); формфактору f приписан индекс λ для напоминания о том, что он «обрезан по массе фотона λ».

Остается прибавить к (122.7) сечение испускания мягких фотонов. Если представить f_λ в виде

$$f_\lambda(-\mathbf{q}^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}F\left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m}\right)\ln\frac{m}{\lambda} + \alpha F_2, \tag{122.8}$$

то согласно (120.11) это добавление сведется к замене в (122.7) f_λ на

$$f_{\omega_{\max}} = 1 - \frac{\alpha}{2}F\left(\frac{|\mathbf{q}|}{2m}\right)\ln\frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{\alpha}{2}F_1 + \alpha F_2. \tag{122.9}$$

С этой заменой (122.7) дает окончательный ответ.

Отметим, что в нерелятивистском пределе [1])

$$f_{\omega_{\max}} = 1 - \frac{\alpha \mathbf{q}^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{11}{24}\right), \qquad \mathbf{q}^2 \ll m^2. \qquad (122.10)$$

Обратим внимание на то, что специфика внешнего поля входит в радиационную поправку к сечению только через посредство $d\sigma^{(1)}$; множитель же в фигурных скобках в (122.7) имеет универсальный характер. В нерелятивистском приближении

$$d\sigma_{\text{рад}} = -d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2\alpha}{3\pi}\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{19}{30}\right), \qquad \mathbf{q}^2 \ll m^2 \qquad (122.11)$$

(сюда входят вклады от всех членов в (122.7)). В обратном же, ультрарелятивистском, случае основной вклад вносит только член с $f_{\omega_{\max}} - 1$ и получается

$$d\sigma_{\text{рад}} = -d\sigma^{(1)} \cdot \frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\ln\frac{\varepsilon}{\omega_{\max}}, \qquad \mathbf{q}^2 \gg m^2. \qquad (122.12)$$

Отметим в заключение, что рассмотренные здесь радиационные поправки не приводят к появлению каких-либо поляризационных эффектов, отсутствующих в первом борновском приближении (в отличие от поправок второго борновского приближения, рассмотренных в § 121). Дело в том, что специфика первого борновского приближения в конечном счете связана с эрмитовостью S-матрицы. Это свойство, однако, сохраняется и при учете рассмотренных радиационных поправок, поскольку в этом приближении отсутствуют какие-либо реальные промежуточные состояния в канале рассеяния (так что правая часть соотношения унитарности обращается в нуль) [2]).

§ 123. Радиационное смещение атомных уровней

Радиационные поправки приводят к смещению уровней энергии связанных состояний электрона во внешнем поле (так называемое *смещение Лэмба*). Наиболее интересный случай этого ро-

[1]) Это выражение отличается от нерелятивистского (117.20) заменой

$$\ln\lambda \to \ln 2\omega_{\max} - 5/6.$$

[2]) Вычисление радиационных поправок к процессам, появляющимся лишь во втором приближении теории возмущений, значительно более громоздко и в этой книге не будет воспроизведено. Ограничимся лишь некоторыми литературными ссылками: радиационные поправки к рассеянию фотона на электроне — *Brown L. M., Feynman R.*//Phys. Rev. — 1952. — V. 85. — P. 231; к двухфотонной аннигиляции пары — *Harris J., Brown L. M.*//Phys. Rev. — 1957. — V. 105. — P. 1656; к рассеянию электрона электроном и позитроном — *Redhead M.*//Proc. Roy. Soc. — 1953. — V. A220. — P. 219; *Половин Р. В.*//ЖЭТФ. — 1956. — Т. 31. — С. 449; к тормозному излучению — *Фомин П. И.*//ЖЭТФ. — 1958. — Т. 35 — С. 707.

да — смещение уровней атома водорода (или водородоподобного иона) [1]).

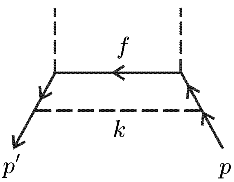
Последовательный метод вычисления поправок к уровням энергии основан на использовании точного электронного пропагатора во внешнем поле (см. § 109). Но если

$$Z\alpha \ll 1, \tag{123.1}$$

то можно воспользоваться более простым способом, в котором внешнее поле рассматривается как возмущение.

В первом приближении по внешнему полю радиационная поправка во взаимодействии электрона с постоянным электрическим полем описывается теми двумя диаграммами (121.2), которые уже рассматривались нами в связи с задачей о рассеянии электрона в таком поле; переход от одной задачи к другой требует лишь простой переформулировки (см. ниже).

Легко понять, однако, что таким способом можно найти только ту часть сдвига уровня, которая обусловлена взаимодействием с виртуальными фотонами достаточно больших частот. Действительно, рассмотрим, например, следующую (по внешнему полю) радиационную поправку к амплитуде рассеяния электрона:



(123.2)

(в отличие от (121.2,*б*) эта диаграмма содержит две вершины внешнего поля). В той области интегрирования по d^4k, где k_0 достаточно велико, эта поправка содержит лишнюю степень $Z\alpha$ и поэтому несущественна. Но введение в диаграмму второй вершины внешнего поля вводит в нее также и еще один электронный пропагатор $G(f)$. При малых k (и нерелятивистских внешних концах p и p') оказываются существенными импульсы виртуальных электронов f, близкие к полюсу пропагатора $G(f)$. Появляющийся в результате малый знаменатель компенсирует лишний малый множитель $Z\alpha$. То же самое относится, очевидно,

[1]) Сдвиг водородных уровней впервые вычислил *Бете* (*H. A. Bethe,* 1147) с логарифмической точностью на основе нерелятивистского рассмотрения; этот расчет послужил толчком для всего последующего развития квантовой электродинамики. Разность уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ (в первом неисчезающем приближении теории возмущений) была точно вычислена *Кроллем* и *Лэмбом* (*N. M. Kroll, W. E. Lamb,* 1949), а полная формула для сдвига уровней была найдена *Вайскопфом* и *Френчем* (*V. Weisskopf, J. B. French,* 1949).

и к поправкам всех вообще порядков по внешнему полю. Другими словами, в области малых частот виртуальных фотонов внешнее поле должно учитываться точным образом.

Разобьем искомый сдвиг уровня δE_s [1]) на две части:

$$\delta E_s = \delta E_s^{(\mathrm{I})} + \delta E_s^{(\mathrm{II})} \tag{123.3}$$

происходящие соответственно от взаимодействия с виртуальными фотонами частоты в областях I) $k_0 > \varkappa$, II) $k_0 < \varkappa$. При этом выберем $\varkappa$ так, чтобы было

$$(Z\alpha)^2 m \ll \varkappa \ll m \tag{123.4}$$

($Z^2\alpha^2 m$ — порядок величины энергии связи электрона в атоме). Тогда в области I достаточно учитывать поле ядра лишь в первом приближении. В области же II надо учитывать поле ядра точным образом, но зато (в силу условия $\varkappa \ll m$) можно решать задачу в нерелятивистском приближении — не только по отношению к самому электрону, но и для всех промежуточных состояний. При условии (123.4) области применимости обоих способов расчета перекрываются, что и позволяет произвести строгую «сшивку» обеих частей поправки к уровню.

Высокочастотная часть сдвига. Рассмотрим сначала область I. В ней можно воспользоваться поправкой к амплитуде рассеяния (122.1), из которой, однако, необходимо предварительно исключить вклад виртуальных фотонов, относящихся к области II. Такие фотоны вносят лишь малый вклад в формфактор g, который поэтому не нуждается в изменении. В функцию же f виртуальные фотоны малых частот вносят большой вклад из-за инфракрасной расходимости. Поэтому в качестве f в (122.1) надо подставить функцию $f_\varkappa$, из которой область $k_0 < \varkappa$ уже исключена.

Такое исключение можно было бы произвести прямым способом, вычитая из f интеграл по области $k_0 < \varkappa$. Требуемый результат можно, однако, получить без новых вычислений, используя результаты § 122.

Для этого заметим, что исключение частот $k_0 < \varkappa$ можно рассматривать как один из возможных способов инфракрасного обрезания. Результат же для поправки к сечению рассеяния не может, разумеется, зависеть от способа обрезания при условии, что таким же образом обрезается и вероятность испускания реальных мягких фотонов, т. е. в понятие «упругого» рассеяния включается испускание с частотами лишь от $\varkappa$ до заданного $\omega_{\max}$. Если выбрать $\omega_{\max} = \varkappa$, то явный учет испускания фотонов станет излишним. Отсюда ясно, что $f_\varkappa$ получается из опре-

---

[1]) В этом параграфе E_s обозначает энергию электрона в атоме, не включающую в себя его энергию покоя. Индекс s — совокупность квантовых чисел, определяющих состояние атома.

деленной в § 122 функции $f_{\omega_{\max}}$ просто заменой $\omega_{\max}$ на $\varkappa$. В частности, в нерелятивистском случае

$$f_\varkappa - 1 = -\frac{\alpha \mathbf{q}^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varkappa} + \frac{11}{24}\right). \tag{123.5}$$

Преобразуем теперь поправку (122.1) к амплитуде рассеяния, представив ее как результат соответствующей поправки к эффективной потенциальной энергии электрона в поле. Сравнивая амплитуду (122.1)

$$-e(u'^* Q_{\text{рад}} \Phi u)$$

с борновской амплитудой рассеяния (121.6)

$$-e(u'^* \Phi u),$$

мы видим, что роль такой поправки играет (в импульсном представлении) функция

$$e\delta\Phi(\mathbf{q}) = eQ_{\text{рад}}(\mathbf{q})\Phi(\mathbf{q}). \tag{123.6}$$

В нерелятивистском случае, взяв $\mathcal{P}$ и g из (113.14) и (117.20), а для f, подставив $f_\varkappa$ из (123.5), получим

$$\delta\Phi(\mathbf{q}) = \left\{-\frac{\alpha \mathbf{q}^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varkappa} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5}\right) + \frac{\alpha}{4\pi m}\mathbf{q}\boldsymbol{\gamma}\right\}\Phi(\mathbf{q}). \tag{123.7}$$

Соответствующая функция $\delta\Phi(\mathbf{r})$ в координатном представлении [1]:

$$\delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varkappa} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5}\right)\Delta\Phi(\mathbf{r}) - i\frac{\alpha}{4\pi m}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla}\Phi(\mathbf{r}). \tag{123.8}$$

Смещение уровня $\delta E_s^{(I)}$ получим, усредняя $e\delta\Phi(\mathbf{r})$ по волновой функции невозмущенного состояния электрона в атоме, т. е. как соответствующий диагональный матричный элемент [2]:

$$\delta E_s^{(\mathrm{I})} = \frac{e\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\varkappa} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5}\right)\langle s|\Delta\Phi|s\rangle - i\frac{e\alpha}{4\pi m}\langle s|\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\nabla}\Phi|s\rangle. \tag{123.9}$$

---

[1]) Подчеркнем отличие этой поправки к потенциалу от поправки, рассматривавшейся в § 114. Последняя включала в себя только эффект поляризации вакуума (диаграмма (121.2,*а*)) для кулонова поля как такового. Поправка же (123.8) относится уже ко взаимодействию поля с электроном и включает в себя также и эффект изменения движения электрона (диаграмма (121.2,*б*)).

[2]) Строго говоря, определенные в § 117 формфакторы относились к вершинному оператору при двух свободных электронных концах ($p^2 = p'^2 = m^2$). Для электрона же в атоме энергия E_s — уровень, вообще никак не связанный с $\mathbf{p}$. Этим отличием можно, однако, пренебречь в области I.

В первом члене достаточно использовать при усреднении нерелятивистскую функцию электрона. Во втором же члене такого приближения недостаточно: нулевое приближение по нерелятивистским функциям обращается в нуль ввиду отсутствия у матриц $\boldsymbol{\gamma}$ диагональных элементов. Поэтому здесь надо воспользоваться найденной в § 33 приближенной релятивистской функцией $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$, сохранив в ней малые (в стандартном представлении) компоненты χ. Имеем

$$\psi^* \boldsymbol{\gamma} \psi = \varphi^* \boldsymbol{\sigma} \chi - \chi^* \boldsymbol{\sigma} \varphi$$

и, подставив из (33.4)

$$\chi = \frac{1}{2m} \boldsymbol{\sigma} \widehat{\mathbf{p}} \varphi = -\frac{i}{2m} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nabla} \varphi,$$

получим

$$\langle s | \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\nabla} \Phi | s \rangle = -\frac{i}{2m} \int \{\varphi^* (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nabla} \Phi)(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nabla} \varphi) + (\boldsymbol{\nabla} \varphi^* \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nabla} \Phi) \varphi\} d^3x =$$
$$= \frac{i}{2m} \int \{\varphi^* \Delta \Phi \cdot \varphi - 2i \boldsymbol{\sigma} \varphi^* [\boldsymbol{\nabla} \Phi \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi]\} d^3x$$

(при преобразовании интеграла использовано тождество (33.5) и произведено интегрирование по частям). Поскольку $\Phi = \Phi(r)$, то

$$\boldsymbol{\nabla} \Phi = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\Phi}{dr},$$

и поэтому

$$-i \boldsymbol{\sigma} [\boldsymbol{\nabla} \Phi \cdot \boldsymbol{\nabla}] = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \boldsymbol{\sigma} \widehat{\mathbf{l}},$$

где $\widehat{\mathbf{l}} = -i[\mathbf{r} \boldsymbol{\nabla}]$ — оператор орбитального момента. Наконец, собрав полученные выражения и подставив в (123.9), найдем

$$\delta E_s^{(\mathrm{I})} = \frac{e^3}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\varkappa} + \frac{19}{30} \right) \langle s | \Delta \Phi | s \rangle + \frac{e^3}{4\pi m^2} \langle s | \boldsymbol{\sigma} \mathbf{l} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} | s \rangle, \quad (123.10)$$

где теперь уже в обоих членах усреднение производится по нерелятивистской волновой функции.

Низкочастотная часть сдвига. Для вычисления второй части сдвига уровней используем прием, основанный в конечном итоге на условии унитарности.

В силу возможности испускания фотона возбужденное состояние атома является квазистационарным (а не строго стационарным). Такому состоянию можно приписать комплексное значение энергии, причем его мнимая часть равна $-w/2$, где w — вероятность распада состояния, т. е. в данном случае полная вероятность испускания фотона (см. III, § 134). В нерелятивистском

приближении излучение является дипольным, и согласно (45.7) имеем

$$\operatorname{Im}\delta E_s = -\frac{1}{2}w_s = -\frac{2}{3}\sum_{s'}|\mathbf{d}_{ss'}|^2(E_s - E_{s'})^3$$

(где суммирование производится по всем нижележащим уровням, $E_{s'} < E_s$), или в эквивалентном виде:

$$\operatorname{Im}\delta E_s = -\frac{2}{3}\int_0^\infty d\omega \cdot \sum_{s'}|\mathbf{d}_{ss'}|^2(E_s - E_{s'})^3\delta(E_s - E_{s'} - \omega). \tag{123.11}$$

Чтобы найти вещественную часть δE_s, следует рассмотреть E_s как комплексную переменную и произвести аналитическое продолжение. Это можно сделать, рассматривая δ-функции как происходящие от полюсов. Правило обхода полюсов задается, как обычно, добавлением отрицательной части к массам виртуальных частиц, в данном случае — к массам $m_{s'}$ электрона в промежуточных состояниях атома. Роль этих масс играют $m_{s'} = m + E_{s'}$, так что надо положить

$$E_{s'} \to E_{s'} - i0,$$

откуда следует замена

$$\delta(E_s - E_{s'} - \omega) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\frac{1}{E_s - E_{s'} - \omega + i0} \tag{123.12}$$

(ср. (111.3)).

Подставив (123.12) в (123.11), найдем, таким образом,

$$\operatorname{Im}\delta E_s = \operatorname{Im}\frac{2}{3\pi}\int_0^\infty d\omega \cdot \sum_{s'}|\mathbf{d}_{ss'}|^2\frac{(E_s - E_{s'})^3}{E_s - E_{s'} - \omega + i0}.$$

Искомое аналитическое продолжение получится теперь просто опусканием знака Im в обеих частях равенства. Нам надо, однако, выделить из δE_s лишь ту часть, которая связана с вкладом частот в области II: $\omega < \varkappa$. Для этого достаточно заменить верхний предел интеграла на $\varkappa$. Произведя интегрирование, получим в результате

$$\delta E_s^{(\mathrm{II})} = \frac{2}{3\pi}\sum_{s'}|\mathbf{d}_{ss'}|^2(E_{s'} - E_s)^3\ln\frac{\varkappa}{E_{s'} - E_s + i0}. \tag{123.13}$$

(в силу неравенства (123.4) на верхнем пределе мы пренебрегли разностью $E_s - E_{s'}$ по сравнению с $\varkappa$). В дальнейшем нас будет

интересовать только вещественная часть уровня; она получается заменой в (123.13) аргумента логарифма на $\varkappa/|E_{s'} - E_s|$.

В выражении (123.13) преобразуем член с $\ln\varkappa$, заменив матричные элементы дипольного момента $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ матричными элементами импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и его производной $\dot{\mathbf{p}}$:

$$\sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 = -\frac{e^2}{m^2} \sum_{s'} |\mathbf{p}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s) = \\ = \frac{ie^2}{2m^2} \sum_{s'} \{(\dot{\mathbf{p}})_{ss'} \mathbf{p}_{s's} - \mathbf{p}_{ss'} (\dot{\mathbf{p}})_{s's}\}.$$

Заменив теперь $\hat{\dot{\mathbf{p}}}$ согласно операторному уравнению движения электрона $\hat{\dot{\mathbf{p}}} = -e\boldsymbol{\nabla}\Phi$, получим

$$\sum_{s'} |\mathbf{d}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 = -\frac{ie^3}{2m^2} \sum_{s'} \{(\boldsymbol{\nabla}\Phi)_{ss'} \mathbf{p}_{s's} - \mathbf{p}_{ss'} (\boldsymbol{\nabla}\Phi)_{s's}\} = \\ = \frac{ie^3}{2m^2} \langle s|\mathbf{p}\boldsymbol{\nabla}\Phi - \boldsymbol{\nabla}\Phi\mathbf{p}|s\rangle = \frac{e^3}{2m^2} \langle s|\Delta\Phi|s\rangle. \quad (123.14)$$

Поэтому можно переписать (123.13) в виде

$$\delta E_s^{(\mathrm{II})} = \frac{e^3}{3\pi m^2} \langle s|\Delta\Phi|s\rangle \ln\frac{2\varkappa}{m} + \frac{2e^2}{3\pi} \sum_{s'} |\mathbf{r}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln\frac{m}{2|E_s - E_{s'}|}. \quad (123.15)$$

Полный сдвиг. Наконец, сложив обе части, найдем следующую окончательную формулу для сдвига уровня:

$$\delta E_s = \frac{2e^2}{3\pi} \sum_{s'} |\mathbf{r}_{ss'}|^2 (E_{s'} - E_s)^3 \ln\frac{m}{2|E_s - E_{s'}|} + \\ + \frac{e^3}{3\pi m^2} \frac{19}{30} \langle s|\Delta\Phi|s\rangle + \frac{e^3}{4\pi m^2} \langle s|\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}|s\rangle \quad (123.16)$$

(как и должно быть, вспомогательная величина $\varkappa$ из нее выпала) [1].

Все матричные элементы в (123.16) берутся по отношению к нерелятивистским волновым функциям электрона в атоме. Для атома водорода (или водородоподобного иона) эти функции зависят только от трех квантовых чисел: главного квантового числа

[1]) Определение поправок следующего порядка в сдвиге уровней требует очень сложных вычислений. Наиболее полную сводку и систематический вывод таких поправок (вместе с соответствующей библиографией) можно найти в статьях: *Erickson G. W., Yennie D. R.*//Ann. of Phys. — 1965. — V. 35. — P. 271, 447.

n, орбитального момента l и его проекции m (но не от полного момента j); соответствующие же уровни энергии зависят только от n. Введем обозначение [1])

$$L_{nl} = \frac{n^3}{2m(Ze^2)^4} \sum_{n'l'm'} |\langle n'l'm'|\mathbf{r}|nlm\rangle|^2 (E_{n'} - E_n)^3 \ln \frac{m(Ze^2)^2}{2|E_{n'} - E_n|}. \tag{123.17}$$

Уровни энергии пропорциональны $(Ze^2)^2$, а характерный размер атома пропорционален Ze^2; поэтому определенные согласно (123.17) величины L_{nl} от Z не зависят. Эти величины могут быть найдены численно.

Далее рассмотрим отдельно случаи $l = 0$ и $l \neq 0$. При $l = 0$ последний член в (123.16) исчезает. Во втором члене воспользуемся уравнением

$$e\Delta\Phi = 4\pi Ze^2 \delta(\mathbf{r}),$$

которому удовлетворяет потенциал кулонова поля ядра. Отсюда

$$\langle nlm|\Delta\Phi|nlm\rangle = 4\pi Ze^2 |\psi_{nlm}(0)|^2 = \begin{cases} 4m^3(Ze^2)^4 n^{-3}, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0 \end{cases}$$

(см. (34.3)). В первом же члене вводим обозначение (123.17) и еще раз используем равенство (123.14):

$$\sum_{n'l'm'} |\langle n'l'm'|\mathbf{r}|n00\rangle|^2 (E_{n'} - E_n)^3 = \frac{e}{2m^2} \langle n00|\Delta\Phi|n00\rangle = \frac{2m(Ze^2)^4}{n^3}.$$

В результате получим следующее выражение для сдвига s-термов:

$$\delta E_{n0} = \frac{4mc^2 Z^4 \alpha^5}{3\pi n^3} \left[\ln \frac{1}{(Z\alpha)^2} + L_{n0} + \frac{19}{30} \right] \tag{123.18}$$

(обычные единицы). Числовые значения нескольких величин L_{n0}:

$n =$	1	2	3	4	∞
$L_{n0} =$	$-2,984$	$-2,812$	$-2,768$	$-2,750$	$-2,721$

Невозмущенные уровни $E_n = -mc^2(Z\alpha)^2/(2n^2)$; поэтому относительная величина радиационного сдвига

$$\left| \frac{\delta E_{n0}}{E_{n0}} \right| \sim Z^2 \alpha^3 \ln \frac{1}{Z\alpha}. \tag{123.19}$$

[1]) Матричные элементы от $\mathbf{r}$ диагональны по числу j и от j не зависят; поэтому суммирование по s в (123.16) сводится к суммированию по n, l, m. В силу изотропии пространства сумма (123.17) не зависит, конечно, и от квантового числа m.

В случае $l \neq 0$ в (123.16) исчезает второй член. Третий же вычисляется с помощью формул, приведенных в § 34. В этом члене имеется зависимость также и от числа j. В результате получим

$$\delta E_{nlj} = \frac{4mc^2 Z^4 \alpha^5}{3\pi n^3} \left[L_{nl} + \frac{3}{8} \frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{l(l+1)(2l+1)} \right], \quad l \neq 0. \tag{123.20}$$

Таким образом, радиационный сдвиг снимает последнее вырождение, оставшееся после учета спин-орбитального взаимодействия, — вырождение уровней с одинаковыми значениями n и j, но разными $l = j \pm 1/2$. Так, числовое значение $L_{21} = +0{,}030$ и из (123.18)–(123.20) получается следующая величина для разности уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода:

$$E_{20\,1/2} - E_{21\,1/2} = 0,41mc^2\alpha^5$$

(этой разности отвечает частота 1050 МГц).

§ 124. Радиационное смещение уровней мезоатомов

В конце § 118 была выяснена существенная роль, которую играет эффект поляризации электронного вакуума в радиационной поправке (второго приближения) к магнитному моменту мюона. Еще важнее этот эффект для радиационного сдвига (уже в первом приближении) уровней μ-мезоводорода — водородоподобной системы из протона и μ-мезона (*А. Д. Галанин, И. Я. Померанчук,* 1952).

В произведенном в предыдущем параграфе расчете сдвига уровней обычного атома был учтен, в частности, эффект поляризации электронного вакуума (электронная петля в диаграмме (121.2,*а*)). Если, аналогичным образом, для мезоатома учитывать эффект поляризации мюонного вакуума, то весь расчет полностью переносится и на этот случай, с заменой лишь везде массы электрона $m = m_e$ массой мюона m_μ. Поскольку относительный сдвиг уровней оказался не зависящим от массы электрона (см. (123.19)), для мезоводорода получился бы тот же самый результат.

Легко видеть, однако, что значительно больший вклад в сдвиг уровней мезоатома внесет эффект поляризации электронного вакуума. Действительно, замена мюонной петли в диаграмме электронной означает замену мюонного поляризационного оператора электронным. Но поляризационный оператор $\mathcal{P}(q^2)$ обратно пропорционален квадрату массы частицы (при нерелятивистских значениях q^2). Ясно поэтому, что указанная замена приведет к увеличению эффекта в $(m_\mu/m_e)^2$ раз. Именно этим вкладом и

определится порядок величины сдвига уровней, который будет

$$\frac{\delta E}{|E|} \sim \alpha^3 \left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2,$$

т. е. на четыре порядка больше, чем у обычного водорода [1]. Более наглядно происхождение этого эффекта можно понять, вспомнив, что искажение кулонова потенциала поляризацией электронного вакуума простирается на расстояния $\sim 1/m_e$ (§ 114). В обычном атоме водорода электрон находится на расстояниях от ядра $\sim 1/(m_e\alpha)$, т. е. вне основной области искажения поля; в мезоводороде же мюон находится на расстояниях $\sim 1/(m_\mu\alpha)$, как раз попадающих в эту область.

Для точного вычисления сдвига уровней мезоатома нельзя, однако, пользоваться приближенным нерелятивистским выражением для поляризационного оператора, как это было сделано в формуле (123.7), использованной при вычислении сдвига уровней обычного атома. Дело в том, что характерные импульсы мюона в атоме мезоводорода $|\mathbf{p}_\mu| \sim \alpha m_\mu$. Для мюона такие импульсы являются нерелятивистскими, но по отношению к электрону — уже релятивистскими.

Мы должны, следовательно, воспользоваться полным релятивистским выражением (114.5) для эффективного потенциала поля ядра, искаженного поляризацией электронного вакуума. Сдвиг уровня определится путем усреднения по волновой функции мюона в атоме:

$$\delta E_{nl} = -|e| \int |\psi_{nl}|^2 \delta\Phi(r)\, d^3x = -|e| \int R_{nl}^2(r)\delta\Phi(r) r^2 dr, \quad (124.1)$$

где R_{nl} — радиальная часть кулоновой (нерелятивистской) волновой функции. Для водородоподобного иона с зарядом ядра $Z|e|$ функции $R_{nl}(r)$ зависят от r лишь в безразмерной комбинации $\rho = Z\alpha m_\mu r$ (расстояние, измеренное в кулоновых единицах). Учитывая это и подставляя $\delta\Phi(r)$ из (114.5) (с зарядом $Z|e|$ вместо e_1), приведем интеграл (124.1) к виду

$$\delta E_{nl} = -\frac{2}{3\pi}\alpha^3 m_\mu Z Q_{nl}\left(\frac{m_e}{Z\alpha m_\mu}\right), \quad (124.2)$$

где

$$Q_{nl}(x) = \int_0^\infty \rho\, d\rho \int_1^\infty R_{nl}^2(\rho) e^{-2x\rho\zeta}\left(1 + \frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\, d\zeta.$$

[1]) По аналогичной причине вклад поляризации мюонного вакуума в сдвиг уровней обычного атома водорода будет, напротив, пренебрежимо малым.

Так, для нескольких первых уровней мезоводорода численный расчет дает следующие значения относительного сдвига:

$$\frac{\delta E_{10}}{|E_{10}|} = -6,4 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{\delta E_{20}}{|E_{20}|} = -2,8 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\delta E_{21}}{|E_{21}|} = -2,0 \cdot 10^{-5}.$$

§ 125. Релятивистское уравнение для связанных состояний

Метод, примененный в предыдущих параграфах к вычислению радиационного сдвига атомных уровней, неприменим для решения такой задачи, как определение поправок к уровням позитрония — системы из двух равноправных частиц, ни одна из которых не может рассматриваться по отношению к другой как источник внешнего поля.

Систематический метод решения этой задачи основан на том, что уровни энергии связанных состояний являются полюсами точной амплитуды взаимного рассеяния двух частиц (амплитуду нужно рассматривать как функцию суммарной энергии частиц в системе центра инерции). Действительно, позитроний в каждом из своих дискретных состояний можно рассматривать как «промежуточную частицу» определенной массы, через образование которой может идти процесс рассеяния электрона и позитрона; каждому же «одночастичному» промежуточному состоянию отвечает полюс амплитуды рассеяния (разумеется, эти полюсы лежат в нефизической области 4-импульсов рассеивающихся частиц).

Согласно (106.17) точная амплитуда рассеяния строится из точной «четыреххвостой» вершинной части $\Gamma_{ik,\, lm}$ и поляризационных амплитуд u частиц. Последние, очевидно, не имеют отношения к полюсным особенностям, и потому удобнее не рассматривать их вовсе, говоря вместо этого о полюсах самой вершинной части, т. е. функции

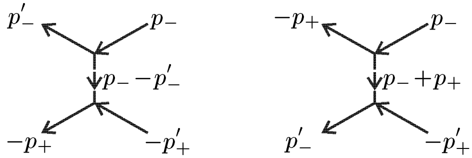
$$\Gamma_{ik,\, lm}(p'_-,\, -p_+;\, p_-,\, -p'_+), \tag{125.1}$$

где обозначения 4-импульсов внешних концов диаграммы (106.12) отвечают рассеянию позитрона на электроне.

Подчеркнем, что утверждение о наличии полюсов относится именно к точной амплитуде рассеяния или к точной вершинной части; в каждом же отдельном члене ряда теории возмущений полюс отсутствует. Последнее очевидно уже из того, что в фейнмановских диаграммах каждого приближения фигурируют лишь электронные (и фотонные) линии, но не линии «составной частицы» — позитрония как целого. Отсюда в свою очередь следует, что вычисление амплитуды рассеяния вблизи ее полюсов требует суммирования бесконечной последовательности диа-

грамм. Выясним, какие именно диаграммы входят в эту последовательность.

В первом неисчезающем (первом по α) приближении теории возмущении вершинной части (125.1) отвечают две диаграммы второго порядка:



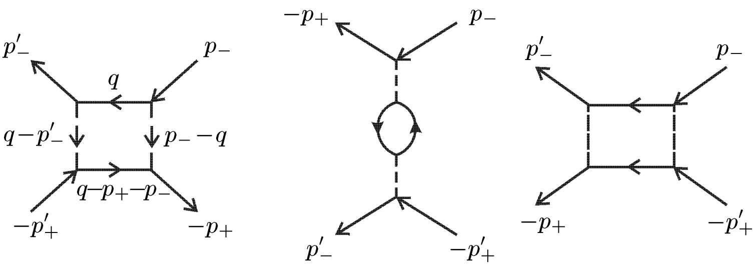
а *б*

(125.2)

или в аналитическом виде:

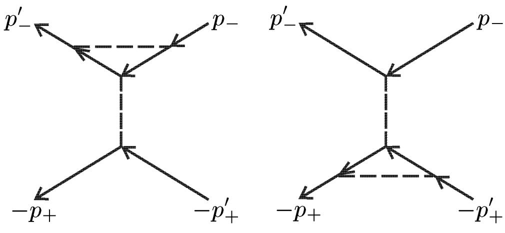
$$\Gamma_{ik,\, lm} = -e^2 \gamma^{\mu}_{il} \gamma^{\nu}_{km} D_{\mu\nu}(p_- - p'_-) + e^2 \gamma^{\mu}_{im} \gamma^{\nu}_{kl} D_{\mu\nu}(p_- + p_+). \tag{125.3}$$

В следующем (втором по α) приближении имеется уже 10 диаграмм четвертого порядка:



а *б* *в*

(125.4)



г *д*

и еще пять диаграмм, различающихся перестановкой $p_- \leftrightarrow -p'_+$. Все эти диаграммы имеют по сравнению с диаграммами (125.2) лишнюю степень $e^2 = \alpha$. Покажем, однако, что в диаграмме (125.4,*а*) эта лишняя степень малости компенсируется малым (при малых импульсах электрона и позитрона) знаменателем.

Будем рассматривать все величины в системе «центра инерции». Поскольку, однако, 4-импульсы внешних концов диаграмм не предполагаются физическими (т. е. $p^2 \neq m^2$), то хотя в этой системе $\mathbf{p}_+ = -\mathbf{p}_-$, но $\varepsilon_+ \neq \varepsilon_-$. Таким образом, 4-импульсы концов

$$\begin{gathered} p_- = (\varepsilon_-, \mathbf{p}), \quad p_+ = (\varepsilon_+, -\mathbf{p}), \\ p'_- = (\varepsilon'_-, \mathbf{p}'), \quad p'_+ = (\varepsilon'_+, -\mathbf{p}'), \\ \varepsilon_- + \varepsilon_+ = \varepsilon'_- + \varepsilon'_+. \end{gathered} \tag{125.5}$$

Энергия связи электрона и позитрона в позитронии $\sim m\alpha^2$. Поэтому в интересующей нас окрестности полюсов амплитуды рассеяния

$$\begin{gathered} |\mathbf{p}| \sim |\mathbf{p}'| \sim m\alpha \ll m, \\ |\varepsilon_- - m| \sim |\varepsilon_+ - m| \sim \mathbf{p}^2/m \sim m\alpha^2, \ldots \end{gathered} \tag{125.6}$$

Вклад в вершинную часть от диаграммы (125.4,*а*)

$$\Gamma^{(4a)}_{ik,lm} = -ie^4 \int (\gamma^\lambda G(q)\gamma^\mu)_{il}(\gamma^\nu G(q-p_- - p_+)\gamma^\rho)_{km} \times \\ \times D_{\lambda\rho}(q-p'_-)D_{\mu\nu}(p_- - q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \tag{125.7}$$

В интеграле (125.7) существенна область значений $q^\mu = (q_0, \mathbf{q})$, близких к полюсам одновременно обеих функций G. В этой области $|\mathbf{q}|$ и $|q_0 - m|$ малы и электронные пропагаторы

$$\begin{gathered} G(q) = \frac{\gamma^0 q_0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{q} + m}{(q_0+m)(q_0-m) - \mathbf{q}^2 + i0} \approx \frac{\gamma^0+1}{2}\left[q_0 - m - \frac{\mathbf{q}^2}{2m} + i0\right]^{-1}, \\ G(q-p_- - p_+) \approx \frac{\gamma^0-1}{2}\left[q_0 - \varepsilon_- - \varepsilon_+ + m + \frac{\mathbf{q}^2}{2m} - i0\right]^{-1}. \end{gathered} \tag{125.8}$$

Полюсы этих двух выражений лежат по разные стороны от вещественной оси в плоскости комплексной переменной q_0; замкнув путь интегрирования вдоль этой оси, скажем, в верхней полуплоскости, вычислим интеграл по q_0 по вычету относительно соответствующего полюса [1]. В результате найдем, что

$$\Gamma^{(4a)} \sim e^4 \int \frac{d^3q}{(q-p'_-)^2(p_- - q)^2\,(2m - \varepsilon_- - \varepsilon_+ + \mathbf{q}^2/m)}$$

[1]) Для диаграммы же (125.4,*в*), отличающейся от (125.4,*а*) лишь взаимным направлением электронных линий, оба полюса оказались бы лежащими по одну сторону от вещественной оси, так что после сделанных пренебрежений интеграл вообще обратился бы в нуль.

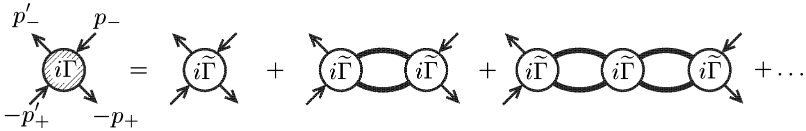
и отсюда, с учетом (125.6), оценку

$$\Gamma^{(4a)} \sim \alpha^2 \frac{(m\alpha)^3}{(m\alpha)^4 m\alpha^2} = \frac{1}{m^2\alpha}.$$

Такой же порядок величины имеет и вклад в Γ от диаграммы второго порядка (125.2,*а*) (первый член в (125.3)), чем и доказывается сделанное выше утверждение о порядке малости диаграммы (125.4,*а*). Аналогичная ситуация имеет место и во всех дальнейших приближениях теории возмущений.

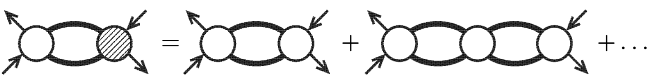
Таким образом, вычисление интересующей нас вершинной части вблизи ее полюсов требует суммирования бесконечной последовательности «аномально больших» диаграмм с промежуточными состояниями типа внутренних линий диаграммы (125.4,*а*). Для этих диаграмм характерно, что они могут быть рассечены между концами p_-, $-p_+$ и p'_-, $-p'_+$ на части, соединяющиеся друг с другом лишь двумя электронными линиями [1]). Совокупность же всех диаграмм, не удовлетворяющих этому условию, назовем «компактной» вершинной частью и обозначим через $\widetilde{\Gamma}_{ik,lm}$; поскольку аномально большие диаграммы в нее не входят, эти величины можно вычислять по обычной теории возмущений. Так, в первом приближении $\widetilde{\Gamma}$ определяется обеими диаграммами второго порядка (125.2), а во втором — восемью диаграммами четвертого порядка (все диаграммы, за исключением (125.4,*а, б*)).

Классифицируя некомпактные вершинные части по числу содержащихся в них «двойных связей», можно представить полную Γ в виде бесконечного ряда:



(125.9)

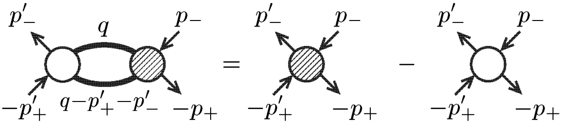
где все внутренние сплошные жирные линии — точные пропагаторы $\mathcal{G}$ (ряд такого вида часто называют *лестничным*). Чтобы просуммировать этот ряд, «умножим» его слева еще на одну $\widetilde{\Gamma}$ [2]) :



[1]) Такое определение включает в себя все аномально большие диаграммы, но наряду с ними также и некоторые «нормальные», например диаграмму (125.4,*б*).

[2]) Т. е. умножаем все члены ряда на $\widetilde{\Gamma}$ и две $\mathcal{G}$ и производим соответствующее интегрирование по 4-импульсам новых внутренних связей.

Сравнив теперь этот ряд с исходным рядом (125.9), мы увидим, что



(125.10)

Это графическое равенство эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$i\Gamma_{ik,\ lm}(p'_-,\ -p_+;\ p_-,\ -p'_+) = i\widetilde{\Gamma}_{ik,\ lm}(p'_-,\ -p_+;\ p_-,\ -p'_+) + \\ + \int \widetilde{\Gamma}_{ir,\ sm}(p'_-,\ q-p'_+-p'_-;\ q,\ -p'_+)\mathcal{G}_{st}(q)\mathcal{G}_{nr}(q-p'_+-p'_-) \times \\ \times \Gamma_{tk,\ ln}(q,\ -p_+;\ p_-,\ q-p'_+-p'_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \quad (125.11)$$

Функции $\widetilde{\Gamma}$ и $\mathcal{G}$ вычисляются по теории возмущений, после чего уравнение (125.11) дает, в принципе, возможность вычислить Γ с любой требуемой точностью.

Для определения же уровней энергии достаточно знать лишь положение полюсов функции Γ. Вблизи полюсов $\Gamma \gg \widetilde{\Gamma}$, так что первым членом правой стороны (125.11) (вторая диаграмма справа в (125.10)) можно пренебречь, и уравнение становится однородным относительно Γ. В этом уравнении переменные p_+, p_-, а также и индексы k, l становятся параметрами, зависимость от которых остается произвольной (не определяется самим уравнением). Опустив эти параметры (а вместе с ними и штрихи у остающихся переменных p'_+, p'_-), получим уравнение

$$i\Gamma_{i,m}(p_-;\ -p_+) = \int \widetilde{\Gamma}_{ir,\ sm}(p_-,\ q-p_+-p_-;\ q,\ -p_+)\mathcal{G}_{st}(q) \times \\ \times \mathcal{G}_{nr}(q-p_+-p_-)\Gamma_{t,\ n}(q;\ q-p_+-p_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \quad (125.12)$$

(*E. E. Salpeter, H. A. Bethe,* 1951).

Записанное в системе центра инерции ($\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- = 0$), уравнение (125.12) имеет решения лишь при определенных значениях $\varepsilon_+ + \varepsilon_-$, которые и дают уровни энергии позитрония. Функция $\Gamma_{i,\ m}$ играет при этом лишь вспомогательную роль. Вместо нее удобнее ввести другую функцию:

$$\chi_{sr}(p_1,\ p_2) = \mathcal{G}_{st}(p_1)\Gamma_{t,\ n}(p_1;\ p_2)\mathcal{G}_{nr}(p_2). \quad (125.13)$$

Тогда уравнение (125.12) примет вид

$$i\left[\mathcal{G}^{-1}(p_-)\chi(p_-,\,-p_+)\mathcal{G}^{-1}(-p_+)\right]_{im} = \\ = \int \widetilde{\Gamma}_{ir,\,sm}(p_-,\,q-p_+-p_-;\,q,\,-p_+)\chi_{sr}(q,\,q-p_+-p_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \tag{125.14}$$

в котором $\widetilde{\Gamma}$ выступает как ядро интегрального оператора. Как уже упоминалось, $\widetilde{\Gamma}$ может вычисляться по теории возмущений; то же самое относится, конечно, и к функции $\mathcal{G}^{-1}$.

Покажем, что в первом (по α) приближении теории возмущений (125.14) сводится, как и следовало ожидать, к нерелятивистскому уравнению Шредингера для позитрония.

В первом нерелятивистском приближении $\widetilde{\Gamma}$ определяется одной лишь диаграммой (125.2,*а*) (диаграмма аннигиляционного типа (125.2,*б*) обращается в этом приближении в нуль) [1]). Как и по аналогичному поводу в § 83, фотонный пропагатор удобно выбрать в кулоновой калибровке (76.12),(76.13), причем достаточно оставить в нем лишь компоненту D_{00}. Тогда

$$\widetilde{\Gamma}_{ir,\,sm}(p_-,\,q-p_+-p_-;\,q,\,-p_+) = -e^2\gamma^0_{is}\gamma^0_{rm}D_{00}(q-p_-) = \\ = -U(\mathbf{q}-\mathbf{p}_-)\gamma^0_{is}\gamma^0_{rm},$$

где

$$U(\mathbf{q}) = -4\pi e^2/\mathbf{q}^2$$

— компонента Фурье потенциальной энергии кулонова взаимодействия позитрона и электрона. Уравнение (125.14) принимает вид

$$i\chi_{im}(p_-,\,-p_+) = \\ = \left[G(p_-)\gamma^0\int U(\mathbf{q}-\mathbf{p}_-)\chi(q,\,q-p_+-p_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\cdot\gamma^0G(-p_+)\right]_{im}, \tag{125.15}$$

где также заменены точные пропагаторы $\mathcal{G}$ пропагаторами свободных электронов G. Для последних имеем приближенные выражения (ср. (125.8))

$$G(p_-) \approx \frac{1+\gamma^0}{2}g(p_-), \quad G(-p_+) \approx \frac{1-\gamma^0}{2}g(p_+),$$

где выделены матричные множители, а $g(p)$ — скалярная функция:

$$g(p) = [\varepsilon - m - \mathbf{p}^2/(2m) + i0]^{-1}. \tag{125.16}$$

[1]) Напомним, что скорости частиц в позитронии $v/c \sim \alpha$. В этом смысле разложения по α и по $1/c$ взаимно связаны.

При подстановке этих выражений в (125.15) замечаем, что все отличные от нуля матричные элементы

$$\left[\frac{1+\gamma^0}{2}\gamma^0\chi\gamma^0\frac{1-\gamma^0}{2}\right]_{im} = \left[\frac{\gamma^0+1}{2}\chi\frac{\gamma^0-1}{2}\right]_{im}$$

совпадают с элементами $-\chi_{im}$. Поэтому матричное уравнение (125.15) эквивалентно уравнению для скалярной функции

$$i\chi(p_-, -p_+) = \\ = -g(p_-)g(p_+)\int U(\mathbf{q}-\mathbf{p}_-)\chi(q, q-p_+-p_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \quad (125.17)$$

Введем теперь вместо p_+, p_- переменные

$$p \equiv (\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{p_- - p_+}{2}, \quad P = p_- + p_+$$

(4-импульсы относительного движения частиц и позитрония как целого). В системе центра инерции

$$P = (E + 2m, 0),$$

где полная энергия обозначена через $E + 2m$, т. е. E — уровень энергии, отсчитываемый от массы покоя. Выразив через эти переменные, перепишем (125.17) в виде

$$i\chi(p, P) = \\ = -g\left(p+\frac{P}{2}\right)g\left(-p+\frac{P}{2}\right)\int U(\mathbf{q}-\mathbf{p}_-)\chi\left(q-\frac{P}{2}, P\right)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} = \\ = -g\left(p+\frac{P}{2}\right)g\left(-p+\frac{P}{2}\right)\int U(\mathbf{q}'-\mathbf{p})\chi(q', P)\frac{d^4q'}{(2\pi)^4};$$

В это уравнение P входит уже только как параметр, а функция χ входит в правую часть равенства только в виде интеграла

$$\psi(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{\infty}\chi(q, P)dq_0.$$

Проинтегрировав обе стороны равенства по $d\varepsilon$, получим из него замкнутое уравнение для ψ:

$$\psi(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(p+\frac{P}{2}\right)g\left(-p+\frac{P}{2}\right)d\varepsilon\int U(\mathbf{q}-\mathbf{p})\psi(\mathbf{q})\frac{d^3q}{(2\pi)^3},$$

где

$$g(\pm p + \frac{P}{2}) = \left[\pm\varepsilon + \frac{E}{2} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i0\right]^{-1}.$$

Замкнув путь интегрирования по $d\varepsilon$, скажем, в верхней полуплоскости комплексного ε, вычислим интеграл по вычету в соответствующем полюсе и окончательно получим

$$\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - E\right)\psi(\mathbf{p}) + \int U(\mathbf{q}-\mathbf{p})\psi(\mathbf{q})\frac{d^3q}{(2\pi)^3} = 0. \tag{125.18}$$

Это и есть уравнение Шредингера для позитрония в импульсном представлении (см. III, (130.4)).

Если бы мы ограничились для $\widetilde{\Gamma}$ диаграммами (125.2), но учли бы в них (а также и в $\mathcal{G}$) следующие члены разложения по $1/c$, мы получили бы уравнение Брейта (см. § 83). Учет же диаграмм из (125.4) (вместе с дальнейшими членами разложения по $1/c$) дает радиационные поправки к уровням позитрония; однако вычисления становятся очень сложными.

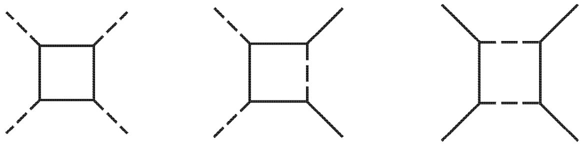
Приведем вычисленную с этими поправками разность основных уровней орто- и парапозитрония [1]:

$$E(^3S_1) - E(^1S_0) = \alpha^2\frac{me^4}{2\hbar^2}\left\{\frac{7}{6} - \left(\frac{16}{9} + \ln 2\right)\frac{\alpha}{\pi} - i\frac{\alpha}{2}\right\}. \tag{125.19}$$

Первый член в фигурных скобках — тонкое расщепление (см. задачу 2, § 84). Второй член — радиационная поправка к разности уровней. Мнимая же часть разности связана с вероятностью аннигиляции парапозитрония (см. (89.14)), т. е. с комплексностью уровня $^1S_0$; для парапозитрония ширина уровня оказывается того же порядка величины, что и радиационная поправка к его вещественной части.

§ 126. Двойное дисперсионное соотношение

Следующим по сложности за вершинной частью с тремя внешними линиями является блок с четырьмя концами. В квантовой электродинамике возможны три такие простейшие диаграммы:



(126.1)

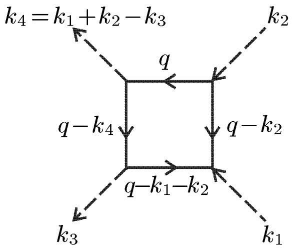
а *б* *в*

Первая из них описывает рассеяние фотона на фотоне. Остальные представляют собой отдельные члены радиационных поправок — к рассеянию фотона на электроне (диаграмма *б*) и к рассеянию электрона на электроне (диаграмма *в*).

[1]) *Karplus R., Klein A.*//Phys. Rev. — 1952. — V. 87. — P. 848.

Этот параграф посвящен изучению некоторых общих свойств диаграмм такого рода. Но для упрощения и конкретности мы будем вести изложение применительно к определенной диаграмме — (126.1,a).

Импульсы линий такой диаграммы обозначим следующим образом:



(126.2)

4-импульсы k_1, k_2, k_3, k_4 отвечают реальным фотонам, так что их квадраты равны нулю.

Отделив зависимость от поляризаций фотонов, амплитуду M_{fi}, соответствующую диаграмме (126.2), можно выразить через несколько скалярных функций 4-импульсов фотонов. Это — инвариантные амплитуды, о которых шла речь в § 70; конкретное выделение их для рассеяния фотона на фотоне будет произведено в следующем параграфе. Будучи скалярными, они зависят лишь от скалярных же переменных, в качестве которых можно выбрать, например, любые две из величин

$$s = (k_1 + k_2)^2,\ t = (k_1 - k_3)^2,\ u = (k_1 - k_4)^2,\ s + t + u = 0; \tag{126.3}$$

ниже мы выбираем в качестве независимых s и t.

Каждую из инвариантных амплитуд (которые мы обозначим здесь той же буквой M) можно представить интегралом вида

$$M = \int \frac{iB\,d^4q}{[q^2 - m^2][(q-k_4)^2 - m^2][(q-k_1-k_2)^2 - m^2][(q-k_2)^2 - m^2]},$$
$$m^2 \to m^2 - i0, \tag{126.4}$$

где B — некоторая функция всех 4-импульсов; множители в знаменателе происходят от пропагаторов четырех виртуальных электронов.

При достаточно малых s и t амплитуды M вещественны (точнее, могут быть сделаны таковыми надлежащим выбором фазового множителя). Действительно, малость s обеспечивает невозможность рождения фотонами реальных частиц (электрон-позитронной пары) в s-канале, а малость t — такую же невозможность в t-канале [1]). Другими словами, в обоих каналах отсут-

[1]) Изображенные на диаграмме (126.2) направления внешних линий отве-

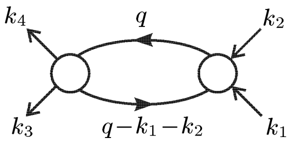
ствуют реальные промежуточные состояния, которые могли бы, согласно условию унитарности, привести к появлению мнимой части амплитуды.

Будем теперь увеличивать s при фиксированном (малом) значении t. При $s \geqslant 4m^2$ у амплитуды M появится мнимая часть, связанная с возможностью рождения пары двумя фотонами в s-канале. Поэтому для M можно написать дисперсионное соотношение «по переменной s»:

$$M(s,\, t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty} \frac{A_{1s}(s',\, t)}{s' - s - i0}\, ds', \tag{126.5}$$

где $A_{1s}(s,\, t)$ обозначает мнимую часть $M(s,\, t)$.

Как и для всякой диаграммы вида

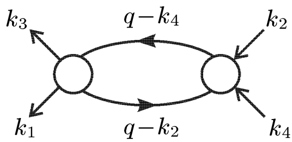


$A_{1s}(s,\, t)$ вычисляется по правилу (115.9) заменой в интеграле (126.4) соответствующих полюсных множителей δ-функциями:

$$2iA_{1s}(s,\, t) = (2\pi i)^2 \int \frac{iB\delta(q^2 - m^2)\delta[(q - k_1 - k_2)^2 - m^2]}{[(q - k_4)^2 - m^2][(q - k_2)^2 - m^2]}\, d^4q, \tag{126.6}$$

причем интегрирование производится по половине q-пространства, в которой $q^0 > 0$.

Мы можем сделать существенный дальнейший шаг, заметив, что интеграл (126.6) имеет структуру (в смысле своих полюсных множителей) того же типа, что и амплитуда реакции, изображающейся диаграммой вида



Поэтому и аналитические свойства $A_{1s}(s,\, t)$ как функции от t подобны аналитическим свойствам этой амплитуды. В частности, у функции $A_{1s}(s,\, t)$ может появиться (при увеличении t)

чают s-каналу. В t-канале входящими должны быть линии 1 и 3, так что 4-импульсами начальных фотонов были бы k_1 и $-k_3$. Физические области для рассеяния фотона на фотоне в переменных s, t, u — заштрихованные секторы на рис. 8 (с. 299). Так, s-каналу отвечает область, в которой $s > 0$, $t < 0$, $u < 0$.

мнимая часть только тогда, когда оба множителя в знаменателе будут одновременно обращаться в нуль. Это, однако, не произойдет сразу же после достижения значения $t = 4m^2$ — порога рождения пары в t-канале. Дело в том, что наличие δ-функций в подынтегральном выражении ограничивает область интегрирования в q-пространстве, которая может оказаться несовместимой со значением $t = 4m^2$. Протяженность области интегрирования зависит от значения s (аргументы δ-функций содержат k_1 и k_2). Поэтому зависит от s и граничное значение $t = t_c(s)$, за которым функция $A_{1s}(s,\, t)$ становится комплексной.

Подобно тому как функция $M(s,\, t)$ выражается через свою мнимую часть $A_{1s}(s,\, t)$ формулой (126.5), функция $A_{1s}(s,\, t)$ в свою очередь выражается через $A_2(s,\, t) = \operatorname{Im} A_{1s}(s,\, t)$ дисперсионным соотношением «по переменной t»:

$$A_{1s}(s,\, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{t_c s}^{\infty} \frac{A_2(s,\, t')}{t' - t - i0}\, dt'. \tag{126.7}$$

Подставив теперь (126.7) в (126.5), получим *двойное дисперсионное соотношение*, или *представление Мандельстама* для амплитуды $M(s,\, t)$:

$$M(s,\, t) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{4m^2}^{\infty} \int\limits_{t_c(s')}^{\infty} \frac{A_2(s',\, t')}{(s' - s - i0)(t' - t - i0)}\, dt' ds', \tag{126.8}$$

(*S. Mandelstam,* 1958).

Функцию $A_2(s,\, t)$ называют *двойной спектральной плотностью* функции $M(s,\, t)$. Ее можно получить из интеграла (126.6) повторным применением к нему правила замены (115.9). Обозначив для краткости

$$l_1 = q, \quad l_2 = q - k_4, \quad l_3 = q - k_2, \quad l_4 = q - k_1 - k_2, \tag{126.9}$$

получим

$$(2i)^2 A_2(s,\, t) = \\ = (2\pi i)^4 \int iB\delta(l_1^2 - m^2)\delta(l_2^2 - m^2)\delta(l_3^2 - m^2)\delta(l_4^2 - m^2)d^4q, \tag{126.10}$$

причем интегрирование производится по области $q^0 > 0$.

Следует, однако, иметь в виду, что формула (126.10) имеет лишь символический смысл. Дело в том, что область $s > 0$, $t > 0$ — нефизическая. Соответственно в этой области величины $l_1,\ l_2,\ \ldots$ при вещественных q оказываются, вообще говоря,

комплексными; понятие же δ-функции при комплексных значениях аргумента не является полностью определенным. Точнее было бы говорить прямо о взятии вычетов в соответствующих полюсах исходного интеграла (126.4). В нашем случае это, однако, не играет роли. Условие обращения в нуль четырех знаменателей в (126.4) или четырех аргументов δ-функций полностью определяет компоненты 4-вектора q. Переходя к интегрированию по l_1^2, l_2^2, ... (см. ниже) и формально оперируя с интегралом (126.10) по обычным правилам, мы найдем (с точностью до знака) выражение для A_2.

Для дальнейших вычислений выберем систему центра инерции (в s-канале). Тогда

$$k_1 = (\omega,\, \mathbf{k}),\; k_2 = (\omega,\, -\mathbf{k}),\; k_3 = (\omega,\, \mathbf{k}'),\; k_4 = (\omega,\, -\mathbf{k}'), \quad (126.11)$$

$$\begin{aligned} s = 4\omega^2,\; t = -(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 &= -4\omega^2 \sin^2(\theta/2), \\ u = -(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2 &= -4\omega^2 \cos^2(\theta/2), \end{aligned} \quad (126.12)$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ (угол рассеяния). Ось x пространственных декартовых координат направим по вектору $\mathbf{k}+\mathbf{k}'$, а ось y — по $\mathbf{k}-\mathbf{k}'$ [1]).

Преобразуем теперь интеграл (126.10), выбрав квадраты l_1^2, l_2^2, ... в качестве новых переменных интегрирования (вместо четырех компонент q). Имеем

$$\frac{\partial(l_1^2)}{\partial q^\mu} = 2l_{1\mu},\; \ldots\,,$$

поэтому якобиан преобразования

$$\frac{\partial(l_1^2,\, l_2^2,\, l_3^2,\, l_4^2)}{\partial(q^0,\, q_x,\, q_y,\, q_z)} = 16D,$$

где D — определитель, составленный из 16 компонент 4-векторов l_1, l_2, l_3, l_4. Интегрирование в (126.10) сводится просто к замене функций B и D в подынтегральном выражении их значениями при [2])

$$l_1^2 = l_2^2 = l_3^2 = l_4^2 = m^2. \quad (126.13)$$

Из условий $l_1^2 = l_4^2 = m^2$ получаем, как и в § 115,

$$q^0 = \omega, \quad \mathbf{q}^2 = \omega^2 - m^2. \quad (126.14)$$

[1]) При $t > 0$: $(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 < 0$, т. е. вектор $\mathbf{k}-\mathbf{k}'$ мнимый. Это затруднение, однако, легко обойти, раскрыв все векторные выражения при $t < 0$ и произведя затем аналитическое продолжение к $t > 0$.

[2]) Такой способ интегрирования автоматически учитывает лишь по одному из нулей аргументов δ-функций.

Остальные два условия дают

$$(q-k_4)^2 - m^2 = -2qk_4 = -2\omega^2 - 2\mathbf{qk}' = 0,$$
$$(q-k_2)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2\mathbf{qk} = 0,$$

так что

$$\mathbf{qk} = \mathbf{qk}' = -s/4,$$

или в компонентах:

$$q^0 = \omega, \quad q_x = -\frac{s}{2(s+t)}, \quad q_y = 0,$$
$$q_z = \pm\sqrt{\omega^2 - m^2 - q_x^2} = \pm\left[\frac{st - 4m^2(s+t)}{4(s+t)}\right]^{1/2}. \tag{126.15}$$

Таким образом, интеграл (126.10) равен

$$A_2(s,\,t) = \frac{\pi^4}{4D}\sum(-iB), \tag{126.16}$$

где суммирование производится по двум значениям $\mathbf{q}$ из (126.15).

Определитель D можно записать с помощью единичного антисимметричного тензора:

$$D = e_{\mu\nu\rho\sigma} l_1^\mu l_2^\nu l_3^\rho l_4^\sigma = -e_{\mu\nu\rho\sigma} q^\mu k_4^\nu k_2^\rho k_1^\sigma =$$
$$- e_{\mu\nu\rho\sigma}(q-k_1)^\mu (k_4-k_1)^\nu (k_2-k_1)^\rho k_1^\sigma$$

(при преобразованиях использована антисимметрия $e_{\mu\nu\rho\sigma}$). Заметив, что из четырех множителей временную компоненту имеет только k_1, находим

$$D = -\omega\mathbf{q}[(\mathbf{k}+\mathbf{k}')(\mathbf{k}-\mathbf{k}')].$$

Раскрыв это выражение при $t<0$ и затем продолжив к $t>0$, получим

$$D = -\omega q_z\sqrt{s+t}\sqrt{-t} \to \pm\frac{i}{4}\{st[st-4m^2(s+t)]\}^{1/2}. \tag{126.17}$$

Выбор знака в этом выражении можно произвести на основании следующих соображений. Положим для простоты $B=1$. Тогда видно, что в физической области ($s>0$, $t<0$) имеем $A_{1s}(s,\,t)<0$. Действительно, оба знаменателя в подынтегральном выражении в (126.6) имеют одинаковый (отрицательный) знак:

$$(q-k_4)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2\mathbf{qk}' < -2\omega(\omega - |\mathbf{q}|) < 0,$$
$$(q-k_2)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2\mathbf{qk} < -2\omega(\omega - |\mathbf{q}|) < 0$$

(здесь использовано, что, в силу наличия двух δ-функций в числителе, имеет место (126.14) и потому $|\mathbf{q}|<\omega$) [1]). Из (126.7)

[1]) Разумеется, это не случайно. Отрицательность A_{1s} в действительности следует из условия унитарности, что особенно ясно при $t=0$, когда A_{1s} определяет полное сечение.

видно тогда, что отрицательна должна быть и функция $A_2(s,\,t)$ при $s>0$, $t>0$ (если учесть, что, согласно (126.16), эта функция знакопостоянна). Это значит, что в (126.17) надо выбрать верхний знак, так что окончательно

$$A_2 = -\pi^2 \frac{\sum B}{\{st[st-4m^2(s+t)]\}^{1/2}}. \tag{126.18}$$

Так как по своему смыслу функция $A_2(s,\,t)$ должна быть вещественна, то кроме положительности s и t имеется еще условие положительности выражения в квадратных скобках в знаменателе:

$$st-4m^2(s+t) \geqslant 0, \quad s>0,\, t>0. \tag{126.19}$$

Эти неравенства определяют область, по которой должно производиться интегрирование в двойном дисперсионном интеграле (126.8) (заштрихована на рис. 23). Ее границей является кривая

$$st-4m^2(s+t)=0$$

с асимптотами $s=4m^2$ и $t=4m^2$.

Дисперсионные соотношения в форме (126.5) и (126.8) еще не учитывают условий перенормировки, и при буквальном их применении интегралы оказались бы расходящимися и требовали бы регуляризации. Условие перенормировки для амплитуд $M(s,\,t)$ заключается в требовании

$$M(0,0)=0. \tag{126.20}$$

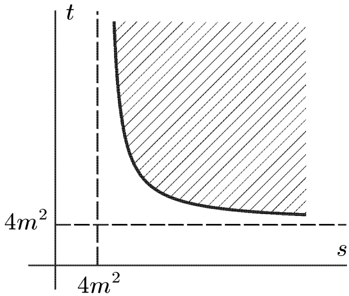


Рис. 23

Действительно, амплитуда рассеяния фотона на фотоне должна обращаться в нуль, когда $k_1=k_2=k_3=$ $=k_4=0$ (а потому и $s=t=0$), поскольку $k=0$ означает постоянный во времени и пространстве потенциал, которому не отвечает никакое физическое поле (мы еще обсудим это условие более детально в следующем параграфе).

Для автоматического учета этого условия надо написать дисперсионное соотношение «с вычитанием» (подобно переходу от (111.8) к (111.13)). Мы придем к такому соотношению естественным образом, произведя сначала тождественное преобразование соотношения (126.8) с помощью тождества

$$\frac{1}{(s'-s)(t'-t)} = \frac{st}{(s'-s)(t'-t)s't'} + \frac{s}{(s'-s)s't'} + \frac{t}{(t'-t)s't'} + \frac{1}{s't'}.$$

Подставив его в подынтегральное выражение в (126.8), получим

$$M(s,\,t) = \frac{st}{\pi^2}\iint \frac{A_2(s',\,t')\,ds'\,dt'}{(s'-s)(t'-t)s't'} + \frac{s}{\pi}\int \frac{f(s')\,ds'}{(s'-s)s'} + \\ + \frac{t}{\pi}\int \frac{g(t')\,dt'}{(t'-t)t'} + C,$$

где

$$f(s) = \frac{1}{\pi}\int \frac{A_2(s,\,t')}{t'}dt', \qquad g(t) = \frac{1}{\pi}\int \frac{A_2(s',\,t)}{s'}ds',$$

$$C = \frac{1}{\pi^2}\iint \frac{A_2(s',\,t')}{s't'}ds'dt'.$$

Последние равенства, однако, имели бы смысл лишь при условии сходимости всех интегралов. В противном же случае функциям $f(s)$, $g(t)$ и постоянной C должны быть предписаны заранее заданные значения, соответствующие условию перенормировки. Именно надо положить

$$C = 0, \quad f(s) = A_{1s}(s,\,0), \quad g(t) = A_{1t}(0,\,t),$$

где A_{1t} — мнимая часть $M(s,t)$, появляющаяся при увеличении t при заданном малом s, подобно тому как A_{1s} — мнимая часть, появляющаяся при увеличении s при заданном малом t. Первое из этих равенств очевидно: $C = M(0,0) = 0$. Второе (и аналогичным образом третье) следует из сравнения равенства

$$M(s,\,0) = \frac{s}{\pi}\int \frac{f(s')\,ds'}{(s'-s)s'}$$

с однократным дисперсионным соотношением (126.5), написанным «с вычитанием», отвечающим условию (126.20):

$$M(s,\,t) = \frac{s}{\pi}\int \frac{A_{1s}(s',\,t)}{(s'-s)s'}\,ds'. \tag{126.21}$$

Таким образом, окончательное двойное дисперсионное соотношение «с вычитанием»:

$$M(s,\,t) = \frac{st}{\pi^2}\iint \frac{A_2(s',\,t')}{(s'-s)(t'-t)s't'}\,ds'dt' + \\ + \frac{s}{\pi}\int \frac{A_{1s}(s',\,0)}{(s'-s)s'}\,ds' + \frac{t}{\pi}\int \frac{A_{1t}(0,\,t')}{(t'-t)t'}\,dt'. \tag{126.22}$$

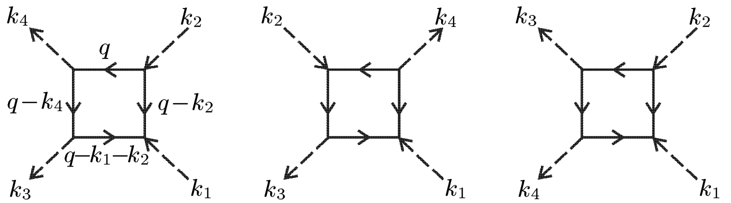
Если значения s, t сами лежат в области интегрирования, то интегралы (126.21),(126.22), как всегда, надо понимать как предел при

$$s \to s + i0, \quad t \to t + i0. \tag{126.23}$$

§ 127. Рассеяние фотона на фотоне

Рассеяние света на свете (в вакууме) является специфически квантовоэлектродинамическим процессом; в классической электродинамике оно отсутствует из-за линейности уравнений Максвелла [1]).

В квантовой электродинамике рассеяние фотона на фотоне описывается как результат рождения двумя начальными фотонами виртуальной электрон-позитронной пары и последующей аннигиляции этой пары в конечные кванты. Амплитуда этого процесса (в первом неисчезающем приближении) изображается шестью «квадратными» диаграммами со всеми возможными относительными расположениями их четырех концов. Сюда относятся диаграммы



а *б* *в* (127.1)

и еще три диаграммы, отличающиеся от этих лишь изменением направления обхода внутренней электронной петли. Вклад этих последних совпадает с вкладом диаграмм (127.1), и потому полная амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = 2(M^{(а)} + M^{(б)} + M^{(в)}), \tag{127.2}$$

где $M^{(а)}$, $M^{(б)}$, $M^{(в)}$ — вклады диаграмм *а*, *б*, *в*.

Согласно (64.19) сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}|M_{fi}|^2\frac{do'}{(2\omega)^2}, \tag{127.3}$$

где do' — элемент телесных углов для направления $\mathbf{k}'$ в системе центра инерции. Угол рассеяния в этой системе обозначим через θ.

Инвариантные амплитуды. Выделив поляризационные множители четырех фотонов, представим M_{fi} в виде

$$M_{fi} = e_1^{\lambda} e_2^{\mu} e_3^{\nu^*} e_4^{\rho^*} M_{\lambda\mu\nu\rho}; \tag{127.4}$$

---

[1]) В предельном случае малых частот этот процесс был впервые рассмотрен *Эйлером* (*H. Euler,* 1936), а в ультрарелятивистском случае — *А. И. Ахиезером* (1937). Полное решение задачи дано *Карплусом* и *Нейманом* (*R. Karplus, M. Neumann,* 1951).

4-тензор $M_{\lambda\mu\nu\rho}$ (его называют *тензором рассеяния фотона на фотоне*) — функция 4-импульсов всех фотонов. Если написать аргументы функций со знаками, отвечающими одинаковым направлениям внешних концов диаграммы, то в силу симметрии совокупности диаграмм (127.1) очевидно, что тензор

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1,\, k_2,\, -k_3,\, -k_4)$$

будет симметричен по отношению к любым перестановкам четырех аргументов вместе с одновременной такой же перестановкой его четырех индексов. В силу калибровочной инвариантности амплитуда (127.4) не должна меняться при замене $e \to e + \mathrm{const}\cdot k$. Другими словами, должно быть

$$k_1^{\lambda} M_{\lambda\mu\rho\sigma} = k_2^{\mu} M_{\lambda\mu\rho\sigma} = \ldots = 0. \tag{127.5}$$

Как легко сообразить, отсюда следует, в частности, что разложение тензора рассеяния по степеням 4-импульсов k_1, k_2, ... должно начинаться с членов, содержащих четверные произведения их компонент. Тем самым во всяком случае

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(0,\, 0,\, 0,\, 0) = 0. \tag{127.6}$$

Для конкретного выделения инвариантных амплитуд целесообразно, однако, с самого начала выбрать определенную калибровку 4-векторов поляризации e — калибровку, в которой

$$e_1^{\mu} = (0,\, \mathbf{e}_1), \quad e_2^{\mu} = (0,\, \mathbf{e}_2),\, \ldots \tag{127.7}$$

Тогда

$$M_{fi} = M_{iklm} e_{1i} e_{2k} e_{3l}^{*} e_{4m}^{*}, \tag{127.8}$$

где M_{iklm} — трехмерный тензор.

В качестве двух независимых поляризаций выберем для каждого из фотонов круговые поляризации с противоположными направлениями вращения, т. е. два спиральных состояния со спиральностями $\lambda = \pm 1$. После этого тензор M_{iklm} можно представить в виде

$$M_{iklm} = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} e_{1i}^{(\lambda_1)*} e_{2k}^{(\lambda_2)*} e_{3l}^{(\lambda_3)} e_{4m}^{(\lambda_4)}; \tag{127.9}$$

16 величин $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ являются функциями от s, t, u и играют роль инвариантных амплитуд; не все они, однако, независимы.

Величины $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ — трехмерные скаляры. Пространственная инверсия меняет знак спиральностей; инвариантные же переменные s, t, u остаются неизменными. Поэтому требование

P-инвариантности приводит к соотношениям

$$M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(s,\, t,\, u) = M_{-\lambda_1\, -\lambda_2\, -\lambda_3\, -\lambda_4}(s,\, t,\, u). \tag{127.10}$$

Обращение времени переставляет начальные и конечные фотоны, не меняя их спиральностей; переменные s, t, u снова остаются неизменными. Поэтому требование T-инвариантности приводит к равенству

$$M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(s,\, t,\, u) = M_{\lambda_3\lambda_4\lambda_1\lambda_2}(s,\, t,\, u). \tag{127.11}$$

Наконец, еще одно соотношение является следствием инвариантности амплитуды M_{fi} относительно перестановки двух начальных или двух конечных фотонов. Если произвести сразу обе перестановки ($k_1 \leftrightarrow k_2$, $k_3 \leftrightarrow k_4$), то переменные s, t, u не изменятся, а перестановка в поляризационных индексах приведет к соотношению

$$M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(s,\, t,\, u) = M_{\lambda_2\lambda_1\lambda_4\lambda_3}(s,\, t,\, u). \tag{127.12}$$

Легко убедиться, что в силу свойств симметрии (127.10)–(127.12) число независимых инвариантных амплитуд сводится к пяти; в качестве них можно, например, выбрать

$$M_{++++}, \quad M_{++--}, \quad M_{+-+-}, \quad M_{+--+}, \quad M_{+++-}$$

(индексы «+», «−» означают спиральности +1 и −1).

Если подставить в (127.3) вместо M_{fi} одну из амплитуд $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$, то мы получим сечение рассеяния с заданными поляризациями начальных и конечных фотонов. Сечение же, просуммированное по конечным и усредненное по начальным поляризациям, получится заменой

$$|M_{fi}|^2 \to {}^1\!/_4\{2|M_{++++}|^2 + 2|M_{++--}|^2 + 2|M_{+-+-}|^2 + \\ + 2|M_{+--+}|^2 + 8|M_{+++-}|^2\}. \tag{127.13}$$

Соотношения симметрии (127.10)–(127.12) связывают между собой различные инвариантные амплитуды как функции одних и тех же переменных. Дальнейшие функциональные соотношения возникают как следствие перекрестной симметрии (см. § 78), если учесть, что амплитуда M_{fi} во всех каналах описывает одну и ту же реакцию (взаимное рассеяние двух фотонов) и потому не должна меняться при переходе от одного канала к другому.

Переход от s-канала (которому отвечает направление стрелок на диаграммах (127.1)) к t-каналу осуществляется перестановкой 4-импульсов k_2 и $-k_3$ (т. е. заменой переменных $s \leftrightarrow t$) и перестановкой индексов спиральностей $\lambda_2 \leftrightarrow -\lambda_3$. Аналогичным

образом, переход от s- к u-каналу осуществляется перестановкой k_2 и $-k_4$ (причем $s \leftrightarrow u$) и заменой $\lambda_2 \leftrightarrow -\lambda_4$. Это приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} M_{+-+-}(s,\, t,\, u) &= M_{++++}(u,\, t,\, s), \\ M_{+--+}(s,\, t,\, u) &= M_{++++}(t,\, s,\, u), \\ M_{++++}(s,\, t,\, u) &= M_{++++}(s,\, u,\, t), \end{aligned} \tag{127.14}$$

$M_{++--}(s,\ t,\ u)$ и M_{+++-} полностью симметричны по переменным $s,\ t,\ u$ [1]). Поэтому достаточно вычислить лишь 3 из 16 амплитуд, например,

$$M_{++++}, \quad M_{++--}, \quad M_{+++-}.$$

Соотношения (127.10)–(127.12), (127.14) относятся к полным амплитудам — суммам вкладов всех трех диаграмм (127.1). Но сами эти вклады связаны между собой соотношениями, очевидными из сравнения диаграмм. Так, диаграмма *б* получается из диаграммы *а* заменой $k_2 \leftrightarrow -k_4$, $e_2 \leftrightarrow e_4^*$, и потому их вклады в инвариантные амплитуды получаются друг из друга заменой переменных $s \leftrightarrow u$ и индексов $\lambda_2 \leftrightarrow -\lambda_4$; аналогично вклад диаграммы *в* получится из *а* заменой $t \leftrightarrow u$, $\lambda_3 \leftrightarrow -\lambda_4$.

Вычисление амплитуд. Интеграл $M_{fi}^{(a)}$, отвечающий диаграмме (127.1,*а*), имеет вид (126.4), причем

$$\begin{aligned} B^{(a)} = \frac{e^4}{\pi^2}\,\mathrm{Sp}\{(\gamma e_1)(\gamma q - \gamma k_2 + m)(\gamma e_2)(\gamma q + m) \times \\ \times (\gamma e_4^*)(\gamma q - \gamma k_4 + m)(\gamma e_3^*)(\gamma q - \gamma k_1 - \gamma k_2 + m)\}. \end{aligned} \tag{127.15}$$

Интегралы (126.4) логарифмически расходятся. В соответствии с условием (127.6) их регуляризация осуществляется вычитанием значения при $k_1 = k_2 = \ \ldots\ = 0$ [2]). Вычисление регуляризованных интегралов, однако, чрезвычайно громоздко.

Наиболее естественный путь для вычисления амплитуд рассеяния фотона на фотоне основан на использовании двойного

[1]) Здесь учтена также симметрия по отношению к паре конечных фотонов. Поскольку три переменные $s,\ t,\ u$ не независимы, достаточно было бы писать два аргумента (например, два первых); мы сохраняем все три лишь с целью более ясного выявления симметрии их перестановок.

[2]) Отметим, что при суммировании вкладов всех диаграмм расходящиеся части интегралов сокращаются. В этом легко убедиться, заметив, что асимптотический (при $q \to \infty$) вид интеграла есть

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}^{(a)} \propto \int \mathrm{Sp}\{\gamma_\lambda(\gamma q)\gamma_\mu(\gamma q)\gamma_\rho(\gamma q)\gamma_\nu(\gamma q)\}\,\frac{d^4q}{(q^2)^4}.$$

После усреднения по направлениям q (ср. (131.10)) след легко вычисляется

дисперсионного соотношения (*B. De Tollis*, 1964). Этот метод наиболее полно учитывает симметрию диаграмм и почти полностью исключает трудности интегрирования.

Функция $A_{1s}^{(a)}(s,\ t)$ (и аналогично $A_{1t}^{(a)}$) для каждого заданного набора спиральностей $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4$ вычисляется согласно (126.6). Ввиду наличия под интегралом двух δ-функций нам нужно знать значение $B^{(a)}$ лишь при

$$l_1^2 \equiv q^2 = m^2, \quad l_4^2 \equiv (q - k_1 - k_2)^2 = m^2; \tag{127.16}$$

эти равенства можно учитывать уже при вычислении следа (127.15). Но для дальнейшей подстановки в (126.22) нам фактически требуется значение $A_{1s}^{(a)}$ лишь при $t = 0$. (Это равенство означает, что $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ и $k_2 = k_4$.) Тогда интеграл (126.6) принимает вид

$$A_{1s}^{(a)}(s,\ 0) = -\frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{s - 4m^2}{s}} \int \frac{B^{(a)} do_{\mathbf{q}}}{[(q - k_2)^2 - m^2]^2} \tag{127.17}$$

(ср. вывод (115.10)). Введя угол ϑ между $\mathbf{q}$ и $\mathbf{k}$, получим

$$(q - k_2)^2 - m^2 = -2\omega(1 - |\mathbf{q}|\cos\vartheta) = -\sqrt{s}\left[1 - \frac{1}{2}\sqrt{s - 4m^2}\cos\vartheta\right].$$

Интегралы (127.17) фактически выражаются через элементарные функции. Вычисление же функции $A_2^{(a)}(s,\ t)$ согласно ее определению (126.18) вообще не требует интегрирования, при этом выражение для $B^{(a)}$ должно быть взято для значений q из (126.15), удовлетворяющих, помимо (127.16), также и условиям $(q - k_2)^2 = m^2$, $(q - k_4)^2 = m^2$.

После вычисления функций A_{1s}, A_{1t}, A_2 дисперсионное соотношение (126.22) дает амплитуду непосредственно в виде одно- и двукратных определенных интегралов.

Приведем здесь окончательный результат для трех инвариантных амплитуд, достаточных,согласно сказанному выше, для

и дает

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}^{(a)} \propto (g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho} + g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - 2g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}) \int \frac{d^4q}{(q^2)^2}.$$

Суммирование по диаграммам означает симметризацию этого выражения по индексам λ, μ, ν, ρ, в результате чего оно обращается в нуль. Подчеркнем, однако, что это сокращение имеет в известном смысле случайный характер и не устраняет необходимости регуляризации, хотя она и сводится при этом к вычитанию конечной величины.

определения также и всех остальных амплитуд [1]):

$$\frac{1}{8\alpha^2}M_{++++} = -1 - \left(2+\frac{4t}{s}\right)B(t) - \left(2+\frac{4u}{s}\right)B(u) - \\ - \left[\frac{2(t^2+u^2)}{s^2} - \frac{8}{s}\right][T(t)+T(u)] + \frac{4}{t}\left(1-\frac{2}{s}\right)I(s,\,t) + \\ + \frac{4}{u}\left(1-\frac{2}{s}\right)I(s,\,u) + \left[\frac{2(t^2+u^2)}{s^2} - \frac{16}{s} - \frac{4}{t} - \frac{4}{u} - \frac{8}{tu}\right]I(t,\,u), \tag{127.18}$$

$$\frac{1}{8\alpha^2}M_{+++-} = 1 + \left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)[T(s)+T(t)+T(u)] - \\ - 4\left(\frac{1}{u}+\frac{2}{st}\right)I(s,\,t) - 4\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{su}\right)I(s,\,u) - 4\left(\frac{1}{s}+\frac{2}{tu}\right)I(t,\,u),$$

$$\frac{1}{8\alpha^2}M_{++--} = 1 - \frac{8}{st}I(s,\,t) - \frac{8}{su}I(s,\,u) - \frac{8}{tu}I(t,\,u).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$B(s) = \sqrt{1-\frac{4}{s}}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\sqrt{-s}}{2} - 1, \quad s<0,$$

$$T(s) = \left(\mathrm{Arsh}\,\frac{\sqrt{-s}}{2}\right)^2, \quad s<0, \tag{127.19}$$

$$I(s,\,t) = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{dy}{y(1-y) - \dfrac{s+t}{st}}\{\ln[1-i0-sy(1-y)] + \\ + \ln[1-i0-ty(1-y)]\},$$

выражения же в областях $0<s<4$ и $s>4$ получаются из (127.19) путем аналитического продолжения по правилу $s\to s+ + i0$, т. е. через верхнюю полуплоскость этих переменных. (Для упрощения записи в формулах (127.18),(127.19), и только в них, буквы s и t обозначают отношения s/m^2, t/m^2.)

Сечение рассеяния Предельному случаю малых частот ($\omega \ll m$) отвечают малые значения переменных s, t, u. Первые члены разложения инвариантных амплитуд по этим переменным:

$$M_{++++} \approx \frac{11e^4}{45m^4}s^2, \quad M_{+--+} \approx \frac{11e^4}{45m^4}t^2, \quad M_{+-+-} \approx \frac{11e^4}{45m^4}u^2, \\ M_{++--} \approx -\frac{e^4}{15m^4}(s^2+t^2+u^2), \quad M_{+++-} \approx 0. \tag{127.20}$$

[1]) Некоторые детали преобразований интегралов, различные представления трансцендентных функций B, T, I и их предельные выражения — см. *De Tollis B.*//Nuovo Cimento. — 1964. — V. 32. — P. 757; 1965. — V. 35. — P. 1182; *Costantini V., De Tollis B., Pistoni G.*//Nuovo Cimento. — 1971. — . V. 2A. — P. 733.

Подставив эти выражения в формулу (127.3), получим сечения рассеяния поляризованных фотонов. Дифференциальное же сечение рассеяния неполяризованных фотонов вычисляется согласно (127.13) и равно (в обычных единицах)

$$d\sigma = \frac{139}{4\pi^2(90)^2}\alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^6 (3+\cos^2\theta)do', \tag{127.21}$$

а полное сечение [1])

$$\sigma = \frac{973}{10125\pi}\alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^6 = 0,031\alpha^2 r_e^2 \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^6, \quad \hbar\omega \ll mc^2. \tag{127.22}$$

В обратном, ультрарелятивистском случае полное сечение рассеяния неполяризованных фотонов [2])

$$\sigma = 4,7\alpha^4 \left(\frac{c}{\omega}\right)^2, \qquad \hbar\omega \gg mc^2. \tag{127.23}$$

Наконец, укажем дифференциальное сечение рассеяния на малые углы в ультрарелятивистском случае:

$$d\sigma = \frac{\alpha^4 c^2}{\pi^2\omega^2}\ln^4\frac{1}{\theta}do, \qquad \frac{mc^2}{\hbar\omega} \ll \theta \ll 1. \tag{127.24}$$

Это выражение справедливо с логарифмической точностью — следующий член разложения содержит на единицу меньшую степень большого логарифма. Для перехода к пределу $\theta = 0$ (рассеяние вперед) формула (127.24) непригодна. Вместо нее имеем здесь

$$d\sigma = \frac{\alpha^4 c^2}{\pi^2\omega^2}\ln^4\frac{\hbar\omega}{mc^2}do, \qquad \theta \ll \frac{mc^2}{\hbar\omega}. \tag{127.25}$$

Выражение (127.25) легко получить с помощью общих формул (127.18), положив в них $t = 0$ и заметив, что при $s \gg 1$ наиболее высокую (вторую) степень большого логарифма содержит лишь функция

$$T\left(\frac{s}{m^2}\right) \approx \frac{1}{4}\ln^2\frac{s}{m^2} \approx \ln^2\frac{\omega}{m}.$$

С этой точностью отличны от нуля лишь амплитуды

$$M_{++++} = M_{----} = M_{+-+-} = -16e^4\ln^2(\omega/m).$$

Мы видим, в частности, что в этом случае поляризация фотона при рассеянии не меняется.

[1]) При переходе от $d\sigma$ к σ надо ввести множитель $1/2$, учитывающий тождественность двух конечных фотонов.

[2]) К происхождению этой зависимости σ от ω мы еще вернемся в конце § 134.

На рис. 24 изображен график зависимости полного сечения рассеяния от частоты (в логарифмической, по обеим осям, шкале). Сечение убывает в сторону как малых, так и больших частот и достигает максимума при $\hbar\omega \approx 1,5mc^2$. Излом кривой при $\hbar\omega = mc^2$ отражает изменение характера процесса в связи с появлением возможности образования реальной электронной пары.

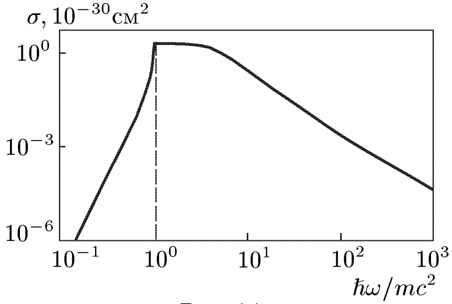


Рис. 24

Случай малых частот. В случае малых частот ($\omega \ll \ll m$) амплитуду рассеяния фотона на фотоне можно получить также и совсем иным способом, исходя из поправочных членов в функции Лагранжа слабого электромагнитного поля (см. ниже, § 129).

Малая поправка к гамильтониану взаимодействия $\widehat{V}'$ отличается лишь знаком от малой поправки к лагранжиану. Согласно (129.21) имеем

$$\widehat{V}' = -\frac{e^4}{45 \cdot 8\pi^2 m^4} \int \{(\widehat{\mathbf{E}}^2 - \widehat{\mathbf{H}}^2)^2 + 7(\widehat{\mathbf{E}}\widehat{\mathbf{H}})^2\}\, d^3x. \tag{127.26}$$

Поскольку этот оператор — четвертого порядка по полю, он имеет матричные элементы для интересующего нас перехода уже в первом приближении.

Для вычисления надо подставить в (127.26)

$$\widehat{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \widehat{\mathbf{A}}}{\partial t}, \qquad \widehat{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \widehat{\mathbf{A}},$$
$$\widehat{\mathbf{A}} = \sqrt{4\pi} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\widehat{c}_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{-ikx} + \widehat{c}^{+}{}_{\mathbf{k}\lambda} \mathbf{e}^{*}_{\mathbf{k}\lambda} e^{ikx}\right) \tag{127.27}$$

(λ — номер поляризации), после чего элемент S-матрицы вычисляется как

$$S_{fi} = -i\langle f| \int V' dt |\, i\,\rangle = -i\langle 0| c_{\mathbf{k}_3\lambda_3} c_{\mathbf{k}_4\lambda_4} \int V' dt\, c^{+}_{\mathbf{k}_1\lambda_1} c^{+}_{\mathbf{k}_2\lambda_2} |0\rangle \tag{127.28}$$

(ср. § 72, 77). При нормировке $\widehat{\mathbf{A}}$, как в (127.27), амплитуда рассеяния M_{fi} непосредственно определяется по S_{fi} согласно

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) M_{fi} \tag{127.29}$$

(ср. § 64). Среднее значение в (127.28) вычисляется по теореме Вика с помощью (77.3), причем свертывать надо, разумеется, только «внешние» операторы $\widehat{c}_{\mathbf{k}\lambda}$, $\widehat{c}^{+}_{\mathbf{k}\lambda}$ с внутренними $\widehat{\mathbf{A}}$.

§ 128. Когерентное рассеяние фотона в поле ядра

Другими (наряду с рассеянием фотона на фотоне) нелинейными эффектами, описывающимися квадратными диаграммами вида (127.1), являются распад одного фотона во внешнем поле на два фотона (и обратный процесс «слияния» двух фотонов в один) и рассеяние фотона во внешнем поле. Первому процессу отвечают диаграммы, в которых один из четырех внешних фотонных концов заменен линией внешнего поля. Второму же процессу отвечают диаграммы с двумя внешними линиями реальных и двумя — виртуальных фотонов.

К последней категории относится, в частности, когерентное (упругое) рассеяние фотона в постоянном электрическом поле неподвижного ядра. В общем случае вычисления приводят к очень громоздким формулам (содержащим кратные квадратуры) [1]. Мы ограничимся здесь лишь некоторыми оценками.

В силу требований калибровочной инвариантности амплитуда рассеяния при $\omega \to 0$ должна содержать произведения компонент 4-импульса начального (k) и конечного (k') фотонов (подобно тому как разложение амплитуды рассеяния фотона на фотоне начинается с четверных произведений компонент 4-импульсов всех фотонов). Другими словами, амплитуда рассеяния фотона малой частоты пропорциональна ω^2. Учитывая также, что эта амплитуда содержит внешнее поле (поле ядра с зарядом Ze) во втором порядке, заключаем, что сечение рассеяния

$$d\sigma \approx Z^4\alpha^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 do, \quad \omega \ll m. \tag{128.1}$$

Зависимость от частоты находится, разумеется, в соответствии с общими заключениями § 59.

Коэффициент в (128.1) нельзя вычислить с помощью функции Лагранжа однородного электромагнитного поля (как это можно было сделать для рассеяния света на свете). Причина заключается в том, что в данном процессе существенны расстояния от ядра $r \sim l/m$, на которых поле ядра нельзя рассматривать как однородное.

Приведем результат точного расчета:

$$\begin{aligned} d\sigma_{++} = d\sigma_{--} &= 1{,}004 \cdot 10^{-3} (Z\alpha)^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 \cos^4\frac{\theta}{2}\, do, \\ d\sigma_{+-} = d\sigma_{-+} &= 3{,}81 \cdot 10^{-4} (Z\alpha)^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^4 \sin^4\frac{\theta}{2}\, do. \end{aligned} \tag{128.2}$$

[1] См. *Costantini V., De Tollis B., Pistoni G.*//Nuovo Cimento. — 1971. — V. 2A. — P. 733; *De Tollis B., Lusignoli M., Pistoni G.*//Nuovo Cimento. — 1976. — V. 32A. — P. 227.

Индексы «+» и «−» обозначают здесь (как и в § 127) спиральности +1 или −1 конечного или начального фотонов; θ — угол рассеяния в системе покоя ядра (*V. Costantini, B. de Tollis, G. Pistoni,* 1971).

Для оценки сечения при высоких частотах воспользуемся оптической теоремой (см. § 71). Промежуточное состояние, фигурирующее в правой части соотношения унитарности, является в данном случае состоянием электрон-позитронной пары (ему отвечает рассечение диаграмм по двум внутренним электронным линиям между фотонными концами). Поэтому оптическая теорема связывает амплитуду упругого рассеяния фотона на нулевой угол с полным сечением образования пары фотоном в поле ядра $\sigma_{\text{пар}}$. Определив амплитуду $f(\omega,\ \theta)$ рассеяния на угол θ так, чтобы сечение рассеяния было $d\sigma = |f|^2 do$ (ср. (71.5)), будем иметь

$$\operatorname{Im} f(\omega,\ 0) = \frac{\omega}{4\pi}\sigma_{\text{пар}}.$$

Сечение $\sigma_{\text{пар}}$ отлично от нуля, разумеется, лишь при $\omega > 2m$. В ультрарелятивистском случае, взяв $\sigma_{\text{пар}}$ из (94.6), получим

$$f''(\omega) \equiv \operatorname{Im} f(\omega,\ 0) = \frac{7}{9\pi}(Z\alpha)^2 r_e \frac{\omega}{m}\left[\ln\frac{2\omega}{m} - \frac{109}{42}\right],\quad \omega \gg m. \tag{128.3}$$

Вещественная часть амплитуды рассеяния определяется по мнимой части дисперсионным соотношением. Это соотношение должно быть написано «с одним вычитанием», т. е. его надо писать для функции f/t (где $t = \omega^2$), поскольку при $\omega \to 0$ амплитуда $f \propto \omega^2$ (ср. с соотношением «с двумя вычитаниями» (111.13)). Выделяя вещественную часть дисперсионного интеграла (для чего достаточно понимать интеграл в смысле главного значения) и перейдя от интегрирования по $t' = \omega'^2$ к интегрированию по ω', имеем

$$f'(\omega) \equiv \operatorname{Re} f(\omega,\ 0) = \frac{2\omega^2}{\pi}\mathrm{P}\int\limits_{2m}^{\infty} \frac{f''(\omega')\,d\omega'}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)}. \tag{128.4}$$

При $\omega \gg m$ в интеграле существенны значения $\omega' \sim \omega \gg m$, так что для $f''(\omega')$ можно использовать выражение (128.3); при этом нижний предел интеграла можно заменить нулем. Главное значение интеграла можно представить как полусумму интегралов по путям, проходящим по верхнему и нижнему берегам правой вещественной оси в плоскости комплексной переменной ω'; в свою очередь, эти пути можно затем повернуть в плоскости ω' до совпадения соответственно с верхней и нижней мнимыми

полуосями. В результате $f'(\omega)$ представится в виде

$$f'(\omega) = -\frac{\omega^2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{f''(i\xi)+f''(-i\xi)}{\xi(\xi^2+\omega^2)}\,d\xi = \frac{7}{9\pi}(Z\alpha)^2\frac{r_e}{m}\omega^2\int\limits_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2+\omega^2}$$

и окончательно

$$\operatorname{Re} f(\omega,\,0) = \frac{7}{18}(Z\alpha)^2 r_e\frac{\omega}{m}. \tag{128.5}$$

Обратим внимание на то, что вещественная часть амплитуды, в отличие от мнимой части, не содержит большого логарифма.

Сумма квадратов выражений (128.3) и (128.5) дает сечение рассеяния на нулевой угол:

$$d\sigma\,\Big|_{\theta=0} = \frac{49}{81\pi^2}(Z\alpha)^4 r_e^2\left(\frac{\omega}{m}\right)^2\left\{\ln^2\frac{0,15\omega}{m}+\frac{\pi^2}{4}\right\}do \tag{128.6}$$

(*F. Rohrlich, R. L. Gluckstern,* 1952).

Полученный для рассеяния строго вперед результат (128.6) пригоден и в некоторой области малых углов. Можно показать, что условие его применимости $\theta \ll (m/\omega)^2$. Эта область, однако, вносит лишь малый вклад в полное сечение рассеяния. Основной же вклад в полное сечение дает область углов $\theta \lesssim m/\omega$; это легко понять на основании общего (не на нулевой угол) соотношения унитарности, связывающего друг с другом амплитуды рассеяния фотона и образования пар фотоном. В этой области, однако, логарифмический член отсутствует, так что полное сечение рассеяния

$$\sigma \sim (Z\alpha)^4 r_e^2\left(\frac{\omega}{m}\right)^2\theta^2 \sim (Z\alpha)^4 r_e^2 \tag{128.7}$$

(*H. A. Bethe, F. Rohrlich,* 1952). Таким образом, при больших ω сечение когерентного рассеяния стремится к постоянному пределу.

§ 129. Радиационные поправки к уравнениям электромагнитного поля

При квантовании электрон-позитронного поля (см. § 25) мы видели, что в выражении для энергии вакуума появляется бесконечная постоянная, которую можно записать в виде [1])

$$\mathcal{E}_0 = -\sum_{\mathbf{p}\sigma}\varepsilon^{(-)}_{\mathbf{p}\sigma}, \tag{129.1}$$

[1]) Пишем здесь $\mathcal{E}$ вместо E во избежание путаницы с напряженностью электрического поля.

где $\varepsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}$ — отрицательные частоты решений уравнения Дирака. Сама по себе эта постоянная не имеет физического смысла, так как энергия вакуума равна нулю по определению. С другой стороны, при наличии электромагнитного поля уровни энергии $\varepsilon_{\mathbf{p}\sigma}^{(-)}$ будут меняться. Эти изменения конечны и имеют определенный физический смысл. Они описывают зависимость свойств пространства от поля и меняют уравнения электромагнитного поля в вакууме.

Изменение уравнений поля выражается в изменении его функции Лагранжа. Плотность L функции Лагранжа является релятивистским инвариантом и потому может быть функцией лишь от инвариантов $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ и $\mathbf{EH}$. Обычное выражение

$$L_0 = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) \tag{129.2}$$

есть первый член разложения общего выражения по степеням инвариантов.

Мы найдем функцию Лагранжа в случае, когда поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ настолько медленно меняются в пространстве и времени, что их можно считать однородными и постоянными; тогда L не содержит производных от полей. На формулировке необходимых для этого условий мы остановимся в конце параграфа.

Однако для того чтобы поставленная задача имела смысл, необходимо еще предполагать электрическое поле достаточно слабым. Дело в том, что однородное электрическое поле может рождать из вакуума пары. Рассмотрение поля самого по себе как замкнутой системы допустимо, лишь если вероятность образования пар достаточно мала. Именно, должно быть

$$|\mathbf{E}| \ll \frac{m^2}{|e|} \left(= \frac{m^2c^3}{|e|\hbar}\right) \tag{129.3}$$

(изменение энергии заряда e на расстоянии $\hbar/(mc)$ должно быть мало по сравнению с mc^2). Мы увидим ниже (см. также задачу 2), что в таком случае вероятность образования пар экспоненциально мала.

Если наряду с электрическим полем имеется также и магнитное, то, вообще говоря, можно выбрать систему отсчета, в которой $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ параллельны. Тогда магнитное поле не влияет на движение заряда в направлении $\mathbf{E}$. Именно в этой системе (выбор которой будет подразумеваться в дальнейших вычислениях) и должно выполняться условие (129.3).

Вычисление функции Лагранжа начнем с определения изменения W' энергии вакуума. Величина W' дается изменением за счет поля «нулевой энергии» (129.1). Из этой величины, однако, надо еще вычесть средние значения потенциальной энергии

электронов в «состояниях» с отрицательной энергией. Последнее вычитание означает просто, что полный заряд вакуума по определению равен нулю.

Нулевая энергия при наличии поля:

$$\mathcal{E}_0 = -\sum_{\mathbf{p}\sigma} \varepsilon^{(-)}_{\mathbf{p}\sigma} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \int \psi^{(-)*}_{\mathbf{p}\sigma} i\frac{\partial}{\partial t}\psi^{(-)}_{\mathbf{p}\sigma}\, d^3x, \tag{129.4}$$

где $\psi^{(-)}_{\mathbf{p}\sigma}$ — отрицательно-частотные решения уравнения Дирака в данном поле.

Будем предполагать, что интегрирование ведется по единичному объему, а волновые функции нормированы на 1 в этом объеме; тогда $\mathcal{E}_0$ есть энергия единицы объема. Согласно сказанному выше из $\mathcal{E}_0$ надо вычесть величину

$$U_0 = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \int \psi^{(-)*}_{\mathbf{p}\sigma} e\varphi \psi^{(-)}_{\mathbf{p}\sigma}\, d^3x,$$

где $\varphi = -\mathbf{Er}$ — потенциал однородного поля. Но согласно теореме о дифференцировании оператора по параметру (см. III, (11.16))

$$U_0 \equiv \mathbf{E}\sum_{\mathbf{p}\sigma} \int \psi^{(-)*}_{\mathbf{p}\sigma} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \mathbf{E}} \psi^{(-)}_{\mathbf{p}\sigma}\, d^3x = -\mathbf{E}\sum_{\mathbf{p}\sigma} \frac{\partial \varepsilon^{(-)}_{\mathbf{p}\sigma}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{E}\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \mathbf{E}}.$$

Таким образом, окончательно полное изменение плотности энергии вакуума

$$W' = \left(\mathcal{E}_0 - \mathbf{E}\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \mathbf{E}}\right) - \left(\mathcal{E}_0 - \mathbf{E}\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \mathbf{E}}\right)_{\mathbf{E}=\mathbf{H}=0}. \tag{129.5}$$

Свяжем W' с изменением плотности лагранжиана L' ($L = L_0 + L'$). Для этого воспользуемся общей формулой

$$W = \sum \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L,$$

где q — «обобщенные координаты» поля (см. II, § 32). Для электромагнитного поля роль величин q играют потенциалы $\mathbf{A}$ и φ. Поскольку

$$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla\varphi, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{129.6}$$

то из числа «скоростей» $\dot{q}$ в L входит лишь $\dot{\mathbf{A}}$, а дифференцирование по $\dot{\mathbf{A}}$ эквивалентно дифференцированию по $\mathbf{E}$. Поэтому

$$W' = \mathbf{E}\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}} - L'. \tag{129.7}$$

Сравнив (129.5) и (129.7), найдем

$$L' = -\left[\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0|_{\mathbf{E}=\mathbf{H}=0}\right]. \tag{129.8}$$

Таким образом, вычисление L' сводится к вычислению суммы (129.1).

Рассмотрим сначала случай, когда имеется лишь магнитное поле. «Отрицательные» уровни энергии электрона (заряд $e = -|e|$) в постоянном однородном поле $H_z = H$

$$-\varepsilon_{\mathbf{p}}^{(-)} = -\sqrt{m^2 + |e|H(2n - 1 + \sigma) + p_z^2}, \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,;\ \sigma = \pm 1 \tag{129.9}$$

(см. задачу к § 32). Для вычисления суммы учтем, что число состояний в интервале dp_z есть

$$\frac{|e|H}{2\pi}\frac{dp_z}{2\pi}$$

(см. III, § 112); первый множитель есть число состояний с различными значениями p_x, от которых энергия не зависит. Кроме того, все уровни, за исключением лишь уровня с $n = 0$, $\sigma = -1$, двукратно вырождены: совпадают уровни с n, $\sigma = +1$ и $n+1$, $\sigma = -1$. Поэтому

$$-\mathcal{E}_0 = \frac{|e|H}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\sqrt{m^2+p_z^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{m^2+2|e|Hn+p_z^2}\right\}dp_z. \tag{129.10}$$

Расходимость интегралов в (129.10) устраняется при вычислении L' (129.8) вычитанием значения суммы при $H = 0$. Для проведения этой «перенормировки» удобно вычислить сначала сходящееся выражение

$$\Phi \equiv -\frac{\partial^2\mathcal{E}_0}{(\partial m^2)^2} = -\frac{|e|H}{2(2\pi)^2}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\infty}\left\{\left(m^2+p_z^2\right)^{-3/2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(m^2+2|e|Hn+p_z^2\right)^{-3/2}\right\}dp_z =$$
$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\left\{\frac{1}{m^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2+2|e|Hn}\right\}.$$

Суммирование в фигурных скобках можно свести к суммирова-

нию геометрической прогрессии следующим способом:

$$\Phi = -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty e^{-m^2\eta}\left[2\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2|e|Hn\eta} - 1\right] d\eta =$$

$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty e^{-m^2\eta}\left[\frac{2}{1-e^{-2|e|H\eta}} - 1\right] d\eta =$$

$$= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty e^{-m^2\eta}\,\mathrm{cth}(|e|H\eta)d\eta. \quad (129.11)$$

Для нахождения L' надо теперь дважды проинтегрировать Φ по m^2, после чего вычесть значение получающейся величины при $H = 0$. Находим

$$L' = -\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-m^2\eta}}{\eta^3}\{\eta|e|H\,\mathrm{cth}(|e|H) - 1\}d\eta + c_1 + c_2 m^2, \quad (129.12)$$

где c_1 и c_2 зависят от H, но не зависят от m^2.

Из соображений размерности и четности по $\mathbf{H}$ очевидно, что L' как функция от H и m должна иметь вид

$$L' = m^4 f\left(\frac{H^2}{m^4}\right).$$

Поэтому членов, нечетных по m^2, в L' вообще не может быть, так что $c_2 = 0$. Коэффициент же c_1 определяется из условия, чтобы разложение L' по степеням H^2 начиналось с члена $\sim H^4$. Действительно, член $\sim H^2$ в L' означал бы просто изменение коэффициента в исходном лагранжиане $L_0 = -H^2/(8\pi)$. Но это было бы, по существу, изменением определения напряженности поля, а тем самым и заряда. Поэтому устранение членов $\sim H^2$ означает перенормировку заряда. Легко проверить, что для этого надо положить

$$c_1 = \frac{H^2 e^2}{3\cdot 8\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta}\,d\eta.$$

Наконец, произведя еще в (129.12) замену переменной $m^2\eta \to \eta$,

получим окончательно

$$L'(H;\, E=0) = \frac{m^4}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \left\{-\eta b \operatorname{cth} b\eta + 1 + \frac{b^2\eta^2}{3}\right\} e^{-\eta}\frac{d\eta}{\eta^3}, \qquad (129.13)$$

где $b = |e|H/m^2$.

Вернемся к общему случаю, когда наряду с магнитным имеется также и параллельное ему электрическое поле $\mathbf{E}$, удовлетворяющее условию (129.3).

Для вычисления L' в этом случае нет, однако, необходимости решать заново задачу об определении уровней энергии $\varepsilon_{\mathbf{p}}^{(-)}$ электрона в поле. Достаточно заметить, что если искать волновую функцию — решение уравнения второго порядка (32.7) — в виде произведения

$$\psi = \psi_E(z) e^{ip_x x}\chi_{n\sigma}(y),$$

где $\chi_{n\sigma}$ — волновая функция в магнитном поле при $\mathbf{E} = 0$ и $p_z = 0$, то масса m и поле H войдут в уравнение для $\psi_E(z)$ лишь в комбинации

$$m^2 + |e|H(2n+1+\sigma).$$

Если теперь учесть, что суммирование по p_x (от которого уровни энергии не зависят) по-прежнему дает множитель $|e|H/(2\pi)$, то из соображений размерности величину

$$\Phi(H,\, E) \equiv \frac{\partial^2 L'}{(\partial m^2)^2}$$

можно записать в виде

$$\Phi(H,\, E) = -\frac{|e|H}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm 1}\frac{F\left(\dfrac{m^2+|e|H(2n+1+\sigma)}{|e|H}\right)}{m^2+|e|H(2n+1+\sigma)} =$$

$$= -\frac{b}{8\pi^2}\left\{F\left(\frac{1}{a}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F\left(\dfrac{1+2bn}{a}\right)}{1+2bn}\right\}, \quad a = \frac{|e|E}{m^2} \qquad (129.14)$$

(каждый член этой суммы есть производная $-d^2\varepsilon_{\mathbf{p}}^{(-)}/(dm^2)^2$, просуммированная по всем квантовым числам, кроме n). Здесь F — неизвестная пока функция, которую мы найдем из соображений релятивистской инвариантности.

Действительно, Φ должно быть функцией скаляров $H^2 - E^2$ и $(EH)^2 = (\mathbf{EH})^2$:

$$\Phi(H,\, E) = f(H^2 - E^2,\, (EH)^2).$$

Поэтому

$$\Phi(0,\, E) = f(-E^2,\, 0) = \Phi(iE,\, 0).$$

Но функция $\Phi(iE,\, 0)$ получается из (129.11) заменой $H \to iE$; после переобозначения переменной интегрирования найдем

$$\Phi(iE,\, 0) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty e^{-\eta/a}\operatorname{ctg}\eta\, d\eta. \tag{129.15}$$

Сравнив это выражение с пределом $\Phi(H \to 0,\, E)$, вычисленным из (129.14), мы сможем найти функцию F.

Переход к пределу $H \to 0$ в (129.14) производится путем замены суммирования по n интегрированием по $dn = dx/(2b)$:

$$\Phi(0,\, E) = -\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty F\left(\frac{1+x}{a}\right)\frac{dx}{1+x} = -\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{1/a}^\infty \frac{F(y)}{y}\, dy. \tag{129.16}$$

Приравняв выражения (129.15) и (129.16) и продифференцировав это равенство по $1/a \equiv z$, получим

$$\frac{F(z)}{z} = -\int\limits_0^\infty e^{-\eta z}\eta\operatorname{ctg}\eta\, d\eta.$$

После этого суммирование в (129.14) снова сводится к суммированию геометрической прогрессии, и дальнейшие вычисления аналогичны произведенным выше: выражаем Φ через m^2, E и H, интегрируем дважды по m^2, вычитаем значение при $E = H = 0$ и определяем постоянные интегрирования, как при выводе (129.13). Окончательный результат [1]:

$$L' = -\frac{m^4}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\left\{-(\eta a\operatorname{ctg}\eta a)(\eta b\operatorname{ctg}\eta b) + 1 - \frac{\eta^2}{3}(a^2 - b^2)\right\}d\eta,$$

$$a = \frac{|e|E}{m^2}\left(= \frac{|e|\hbar E}{m^2c^3}\right), \qquad b = \frac{|e|H}{m^2}\left(= \frac{|e|\hbar H}{m^2c^3}\right). \tag{129.17}$$

[1]) Этот результат был впервые получен *Гейзенбергом* и *Эйлером* (*W. Heisenberg, H. Euler,* 1935). В изложенных вычислениях использованы также идеи вывода, предложенного *Вайскопфом* (*V. Weisskopf,* 1936).

Параметры a и b можно записать в инвариантном виде

$$\begin{aligned} a &= -\frac{i|e|}{\sqrt{2}m^2}\{(\mathcal{F}+i\mathcal{G})^{1/2} - (\mathcal{F}-i\mathcal{G})^{1/2}\}, \\ b &= -\frac{|e|}{\sqrt{2}m^2}\{(\mathcal{F}+i\mathcal{G})^{1/2} + (\mathcal{F}-i\mathcal{G})^{1/2}\}, \end{aligned} \tag{129.18}$$

где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ обозначают инварианты:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2), \quad \mathcal{G} = \mathbf{EH}, \quad \mathcal{F} \pm i\mathcal{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} \pm \mathbf{E})^2. \tag{129.19}$$

После того как формула (129.17) выражена через инварианты $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, она тем самым становится применимой в произвольной системе отсчета (а не только в той, где $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$).

Сразу же отметим несколько условный характер записи формулы (129.17). Она пригодна лишь при соблюдении условия малости электрического поля: $a \ll 1$ (129.3) (не учтенного в (129.17) в явном виде). Это проявляется в том, что подынтегральное выражение в (129.17) имеет полюсы при $\eta = n\pi/a$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, так что в написанном виде интеграл, строго говоря, не имеет смысла. Поэтому (129.17) может, по существу, служить лишь для получения членов асимптотического (см. ниже) ряда по степеням a путем формального разложения $\operatorname{ctg} a$.

Математически интегралу (129.17) можно придать смысл, обходя полюсы в плоскости комплексного η. При этом у L', а тем самым и у плотности энергии W' появляется мнимая часть. Комплексность энергии, как обычно, означает квазистационарность состояния [1]). В данном случае стационарность нарушается рождением пар, а величина $-2\operatorname{Im} W'$ есть вероятность w рождения пары в единице объема в единицу времени; так как малые добавки к W и L отличаются только знаком, то вероятность w, выраженная через E и H, равна просто

$$w = 2\operatorname{Im} L'. \tag{129.20}$$

Очевидно, что она пропорциональна $e^{-\pi/a}$ (см. ниже (129.22)). Именно вследствие экспоненциальной малости $\operatorname{Im} W'$ при $a \ll 1$ имеет смысл асимптотический ряд по степеням a с сохранением в нем любого конечного числа членов.

Рассмотрим предельные случаи формулы (129.17). В слабых полях $(a \ll 1,\ b \ll 1)$ первые члены разложения:

$$L' = \frac{m^4}{8\pi^2}\frac{(a^2-b^2)^2 + 7(ab)^2}{45} = \frac{e^4}{45\cdot 8\pi^2 m^4}(4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2). \tag{129.21}$$

[1]) Направление обхода в интеграле должно быть выбрано так, чтобы было $\operatorname{Im} W' < 0$. Этому требованию отвечает обычное правило замены массы $m^2 \to m^2 - i0$ (в данном случае $a \to a + i0$).

В частности, при $b = 0$ относительная поправка

$$\frac{L'}{L_0} = \alpha\frac{a^2}{45\pi}.$$

Мнимая часть L' при $a \ll 1$ получается из интеграла (129.17) взятием полувычета в ближайшем к нулю полюсе котангенса, т. е. при $\eta a = \pi - i0$. Согласно (129.20) она дает вероятность рождения пары слабым электрическим полем:

$$w = \frac{m^4}{4\pi^3}a^2 e^{-\pi/a},$$

или, в обычных единицах:

$$w = \frac{1}{4\pi^3}\left(\frac{eE\hbar}{m^2c^3}\right)^2\frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3\exp\left(-\frac{\pi m^2c^3}{|e|\hbar E}\right). \tag{129.22}$$

В сильном магнитном поле ($a = 0,\ b \gg 1$) исходим из формулы (129.13), записанной (после замены $b\eta \to \eta$) в виде

$$L' = \frac{m^4b^2}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\eta/b}}{\eta}\left[\frac{1}{3} - \frac{\eta\operatorname{cth}\eta - 1}{\eta^2}\right]d\eta.$$

При $b \gg 1$ в этом интеграле существенна область $1 \ll \eta \ll b$. В ней $e^{-\eta/b} \approx 1$, и можно пренебречь вторым членом в скобках, а интеграл обрезать (с логарифмической точностью) на пределах $\eta \approx 1$ и $\eta \approx b$. Тогда

$$L' = \frac{m^4b^2}{24\pi^2}\ln b \tag{129.23}$$

(более точное вычисление заменяет $\ln b$ на $\ln b - 2,29$). В этом случае

$$\frac{L'}{L_0} \approx \frac{\alpha}{3\pi}\ln b.$$

Отсюда видно, что радиационные поправки к уравнениям поля могли бы достигнуть относительного порядка единицы лишь в экспоненциально больших полях:

$$H \approx \frac{m^2}{|e|}e^{3\pi/\alpha}. \tag{129.24}$$

Тем не менее вычисленные поправки имеют смысл: они нарушают линейность уравнений Максвелла и тем самым приводят к наблюдаемым, в принципе, эффектам (например, к рассеянию света на свете или во внешнем поле).

Связь напряженностей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с потенциалами $\mathbf{A}$ и φ остается, по определению, прежней — (129.6). Поэтому не меняется также и первая пара уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \tag{129.25}$$

Вторая же пара уравнений получается путем варьирования действия

$$S = \int (L_0 + L')d^4x$$

по $\mathbf{A}$ и φ. Они могут быть записаны в виде

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H} - 4\pi\mathbf{M}) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}), \qquad (129.26)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 0, \qquad (129.27)$$

где введены обозначения:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}}, \qquad \mathbf{M} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{H}}. \qquad (129.28)$$

По форме уравнения (129.25)–(129.27) совпадают с макроскопическими уравнениями Максвелла для поля в материальной среде [1]) . Отсюда видно, что величины $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ имеют смысл векторов электрической и магнитной поляризации вакуума.

Отметим, что $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ обращаются в нуль для поля плоской волны, в котором, как известно, оба инварианта $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ и $\mathbf{EH}$ равны нулю. Другими словами, для плоской волны нелинейные поправки в вакууме отсутствуют.

Остановимся, наконец, на условиях применимости полученных формул. Для того чтобы поля можно было считать постоянными, их относительные изменения на расстояниях или промежутках времени $\sim 1/m$ должны быть малы; этим обеспечивается малость связанных с производными поправок к L_0 по сравнению с самим L_0. Так, если поле зависит только от времени, это приводит к естественному условию

$$\omega \ll m. \qquad (129.29)$$

Для случая слабого поля, однако, имеется и более жесткое условие. Оно возникает из требования, чтобы член четвертого порядка (129.21) был велик по сравнению с квадратичной по производным поправкой к L_0; в противном случае этот член потерял бы смысл. Так, для электрического поля, зависящего только от времени, это приводит к условию

$$\omega \ll m\frac{|e|E}{m^2}, \qquad (129.30)$$

более жесткому, чем (129.29).

Условие (129.30) не возникает, однако, при решении задачи о рассеянии фотона на фотоне, рассмотренной в последнем разделе § 127. Там мы с самого начала интересуемся только четырехфотонным процессом, описываемым членами четвертого порядка в функции Лагранжа, и вопрос об относительном значении

---

[1]) См. VIII, § 75. При сравнении надо помнить, что в макроскопической электродинамике среднее значение микроскопической напряженности магнитного поля обозначается через $\mathbf{B}$, а не $\mathbf{H}$, как здесь.

других членов в L' не имеет отношения к делу. Поэтому достаточно было потребовать выполнения лишь условия (129.29).

Задачи

1. Определить поправку к полю малого неподвижного заряда e_1, связанную с нелинейностью уравнений Максвелла.

Решение. При $\mathbf{H}=0$ имеем из (129.21)

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\alpha^2}{90\pi^2 m^4}\mathbf{E}E^2. \tag{1}$$

В центрально-симметричном случае из (129.27) находим

$$(E + 4\pi P)r^2 = \text{const} = e_1 \tag{2}$$

(постоянная определена из условия, что при $r\to\infty$ поле совпадает с кулоновым полем заряда e_1). Приближенно решая (2), получаем

$$E = \frac{e_1}{r^2}\left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{45\pi m^4 r^4}\right),$$

или

$$\Phi = \frac{e_1}{r}\left(1 - \frac{2\alpha^2 e_1^2}{225\pi m^4 r^4}\right). \tag{3}$$

Нелинейную по e_1 поправку в (3) следует отличать от линейной поправки в (114.6), связанной в конечном счете с неоднородностью кулонова поля. Поправка (3) более высокого порядка по α, но медленнее убывает с расстоянием и быстрее растет с увеличением e_1.

2. Непосредственно оценить вероятность рождения пары в слабом однородном постоянном электрическом поле в квазиклассическом приближении с экспоненциальной точностью (*F. Sauter,* 1931).

Решение. Движение в слабом поле $\mathbf{E}$ (медленно меняющийся потенциал $\varphi = -\mathbf{Er} = -Ez$) квазиклассично. Поскольку в амплитуду реакции волновая функция конечного позитрона входит в виде начальной «отрицательно-частотной» функции, рождение пары можно рассматривать как переход электрона из «отрицательно-частотного» в «положительно-частотное» состояние. В первом из них при наличии поля квазиклассический импульс определяется равенством

$$\varepsilon = -\sqrt{p^2(z)+m^2} + |e|Ez, \tag{1}$$

а во втором

$$\varepsilon = +\sqrt{p^2(z)+m^2} + |e|Ez, \tag{2}$$

Переход из первого состояния во второе есть переход через потенциальный барьер (область мнимого $p(z)$), разделяющий области зависимостей (1) и (2) с вещественными $p(z)$ при заданном ε. Границы этого барьера z_1 и z_2 лежат при $p(z)=0$, т. е.

$$\varepsilon = -m + |e|Ez_1, \qquad \varepsilon = +m + |e|Ez_2.$$

Вероятность перехода через квазиклассический барьер

$$w \propto \exp\left(-2\int_{z_2}^{z_1} |p(z)|\,dz\right) = \exp\left(-4\frac{m^2}{eE}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\,d\xi\right),$$

откуда

$$w \propto \exp\left(-\frac{\pi m^2}{|e|E}\right),$$

что в согласии с (129.22).

§ 130. Расщепление фотона в магнитном поле

Нелинейные поправки в уравнениях электромагнитного поля приводят к ряду специфических эффектов при распространении фотонов во внешних полях.

С целью придания этим уравнениям более обычного вида (ср. примеч. на с. 646), будем обозначать в этом параграфе напряженности электрического и магнитного полей буквами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$; буквами же $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ обозначим величины

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},\ \ \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M},\ \ \mathbf{P} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{E}},\quad \mathbf{M} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{B}}.$$

Тогда уравнения (129.25)–(129.27) примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\\ \operatorname{div}\mathbf{D} = 0,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{130.1}$$

Рассмотрим распространение фотона в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$. Обозначив величины, относящиеся к слабому полю электромагнитной волны, буквами со штрихом, будем иметь для них уравнения

$$\begin{aligned} [\mathbf{kH}'] = -\omega\mathbf{D}',\quad [\mathbf{kE}'] = \omega\mathbf{B}',\\ \mathbf{kB}' = 0,\qquad \mathbf{kD}' = 0, \end{aligned} \tag{130.2}$$

причем

$$D'_i = \varepsilon_{ik}E'_k,\quad B'_i = \mu_{ik}H'_k; \tag{130.3}$$

тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости вакуума являются функциями внешнего поля $\mathbf{B}_0$. Предполагая это поле слабым в смысле $|\,e\,|B_0/m^2 \ll 1$, найдем из лагранжевой функции (129.21):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + \frac{2e^4}{45m^4}B_0^2\left(-\delta_{ik} + \frac{7}{2}b_ib_k\right),\\ \mu_{ik} = \delta_{ik} + \frac{2e^4}{45m^4}B_0^2\left(\delta_{ik} + 2b_ib_k\right), \end{aligned} \tag{130.4}$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$.

Напомним, что частота фотона предполагается малой: $\omega \ll m$ (условие (129.29)). Отметим, однако, что характер структуры тензоров ε_{ik} и μ_{ik} не связан с этим предположением, а является следствием уже инвариантности квантовой электродинамики относительно пространственной инверсии и зарядового сопряжения. Так, первая запрещает появление в $\mathbf{D}'$ членов вида $\mathrm{const}\cdot\mathbf{B}'$ и $\mathrm{const}\cdot\mathbf{B}_0(\mathbf{B}_0\mathbf{B}')$ (инверсия меняет знак $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ при неизменных $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$), а вторая запрещает появление в ε_{ik} и μ_{ik} антисимметричных и нечетных по $\mathbf{B}_0$ членов вида $e_{ikl}B_{0l}$ (зарядовое сопряжение меняет одновременно знак всех полей).

Ввиду наличия в рассматриваемой задаче избранной плоскости — плоскости, проходящей через $\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}$, — в качестве двух независимых поляризаций фотона естественно выбрать линейные поляризации в этой плоскости и перпендикулярно ей. Будем отмечать индексами $\perp$ и $\|$ поляризации, при которых вектор $\mathbf{B}'$ соответственно перпендикулярен плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{b}$ или лежит в ней.

В случае перпендикулярной поляризации вместе с вектором $\mathbf{B}'$ перпендикулярен плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{b}$ также и вектор $\mathbf{H}'$:

$$\mathbf{B}' = \left(1 + \frac{2e^4}{45m^4}B_0^2\right)\mathbf{H}'.$$

Векторы же $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{D}'$ лежат в плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{b}$. В этом случае из уравнений (130.2) получаем закон дисперсии фотонов в виде $k = n_\perp\omega$ с «показателем преломления» (обычные единицы)

$$n_\perp = 1 + \frac{7e^4\hbar}{90m^4c^7}B_0^2\sin^2\theta, \tag{130.5}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$ [1]).

Во втором случае векторы $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{H}'$ лежат в плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{b}$, а векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{D}'$ перпендикулярны ей. Для показателя преломления получается

$$n_{\|} = 1 + \frac{2e^4\hbar}{45m^4c^7}B_0^2\sin^2\theta. \tag{130.6}$$

Отметим, что $n_\perp \geqslant n_{\|}$. Знак равенства достигается при $\theta = 0$, когда $n_\perp = n_{\|} = 1$.

Наиболее интересным проявлением нелинейности уравнений Максвелла с учетом радиационных поправок является расщепление фотона на два фотона во внешнем магнитном поле (*S. L. Adler, J. N. Bahcall, C. G. Callan, M. N. Rosenbluth,* 1970).

В постоянном и однородном поле этот процесс идет с сохранением энергии и импульса [2]). При распаде фотона $\mathbf{k}$ на фотоны $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ имеем

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2), \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}. \tag{130.7}$$

Для фотонов в вакууме в отсутствие внешних полей $\omega = k$ и равенства (130.7) могут выполняться лишь для трех фотонов, движущихся в одном направлении. Но и в таком случае распад

---

[1]) Выразив $\mathbf{B}'$ через $\mathbf{H}'$ во втором из уравнений (130.2), подставим из него $\mathbf{H}'$ в первое уравнение, после чего спроецируем последнее на направление $\mathbf{b}$. Произведение $\mathbf{kE}'$ выражается через $\mathbf{bE}'$ из уравнения $\mathbf{kD}' = 0$.

[2]) Сохранение импульса связано с пространственной однородностью поля, но имеет место, конечно, лишь для процессов с незаряженными частицами. В лагранжеву функцию заряженных частиц входят не только напряженности, но и потенциалы поля, зависящие от координат и в однородном поле.

строго запрещен инвариантностью относительно зарядового сопряжения — в силу теоремы Фарри (см. § 79) сумма диаграмм с тремя фотонными внешними концами обращается в нуль.

Наличие внешнего поля делает распад фотона возможным (он изображается диаграммами с тремя фотонными концами и одной или более линиями внешнего поля). Но эта возможность оказывается связанной с характером поляризации фотонов. Эту связь можно установить уже из анализа законов сохранения (130.7) с учетом изменения закона дисперсии фотона в магнитном поле.

Запишем закон дисперсии в виде

$$\omega = k + \beta(\mathbf{k}), \tag{130.8}$$

где $\beta(\mathbf{k})$ — малая (в слабом поле) добавка. Ее наличие делает, в принципе, возможным выполнение равенств (130.7) для импульсов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, лежащих в некотором узком конусе вблизи направления $\mathbf{k}$. Ввиду близости направлений всех трех векторов $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ можно в малых членах $\beta(\mathbf{k})$ положить их все направленными вдоль $\mathbf{k}$ и считать, что $k_1 + k_2 = k$. Тогда закон сохранения энергии запишется как

$$\beta(\varkappa k) - \beta_1(\varkappa k_1) - \beta_2(\varkappa(k - k_1)) = k_1 + |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| - k$$

($\varkappa = \mathbf{k}/k$); поскольку закон дисперсии зависит от поляризации фотона, функции β, β_1, β_2 могут быть различными. Учитывая, что

$$|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| = \left[(k - k_1)^2 + 2kk_1(1 - \cos\vartheta)\right]^{1/2} \approx k - k_1 + \frac{kk_1}{2(k - k_1)}\vartheta^2$$

(ϑ — малый угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$), имеем

$$\beta(\varkappa k) - \beta_1(\varkappa k_1) - \beta_2(\varkappa(k - k_1)) = \frac{kk_1\vartheta^2}{2(k - k_1)} > 0. \tag{130.9}$$

Это неравенство определяет необходимые для распада свойства закона дисперсии.

Для частот $\omega \ll m$ закон дисперсии дается формулами (130.5),(130.6), так что $\beta(\mathbf{k}) \approx -k[n(\varkappa) - 1]$, где функция $n(\varkappa)$ зависит от направления, но не от величины вектора $\mathbf{k}$. Тогда должно быть

$$k_1 n_1(\varkappa) + (k - k_1) n_2(\varkappa) - kn(\varkappa) > 0. \tag{130.10}$$

Поскольку $n_\perp > n_{||}$, этим условием сразу исключаются распады

$$\gamma_\perp \to \gamma_{||} + \gamma_{||}, \quad \gamma_\perp \to \gamma_{||} + \gamma_\perp,$$

где символ γ означает фотон, а индексы $\perp$ и $||$ отвечают двум определенным выше поляризациям [1]).

[1]) Численные расчеты показывают, что неравенство $n_\perp > n_{||}$ верно не только при $\omega \ll m$ (когда справедливы выражения (130.5),(130.6)), но и при всех $\omega < 2m$ (порог для рождения пар фотоном).

Для распадов

$$\gamma_\perp \to \gamma_\perp + \gamma_\perp, \quad \gamma_{||} \to \gamma_{||} + \gamma_{||}$$

левая часть неравенства (130.10) обращается в нуль, поскольку функции n, n_1 ,n_2 одинаковы. Для выяснения вопроса в этом случае необходимо учесть зависимость коэффициента преломления от k, появляющуюся по мере увеличения ω. Требуемое неравенство:

$$k_1 n(\varkappa, k_1) + (k - k_1) n(\varkappa, k - k_1) - k n(\varkappa, k) > 0.$$

Уже из общих соображений можно утверждать, что $n(\varkappa, k)$ — возрастающая функция k, и потому это неравенство не может быть выполнено, так что рассматриваемые распады тоже невозможны (действительно, заменив $n(k - k_1)$ и $n(k_1)$ на $n(k)$, мы заведомо увеличим всю сумму, между тем как после замены она станет лишь равной нулю). Сделанное утверждение относится к любым прозрачным средам и является следствием формулы Крамерса–Кронига для показателя преломления (ср. VIII, § 84). В данном случае внешнее поле представляет собой «прозрачную среду» для фотонов всех частот $\omega < 2m$ — вплоть до порога рождения пар, т. е. появления поглощения фотонов.

Таким образом, единственными разрешенными процессами распада оказываются

$$\gamma_{||} \to \gamma_\perp + \gamma_\perp, \tag{130.11}$$

$$\gamma_{||} \to \gamma_{||} + \gamma_\perp. \tag{130.12}$$

Уже было отмечено, что импульсы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ направлены под малыми углами ϑ к импульсу начального фотона $\mathbf{k}$. Если пренебречь этими углами, т. е. считать импульсы всех фотонов параллельными (будем называть такое приближение коллинеарным), то распад (130.12) окажется невозможным, как это видно из следующих рассуждений.

Аналогично (127.14), представим амплитуду распада в виде

$$M_{fi} = M_{\lambda\mu\nu} e^\lambda e_1^{\mu *} e_2^{\nu *},$$

где e, e_1, e_2 — 4-векторы поляризации фотонов, определенные, как обычно, по их 4-потенциалам A. Выбрав трехмерную калибровку потенциалов, $e = (0, \mathbf{e})$, перепишем это выражение в виде

$$M_{fi} = M_{ikl} e_i e_{1k}^* e_{2l}^*.$$

Две независимые поляризации определяются ортами [1])

$$\mathbf{e}_{||} \parallel [\mathbf{kb}], \ \mathbf{e}_\perp \parallel [\mathbf{k}[\mathbf{kb}]]. \tag{130.13}$$

[1]) Индексы $||$ и $\perp$ соответствуют определенным выше поляризациям. Надо помнить, что орты $\mathbf{e}$ определяют направления векторного потенциала $\mathbf{A}$ (и тем самым поля $\mathbf{E}'$) и перпендикулярны направлению $\mathbf{B}'$.

Легко видеть, что в разложении

$$M_{ikl} = \sum_{\lambda\lambda_1\lambda_2} M_{\lambda\lambda_1\lambda_2} e_i^{(\lambda)*} e_k^{(\lambda_1)} e_l^{(\lambda_2)}$$

(индексы λ, λ_1, λ_2 пробегают значения $\perp$, $\|$; ср. (127.9)) векторы $\mathbf{e}_\perp$ должны встречаться в каждом члене четное (0 или 2) число раз. Действительно, амплитуда M_{fi} инвариантна относительно преобразования CP, а поскольку потенциалы $\mathbf{A}$ (а с ними и $\mathbf{e}$) CP-инвариантны, то должен быть CP-инвариантен также и тензор M_{ikl}. При CP-преобразовании $\mathbf{e}_{\|} \to \mathbf{e}_{\|}$, $\mathbf{e}_\perp \to -\mathbf{e}_\perp$ (зарядовое сопряжение меняет знак $\mathbf{b}$, а инверсия меняет знак $\mathbf{k}$, оставляя аксиальный вектор $\mathbf{b}$ неизменным). Поэтому если в каком-либо члене разложения вектор $\mathbf{e}_\perp$ входит один раз, то соответствующий скаляр $M_{\lambda\lambda_1\lambda_2}$ должен быть CP-нечетен. Но из единственных двух (в коллинеарном приближении) векторов $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ и $\mathbf{b}$, которые оба меняют знак при CP-преобразовании, нельзя составить CP-нечетного скаляра, чем и доказывается сделанное утверждение.

Таким образом, в коллинеарном приближении распад (130.12) запрещен. Более детальная оценка показывает, что отношение амплитуды этого процесса к амплитуде разрешенного в коллинеарном приближении распада (130.11):

$$\frac{M_{\|\,\perp,\,\|}}{M_{\perp\,\perp,\,\|}} \sim \vartheta^2 \sim \alpha^2\left(\frac{B_0}{B_{\text{кр}}}\right), \tag{130.14}$$

где

$$B_{\text{кр}} = \frac{m^2}{|\,e\,|}\left(= \frac{m^2c^3}{|\,e\,|\hbar} = 4,4\cdot 10^{13}\ \text{Гс}\right)$$

(углы ϑ оцениваются из (130.9) как $\vartheta^2 \sim n_\perp - n_{\|}$).

Тот факт, что из всех распадов оказывается возможным (в главном приближении) лишь распад $\gamma_{\|} \to \gamma_\perp + \gamma_\perp$, означает, что в неполяризованном пучке фотонов, распространяющихся в магнитном поле, в конце концов устанавливается перпендикулярная ($\perp$) поляризация.

Перейдем к вычислению амплитуды распада $M_{fi} \equiv M_{\perp\,\perp,\|}$ по теории возмущений, т. е. в предположении $B_0 \ll B_{\text{кр}}$.

Первые (по α и по внешнему полю) неисчезающие фейнмановские диаграммы имеют вид



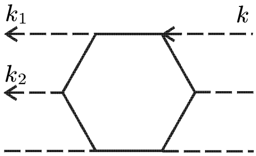
(130.15)

(со всеми возможными перестановками концов), где три концевые линии отвечают фотонам, а одна — внешнему полю. Но в коллинеарном приближении соответствующая этим диаграммам амплитуда обращается в нуль. Действительно, в силу калибровочной инвариантности внешнее поле может войти в амплитуду процесса лишь в виде 4-тензора его напряженностей $F_{\mu\nu}$, а 4-векторы поляризации фотонов — лишь в антисимметричных комбинациях

$$f_{\mu\nu} = k_\mu e_\nu - k_\nu e_\mu$$

с волновыми 4-векторами. Окончательное выражение для амплитуды строится из тензора внешнего поля $F_{\mu\nu}$, тензоров $f_{\mu\nu}$, $f_{1\mu\nu}$, $f_{2\mu\nu}$ трех фотонов и их волновых 4-векторов k_μ, $k_{1\mu}$, $k_{2\mu}$; при этом оно должно быть линейным по каждому из тензоров $f_{\mu\nu}$, а для диаграмм (130.15) — линейным и по $F_{\mu\nu}$. В коллинеарном приближении 4-векторы k_1 и k_2 сводятся к k: $k_1 = k\omega_1/\omega$, $k_2 = k\omega_2/\omega$. В этих условиях всякое скалярное произведение, построенное указанным образом, обращается тождественно в нуль: легко сообразить, что такое произведение будет содержать по крайней мере один равный нулю множитель k^2 или ke.

Таким образом, в коллинеарном приближении первый отличный от нуля вклад в амплитуду распада возникает лишь от шестиугольных диаграмм вида



(130.16)

с тремя линиями внешнего поля [1]. Отвечающая таким диаграммам амплитуда строится уже с тремя множителями $F_{\mu\nu}$. Такие скалярные произведения могут быть отличны от нуля. Но все отличные от нуля произведения содержат волновые векторы фотонов только через посредство тензоров $f_{\mu\nu}$; легко сообразить, что добавление еще и других множителей k приведет к появлению в произведении равных нулю множителей k^2 или ke. Но компоненты тензора $f_{\mu\nu}$ совпадают с компонентами напряженностей $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ поля фотона. Это значит, что если амплитуду распада, отвечающую диаграммам (130.16), представить как матричный элемент некоторого оператора, то этот оператор, будучи выражен через операторы напряженностей полей фотонов, не зависит

[1] Поправки же, связанные с учетом неколлинеарности в диаграммах (130.5), дали бы в амплитуде вклад следующего порядка по α по сравнению с вкладом от диаграмм (130.16).

от их частот. В свою очередь, отсюда следует, что вычисление амплитуды распада (отвечающей диаграмме (130.16)) с помощью лагранжиана (129.17) даст правильный ответ, не ограниченный условием $\omega \ll m$.

В конце § 127 было объяснено, каким образом гамильтониан взаимодействия получается из найденной в § 129 лагранжевой функции L. Теперь речь идет о процессе с участием трех фотонов, и соответствующий оператор взаимодействия получается из членов разложения L, содержащих тройные произведения полей фотонов $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$. При этом надо рассматривать только член вида

$$(\mathbf{B}'\mathbf{B}_0)(\mathbf{E}'\mathbf{B}_0)^2, \tag{130.17}$$

в который каждый из векторов $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{E}'$ входит умноженным скалярно на $\mathbf{B}_0$. Действительно, произведения $\mathbf{E}'^2$, $\mathbf{B}'^2, \mathbf{E}'\mathbf{B}'$ происходят, в четырехмерной записи, от скаляров вида $f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$, которые в коллинеарном приближении тождественно обращаются в нуль. Тот факт, что выбран член именно с одним множителем $\mathbf{B}'$ и двумя $\mathbf{E}'$, связан с тем, что рассматривается процесс с одним $\|$-фотоном и двумя $\perp$-фотонами; у первого составляющую вдоль $\mathbf{B}_0$ имеет поле $\mathbf{B}'$, а у последних — поле $\mathbf{E}'$.

Функция Лагранжа L выражается через инварианты $\mathcal{F} = (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)/2$ и $\mathcal{G} = \mathbf{EB}$. Нужный нам член разложения получается из члена $\propto \mathcal{F}\mathcal{G}^2$. Вычисление с помощью (129.17) дает для последнего выражение

$$-\frac{13e^6}{630\pi^2 m^8}\mathcal{F}\mathcal{G}^2.$$

Положив $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ и взяв из $\mathcal{F}$ слагаемое $\mathbf{B}_0\mathbf{B}'$, а из $\mathcal{G}$ — слагаемое $\mathbf{B}_0\mathbf{E}'$, получим искомый член разложения вида (130.17). Таким образом, оператор трехфотонного взаимодействия, приводящего к распаду $\gamma_{\|} \to \gamma_{1\perp} + \gamma_{2\perp}$, дается выражением

$$\widehat{V}^{(3)} = \frac{13e^6}{315\pi^2 m^8}\int(\mathbf{B}_0\widehat{\mathbf{E}}'_1)(\mathbf{B}_0\widehat{\mathbf{E}}'_2)(\mathbf{B}_0\widehat{\mathbf{B}}')\,d^3x, \tag{130.18}$$

где

$$\widehat{\mathbf{B}}' = i\sqrt{4\pi}[\mathbf{k}\mathbf{e}_{\|}]e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\widehat{c}_{\mathbf{k}\|},$$
$$\widehat{\mathbf{E}}'_1 = -i\sqrt{4\pi}\omega_1\mathbf{e}_{\perp}e^{-i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}-\omega_1 t)}\widehat{c}^{\,+}_{\mathbf{k}_1\perp}$$

и аналогично для $\widehat{\mathbf{E}}'_2$; ср. (127.26),(127.27) [1]).

Согласно изложенным в § 64 правилам амплитуда распада M_{fi} вычисляется по определению

$$S_{fi} = -i\langle f|\int\widehat{V}^{(3)}dt|i\rangle = i(2\pi)^4\delta^{(4)}(k - k_1 - k_2)M_{fi}$$

[1]) Удвоение коэффициента в (130.18) — за счет того, что $\mathbf{E}'_1$ и $\mathbf{E}'_2$ могут быть взяты из каждого из двух множителей $\mathbf{E}'$ в L.

и равна

$$M_{fi} = -i\frac{13e^6}{315\pi^2 m^8}(4\pi)^{3/2}\omega\omega_1\omega_2 B_0^3 \sin^3\theta$$

(θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$). Вероятность распада в единицу времени (см. (64.11)):

$$dw = (2\pi)^4\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)|M_{fi}|^2\frac{d^3k_1 d^3k_2}{2\cdot 2\omega\cdot 2\omega_1\cdot 2\omega_2\cdot(2\pi)^6}$$

(лишний множитель (1/2) учитывает уменьшение фазового объема за счет тождественности двух конечных фотонов). Первая δ-функция устраняется интегрированием по d^3k_2. Для устранения второй δ-функции замечаем, что при пренебрежении дисперсией:

$$\omega - \omega_1 - \omega_2 = k - k_1 - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \approx -\frac{kk_1}{k - k_1}(1 - \cos\vartheta_1)$$

и потому [1])

$$\int_0^\omega\int_0^1 \omega\omega_1\omega_2\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)d\cos\vartheta_1\cdot 2\pi\omega_1^2 d\omega_1 =$$

$$= 2\pi\int_0^\omega \omega_1^2(\omega - \omega_1)^2 d\omega_1 = \frac{\pi}{15}\omega^5.$$

Окончательно находим для полной вероятности распада фотона в единицу времени (обычные единицы):

$$w = \frac{\alpha^3}{15\pi^2}\left(\frac{13}{315}\right)^2\frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^5\left(\frac{B_0\sin\theta}{B_{\text{кр}}}\right)^6 =$$

$$= 0,18\alpha^6\frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{B_0^2\sin^2\theta}{8\pi mc^2}\right)^3\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^9\left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^5. \quad (130.19)$$

Как уже упоминалось, применимость этой формулы не требует условия $\omega \ll m$. Она ограничена лишь условием малости членов, отвечающих диаграммам восьмого порядка. Для оценки заметим, что в матричном элементе восьмого порядка может иметься, например, член, отличающийся от членов шестого порядка безразмерным инвариантным множителем вида

[1]) При этом подразумевается, что при учете дисперсии аргумент δ-функции действительно обращался бы в нуль при некотором $\cos\vartheta_1 < 1$. Таким образом, дисперсия требуемого характера необходима для того, чтобы распад был возможным, но сама вероятность распада от дисперсии (если она мала) не зависит.

$(eF^{\mu\nu}k_\nu/m^3)^2$. Условие его малости приводит к весьма слабому условию

$$\omega \ll m(m^2/(|e|B_0)).$$

§ 131. Вычисление интегралов по четырехмерным областям

Сведем здесь некоторые правила и формулы, полезные для вычисления интегралов, возникающих в теории радиационных поправок. Типичная формула интеграла, отвечающего диаграмме Фейнмана:

$$\int \frac{f(k)d^4k}{a_1 a_2 \ldots a_n}, \tag{131.1}$$

где $a_1,\ a_2,\ \ldots$ — полиномы второй степени по 4-вектору k, $f(k)$ — полином какой-либо степени n', а интегрирование производится по всему четырехмерному k-пространству.

Удобный метод вычисления таких интегралов (принадлежащий *Фейнману*, 1949) основан на предварительном преобразовании (параметризации) подынтегрального выражения путем введения дополнительных интегрирований по вспомогательным переменным $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots$ согласно формуле

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)! \int\limits_0^1 d\xi_1 \ldots \int\limits_0^1 d\xi_n \frac{\delta(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n-1)}{(a_1\xi_1+a_2\xi_2+\ldots+a_n\xi_n)^n}. \tag{131.2}$$

В результате такого преобразования вместо n различных квадратичных полиномов в знаменателе возникает n-я степень всего одного полинома второй степени.

Устранив δ-функцию интегрированием по $d\xi_n$ и введя новые переменные согласно

$$\xi_1 = x_{n-1}, \xi_2 = x_{n-2}-x_{n-1}, \ldots, \xi_{n-1} = x_1 - x_2,$$
$$\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n-1} = x_1,$$

получим формулу (131.2) в эквивалентном виде:

$$\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)! \int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots$$
$$\ldots \int\limits_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{[a_1 x_{n-1} + a_2(x_{n-2}-x_{n-1}) + \ldots + a_n(1-x_1)]^n}. \tag{131.3}$$

При $n = 2$ эта формула имеет вид

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx}{[a_1 x + a_2(1-x)]^2} \tag{131.4}$$

и проверяется прямым вычислением. Для произвольного же n формула может быть доказана по индукции от $n-1$ к n. Действительно, произведя в (131.3) интегрирование по dx_{n-1}, получим в правой стороне равенства разность двух $(n-2)$-кратных интегралов того же вида. Предполагая для них формулу справедливой, получаем $\frac{1}{a_1 - a_2}\left[\frac{1}{a_2 a_3 \ldots a_n} - \frac{1}{a_1 a_3 \ldots a_n}\right]$, что совпадает с выражением в левой части равенства (131.3).

Дифференцированием (131.3) по a_1, a_2, … можно получить аналогичные формулы, служащие для параметризации интегралов, содержащих в знаменателях какие-либо из полиномов в степенях выше первой.

Регуляризация расходящихся интегралов осуществляется вычитанием из них интегралов аналогичного вида. Для вычисления такой разности может оказаться целесообразным предварительное преобразование разности подынтегральных выражений (каждое из которых уже было преобразовано с помощью (131.2)) с помощью формулы

$$\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} = -\int_0^1 \frac{n(a-b)\,dz}{[(a-b)z+b]^{n+1}}. \tag{131.5}$$

После преобразования, согласно (131.3), четырехмерное интегрирование в (131.1) приводится к виду

$$\int \frac{f(k)\,d^4k}{[(k-l)^2 - \alpha^2]^n}, \tag{131.6}$$

где l — 4-вектор, а α^2 — скаляр, оба они зависят от параметров $x_1, \ldots, x_{n-1}$; скаляр α^2 будем считать положительным.

Если интеграл (131.6) сходится, то в нем можно произвести замену переменных согласно $k - l \to k$ (сдвиг начала координат), после чего он принимает вид

$$\int \frac{f(k)\,d^4k}{(k^2 - \alpha^2)^n} \tag{131.7}$$

(с другой функцией $f(k)$), так что знаменатель содержит лишь квадрат k^2. Что касается числителя, то достаточно ограничиться

рассмотрением скалярных функций $f = F(k^2)$. Действительно, для интегралов с числителями другого вида имеем

$$\int \frac{k^\mu F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} = 0, \tag{131.8}$$

$$\int \frac{k^\mu k^\nu F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\int \frac{k^2 F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}, \tag{131.9}$$

$$\int \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} = \\ = \frac{1}{24}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\int \frac{(k^2)^2 F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} \tag{131.10}$$

и т. д., что очевидно уже из соображений симметрии (при интегрировании по всем направлениям k).

В исходном интеграле (131.1) каждый из множителей a_1, a_2, … в знаменателе имеет (как функция от k_0) по два нуля, которые обходятся при интегрировании по dk_0 согласно обычному правилу (см. § 75). После преобразования к виду (131.7) вместо $2n$ простых полюсов подынтегральное выражение имеет всего два полюса n-го порядка, которые обходятся по тому же правилу (путь C на рис. 25). Смещая контур интегрирования, как показано стрелками, можно совместить его с мнимой осью в плоскости k_0 (C' на рис. 25). Другими словами, переменная k_0 заменится на $k_0 = ik_0'$ с вещественной переменной k_0'. Изменив также обозначение $\mathbf{k}$ на $\mathbf{k}'$, будем иметь

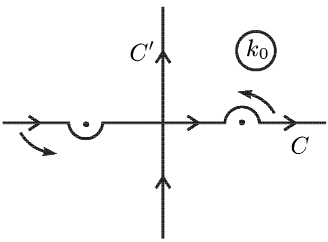


Рис. 25

$$k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 \to -(k_0'^2 + \mathbf{k}'^2) = -k'^2, \tag{131.11}$$

где k' — 4-вектор в евклидовой метрике. При этом

$$d^4k \to id^4k' = ik'^2 d\frac{k'^2}{2}d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент четырехмерных телесных углов. Интегрирование по $d\Omega$ дает $2\pi^2$ (см. II, § 111), после чего

$$d^4k \to i\pi^2 k'^2 d(k'^2). \tag{131.12}$$

Обозначив $k'^2 = z$, получим окончательно

$$\int \frac{F(k^2)d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} = (-1)^n i\pi^2 \int\limits_0^\infty \frac{F(-z)z\,dz}{(z+\alpha^2)^n}. \tag{131.13}$$

В частности,

$$\int \frac{d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} = \frac{(-1)^n i\pi^2}{\alpha^{2(n-2)}(n-1)(n-2)}. \tag{131.14}$$

Логарифмически расходящаяся часть в интегралах (131.7) может быть выделена в виде

$$\int \frac{d^4k}{[(k-l)^2-\alpha^2]^2}. \tag{131.15}$$

Легко видеть, что и в таком интеграле допустимо преобразование $k \to k+l$. Действительно, разность первоначального и преобразованного интегралов

$$\int \left\{ \frac{1}{[(k-l)^2-\alpha^2]^2} - \frac{1}{(k^2-\alpha^2)^2} \right\} d^4k$$

представляет собой сходящийся интеграл, и потому в нем замена $k \to k+l$ во всяком случае допустима. Произведя ее и заменив еще затем $k \to -k$, получим ту же величину с обратным знаком, откуда и следует ее равенство нулю.

Линейно расходящийся интеграл должен иметь вид

$$\int \frac{k^\mu d^4k}{[(k-l)^2-\alpha^2]^2}, \tag{131.16}$$

но фактически такой интеграл расходится лишь логарифмически: подынтегральное выражение асимптотически (при $k \to \infty$) равно $k^\mu/(k^2)^2$ и обращается в нуль при усреднении по направлениям. Сдвиг начала координат, однако, не оставляет интеграл (131.16) неизменным, а добавляет к нему аддитивную постоянную. Продемонстрируем это для случая бесконечно малого сдвига $k \to k+\delta l$, вычислив разность

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{k^\mu}{[(k-\delta l)^2-\alpha^2]^2} - \frac{k^\mu+\delta l^\mu}{(k^2-\alpha^2)^2} \right\} d^4k. \tag{131.17}$$

С точностью до членов первого порядка по δl

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{4k^\mu(k\delta l)}{(k^2-\alpha^2)^3} - \frac{\delta l^\mu}{(k^2-\alpha^2)^2} \right\} d^4k.$$

В первом члене усреднение по направлениям заменяет числитель на $k^2\delta l^\mu$ (ср. (131.9)), после чего находим [1])

$$\Delta^\mu = \alpha^2 \delta l^\mu \int \frac{d^4k}{(k^2-\alpha^2)^3} = -\frac{i\pi^2}{2}\delta l^\mu. \tag{131.18}$$

[1]) Более громоздкое вычисление приводит к такому же результату и при конечном l.

В окончательных выражениях для радиационных поправок часто фигурирует трансцендентная функция, определяемая интегралом

$$F(\xi) = \int\limits_0^\xi \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx \tag{131.19}$$

(ее называют иногда *функцией Спенса*). Отметим здесь для справок некоторые ее свойства:

$$F(\xi) + F\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\ln^2\xi, \tag{131.20}$$

$$F(-\xi) + F(-1+\xi) = -\frac{\pi^2}{6} + \ln\xi\,\ln(1-\xi), \tag{131.21}$$

$$F(1) = \frac{\pi^2}{12}, \qquad F(-1) = -\frac{\pi^2}{6}. \tag{131.22}$$

Разложение при малых ξ:

$$F(\xi) = \xi - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^3}{9} - \frac{\xi^4}{16} + \ldots \tag{131.23}$$

ГЛАВА XIII

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

§ 132. Асимптотическое поведение фотонного пропагатора при больших импульсах

В § 113 был вычислен первый (по α) член разложения поляризационного оператора $\mathcal{P}(k^2)$ и было найдено, что при $|k^2| \gg m^2$ с логарифмической точностью он имеет вид

$$\mathcal{P}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \ln \frac{|k^2|}{m^2}. \tag{132.1}$$

Там же было указано, что по смыслу вывода этой формулы (как поправки первого приближения к пропагатору $4\pi D^{-1} = k^2$) предполагается выполненным условие

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \ll 1, \tag{132.2}$$

чем ограничивается применимость формулы со стороны больших $|k^2|$. Покажем теперь, что в действительности выражение (132.1) остается справедливым и при гораздо более слабом условии

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \lesssim 1. \tag{132.3}$$

Ход доказательства состоит в следующем [1]. Прежде всего, замечаем, что хотя при условии (132.3) вклад в $\mathcal{P}(k^2)$ может возникать, в принципе, от членов всех порядков (по α) ряда теории возмущений, но в каждом (n-м) порядке надо учитывать только члены $\sim \alpha^n \ln^n(|k^2|/m^2)$, содержащие большой логарифм в той же степени, что и α; члены с более низкими степенями логарифма заведомо малы в силу неравенства $\alpha \ll 1$.

Далее, исследование ряда теории возмущений для $\mathcal{P}$ можно свести к исследованию рядов для $\mathcal{G}$ и Γ^μ с помощью уравнения Дайсона

$$\mathcal{P}(k^2) = i\frac{4\pi\alpha}{3} \operatorname{Sp} \int \gamma_\mu \mathcal{G}(p+k) \Gamma^\mu(p+k,\, p;\, k)\, \mathcal{G}(p) \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{132.4}$$

---

[1]) Излагаемая постановка вопроса и результаты принадлежат *Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосову* и *И. М. Халатникову* (1954).

(см. (107.4)). Поскольку функция $\mathcal{P}(k^2)$ калибровочно-инвариантна, при ее вычислении можно выбрать любую калибровку для величин $\mathcal{G}$ и Г. Наиболее удобна для этой цели калибровка Ландау, в которой пропагатор свободных фотонов имеет вид (76.11):

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{132.5}$$

($D^{(l)} = 0$ в (103.17)). Оказывается, что в такой калибровке ряды теории возмущений для $\mathcal{G}$ и Γ^μ вообще не содержат членов с нужными степенями логарифмов. Поэтому в (132.4) достаточно подставить для $\mathcal{G}$ и Γ^μ их нулевые приближения: $\mathcal{G} = G$, $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$. Тогда выражение (132.4) сводится к интегралу

$$\mathcal{P}(k^2) = i\frac{4\pi\alpha}{3}\,\mathrm{Sp}\int \gamma_\mu G(p+k)\gamma^\mu G(p)\frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \tag{132.6}$$

Это — интеграл Фейнмана, отвечающий диаграмме (113.1) первого (по α) приближения, который и приводит (после соответствующей перенормировки) к формуле (132.1).

Приступая к доказательству сделанных утверждений, проследим прежде всего за происхождением логарифма в интеграле (132.6). Легко видеть, что логарифмический член возникает от области интегрирования

$$p^2 \gg |k^2| \quad \text{при} \quad |k^2| \gg m^2. \tag{132.7}$$

Действительно, формально разлагая G по степеням $1/(\gamma p)$, имеем

$$G(p) \approx \frac{1}{\gamma p} = \frac{\gamma p}{p^2},$$

$$G(p-k) \approx \frac{1}{\gamma p - \gamma k} \approx \frac{1}{\gamma p} + \frac{1}{\gamma p}\gamma k\frac{1}{\gamma p} + \frac{1}{\gamma p}\gamma k\frac{1}{\gamma p}\gamma k\frac{1}{\gamma p} =$$
$$= \frac{\gamma p}{p^2} + \frac{(\gamma p)(\gamma k)(\gamma p)}{(p^2)^2} + \frac{(\gamma p)(\gamma k)(\gamma p)(\gamma k)(\gamma p)}{(p^2)^3}.$$

При подстановке в (132.6) первый член, не зависящий от k, выпадает в результате регуляризации (в соответствии с условием $\mathcal{P}/k^2 \to 0$ при $k^2 \to 0$). Второй член обращается в нуль при интегрировании по направлениям p. Третий же интеграл логарифмически расходится по p^2; взяв его в пределах от $p^2 \sim |k^2|$ (нижний предел области (132.7)) до некоторого вспомогательного «параметра обрезания» Λ^2, получим

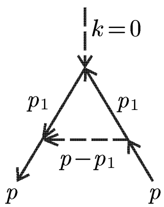
$$-\frac{\alpha}{3\pi}k^2\ln\frac{\Lambda^2}{|k^2|}. \tag{132.8}$$

Для регуляризации следует вычесть из $\mathcal{P}/k^2$ его значение при $k^2 = 0$. Но поскольку логарифмическая точность предполагает

условие $|k^2| \gg m^2$, при вычислении с этой точностью регуляризация осуществляется вычитанием значения при $|k^2| \sim m^2$, в результате чего Λ^2 в аргументе логарифма заменяется на m^2 и мы приходим к (132.1).

Так как интересующие нас поправки в $\mathcal{G}$ и Γ^μ имеют логарифмический характер, то с их учетом $\mathcal{G}$ и Γ^μ будут отличаться от G и γ^μ медленно меняющимися логарифмическими множителями. Поэтому и в точном интеграле (132.4) будет существенна та же область (132.7), что и в приближенном интеграле (132.6). Тем не менее положить просто $k = 0$ в $\Gamma^\mu(p+k,\, p;\, k)$ нельзя: ввиду квадратичной расходимости интеграла его регуляризация требует рассмотрения также и двух следующих членов разложения $\Gamma^\mu(p+k,\, p;\, k)$ по степеням k. Мы, однако, ограничимся здесь обсуждением поправок к $\Gamma^\mu(p,\, p,\, 0)$, достаточно ясно демонстрирующим роль выбора калибровки и различие в характере интегралов, возникающих от диаграмм разных типов. Отметим также, что в аналогичном исследовании для $\mathcal{G}$ нет необходимости, поскольку поправки в Γ и $\mathcal{G}$ связаны друг с другом тождеством Уорда (108.8).

Первой (по α) поправке к $\Gamma(p,\, p;\, 0)$ отвечает диаграмма



и соответственно интеграл [1])

$$\Gamma^{\mu(1)} = -i\alpha \int \gamma^\lambda G(p_1)\gamma^\mu G(p_1)\gamma^\nu D_{\lambda\nu}(p-p_1)\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}. \qquad (132.9)$$

В обычной калибровке имеем

$$D_{\lambda\nu}(p-p_1) = g_{\lambda\nu}\frac{4\pi}{(p-p_1)^2},$$

и в интеграле существенна область $p_1^2 \gg p^2$, в которой он логарифмически расходится. Вычислив интеграл

$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -4\pi i\alpha \int \frac{\gamma^\lambda(\gamma p_1)\gamma^\mu(\gamma p_1)\gamma_\lambda}{(p_1^2)^3}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \qquad (132.10)$$

[1]) Во избежание недоразумений при сравнении с результатами § 117 напомним, что в § 117 оба электронных конца диаграммы предполагались физическими, между тем как здесь предполагается $p \gg |k^2| \gg m^2$, т. е. обе линии заведомо не физические.

и регуляризовав логарифм, получим

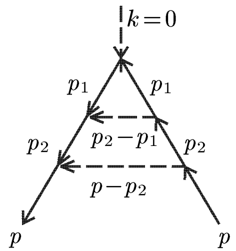
$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -\frac{\alpha}{4\pi}\gamma^\mu \ln\frac{p^2}{m^2}.$$

В калибровке же Ландау вместо (132.10) получим интеграл

$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -4\pi\alpha i \int \{\gamma^\lambda(\gamma p_1)\gamma^\mu(\gamma p_1)\gamma_\lambda - p_1^2\gamma^\mu\}\frac{d^4p_1}{(p_1^2)^3(2\pi)^4}.$$

Произведя усреднение по направлениям p_1 и приведение матриц γ, найдем, что этот интеграл обращается в нуль, так что логарифмический член в $\Gamma^{\mu(1)}$ выпадает [1]).

В поправках второго (по α) порядка рассмотрим диаграмму



Соответствующий интеграл:

$$\Gamma^{\mu(2)} = -\alpha^2 \int \gamma^\lambda G(p_2)\gamma^\nu G(p_1)\gamma^\mu G(p_1)\gamma^\rho G(p_2)\gamma^\sigma \times$$
$$\times D_{\nu\rho}(p_2 - p_1)D_{\lambda\sigma}(p - p_2)\frac{d^4p_1 d^4p_2}{(2\pi)^8}.$$

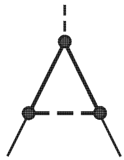
При обычной калибровке D-функций этот интеграл содержит член с квадратом логарифма, происходящий от области интегрирования

$$p_1^2 \gg p_2^2 \gg p^2. \tag{132.11}$$

Действительно, после пренебрежения p_2 в аргументе функции $D_{\nu\rho}(p_2 - p_1)$ интегрирование по d^4p_1 становится таким же, как в (132.9), и дает $\ln p_2^2$; последующее же интегрирование по d^4p_2 снова имеет логарифмический характер и приводит к квадрату $\ln(p_2^2/m^2)$. При выборе же для D-функций калибровки Ландау при обоих интегрированиях логарифмические члены выпадают.

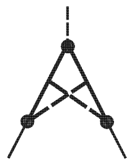
[1]) Поправки к G^{-1} в обеих калибровках, найденные из поправки $\Gamma^{(1)}$ с помощью тождества (108.8), согласуются, конечно, с результатами § 119.

Такая же ситуация имеет место для всех других диаграмм, входящих в скелетную диаграмму



(132.12)

Диаграммы же других типов, с пересекающимися фотонными линиями, например, входящие в скелетную диаграмму



(132.13)

(ср. (106.11)), вообще не содержат членов с нужной степенью логарифма ни в какой калибровке (в них нельзя выделить такую область значений переменных, в которой интеграл сводился бы к нескольким последовательным логарифмическим интегрированиям).

Эти рассуждения (и аналогичные для следующих членов разложения Γ по степеням k) подтверждают, что в калибровке Ландау не возникает поправок к $\mathcal{G}$ и Γ с нужными степенями логарифма, так что выражение (132.1) действительно справедливо и при условии (132.3).

Функция $\mathcal{D}(k^2)$, соответствующая поляризационному оператору (132.1), имеет вид

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2}\frac{1}{1-\dfrac{\alpha}{3\pi}\ln\dfrac{|k^2|}{m^2}}. \tag{132.14}$$

В силу условия (132.3) разлагать это выражение по степеням α нет необходимости.

§ 133. Связь между «затравочным» и истинным зарядами

Применимость формулы (132.14) ограничена, однако, со стороны больших $|k^2|$ в связи с уменьшением ее знаменателя. Действительно, вывод этой формулы основан на пренебрежении диаграммой (132.13) (и другими, с еще большим числом жирных фотонных линий) по сравнению с диаграммой (132.12). Но добав-

ление каждой такой линии привносит в диаграмму множитель $e^2\mathcal{D}$ с точным пропагатором $\mathcal{D}$. При этом роль малого параметра играет, вместо $\alpha = e^2$, величина

$$\frac{\alpha}{1 - \dfrac{\alpha}{3\pi}\ln\dfrac{|k^2|}{m^2}} \ll 1. \tag{133.1}$$

Когда, по мере возрастания $|k^2|$, эта величина по порядку сравнивается с единицей, из теории, по существу, вообще исчезает малый параметр.

Возникающую ситуацию можно понять более ясно, если при выводе (132.14) производить перенормировку не «на ходу», а путем предварительного введения «затравочного» заряда электрона e_c, который в дальнейшем подбирается так, чтобы привести к правильному наблюдаемому значению физического заряда e (см. § 110). Если интеграл «обрезается», как это было сделано выше, на вспомогательном верхнем пределе Λ^2, то затравочный заряд будет его функцией, $e_c = e_c(\Lambda^2)$, и в заключение должен быть произведен переход к пределу $\Lambda \to \infty$.

При таком способе подхода к задаче поляризационный оператор будет

$$\mathcal{P}(k^2) = -\frac{e_c^2}{3\pi}k^2\ln\frac{\Lambda^2}{|k^2|}$$

(выражение (132.8) с e_c вместо e), и соответственно

$$\mathcal{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2}\frac{1}{1 + \dfrac{e_c^2}{3\pi}\ln\dfrac{\Lambda^2}{|k^2|}}. \tag{133.2}$$

Определив теперь физический заряд e согласно условию

$$e_c^2\mathcal{D}(k^2) \to \frac{4\pi}{k^2}e^2, \quad k^2 \to\sim m^2,$$

получим

$$e^2 = \frac{e_c^2}{1 + \dfrac{e_c^2}{3\pi}\ln\dfrac{\Lambda^2}{m^2}}, \tag{133.3}$$

или

$$e_c^2 = \frac{e^2}{1 - \dfrac{e^2}{3\pi}\ln\dfrac{\Lambda^2}{m^2}}. \tag{133.4}$$

Если формально перейти в (133.3) к пределу $\Lambda \to \infty$, то $e^2 \to$ $\to 0$ независимо от вида функции $e_c^2(\Lambda)$. Такая «нулификация» заряда означает, разумеется, невозможность строгого проведения перенормировки. Этот переход к пределу нельзя, однако,

произвести, не нарушив предположений, сделанных при выводе (133.3). Из (133.4) видно, что по мере увеличения Λ (при заданном значении e^2) e_c^2 растет; но уже при $e_c^2 \sim 1$ формулы теряют свою применимость, поскольку их вывод основан на предположении

$$e_c^2 \ll 1 \tag{133.5}$$

как условия применимости теории возмущений к «затравочному» взаимодействию. Нарушение неравенства (133.5) при увеличении Λ имеет важное принципиальное значение. Оно означает логическую неполноту квантовой электродинамики как теории со слабым взаимодействием. По существу это означает логическую неполноту имеющейся теории вообще. Действительно, ее аппарат связан именно с возможностью рассматривать электромагнитное взаимодействие как слабое возмущение. Все вычисляемые величины получаются в теории в виде рядов по степеням e_c^2, причем эти ряды являются в действительности асимптотическими. Для придания этим рядам определенного смысла при не малых значениях e_c^2, во всяком случае, требовались бы дополнительные соображения, не следующие из общих принципов существующей теории.

В то же время следует подчеркнуть, что в квантовой электродинамике описанные трудности могут иметь лишь чисто теоретическое значение. Они возникают при фантастически огромных энергиях, не представляющих никакого реального интереса [1]). Можно ожидать, что в действительности уже несравненно раньше электромагнитные взаимодействия «запутываются» со слабыми и сильными взаимодействиями, в результате чего чистая электродинамика теряет смысл [2]).

В заключение этого параграфа покажем, каким образом формулы (133.3),(133.4) могут быть получены с помощью простых рассуждений, основанных на смысле понятия перенормировки и на соображениях размерности (*M. Gell-Mann, F. Low,* 1954).

Рассмотрим квадрат затравочного заряда как функцию параметра обрезания, $e_c^2(\Lambda^2)$, и введем функцию d, определяющую соотношение между значениями e_c^2 при двух различных значениях ее аргумента: $e_c^2(\Lambda_2^2) = e_c^2(\Lambda_1^2)d$. При $\Lambda_1^2,\ \Lambda_2^2 \gg m^2$ функция d не зависит от m, будучи безразмерной величиной, она может быть

---

[1]) Так, равенство $(\alpha/\pi)\ln(\varepsilon^2/m^2) = 1$ достигается при $\varepsilon \sim 10^{93}m$.

[2]) Противоположная ситуация имеет место в теориях, в которых взаимодействие между частицами осуществляется не электромагнитным полем, а так называемыми полями Янга–Миллса. Связь перенормированного заряда с затравочным в таких теориях дается формулой типа (133.4), но с обратным знаком в знаменателе, так что при заданном значении e затравочный заряд e_c уменьшается с ростом Λ. Такое свойство теории называют *асимптотической свободой.* Разумеется, теория с асимптотической свободой принципиально отличается от теории с нулификацией заряда.

функцией только безразмерных же величин $e_c^2(\Lambda_1^2)$ и Λ_2^2/Λ_1^2:

$$e_c^2(\Lambda_2^2) = e_c^2(\Lambda_1^2) d\left(e_c^2(\Lambda_1^2),\ \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2}\right). \tag{133.6}$$

От этого функционального соотношения можно перейти к дифференциальному уравнению. Для этого напишем равенство (133.6) для бесконечно близких значений Λ_1^2 и Λ_2^2. Обозначив $\Lambda_1^2 \equiv \xi$ и положив $\Lambda_2^2 = \xi + d\xi$, получим для функции $\alpha_c(\xi) \equiv e_c^2(\Lambda_1^2)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$d\alpha_c = \varphi(\alpha_c)\frac{d\xi}{\xi}. \tag{133.7}$$

Здесь введено обозначение

$$\varphi(\alpha_c) = \alpha_c\left[\frac{\partial d(\alpha_c,\ x)}{\partial x}\right]_{x=1} \tag{133.8}$$

и учтено, что, по определению (133.6), $d(\alpha_c,\ 1) \equiv 1$. Интегрируя уравнение (133.7) в пределах от $\xi = \Lambda_1^2$ до $\xi = \Lambda_2^2$, получаем

$$\ln\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2} = \int\limits_{e_c^2(\Lambda_1^2)}^{e_c^2(\Lambda_2^2)} \frac{d\alpha}{\varphi(\alpha)}. \tag{133.9}$$

Во всей области интегрирования e_c^2 мало. Поэтому можно воспользоваться для $\varphi(\alpha)$ выражением, отвечающим первому приближению теории возмущений. Поправка к затравочному заряду, e_c^2, дается величиной $e_c^2 k^2 \mathcal{P}(k^2)$. Взяв для поляризационного оператора его первое приближение (132.1), найдем

$$d\left(\alpha_c,\ \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2}\right) = 1 + \frac{\alpha_c}{3\pi}\ln\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2}, \quad \varphi(\alpha) = \frac{\alpha_c^2}{3\pi},$$

после чего интегрирование в (133.9) приводит к результату

$$\frac{1}{3\pi}\ln\frac{\Lambda_2^2}{\Lambda_1^2} = \frac{1}{e_c^2(\Lambda_1^2)} - \frac{1}{e_c^2(\Lambda_2^2)}. \tag{133.10}$$

При $\Lambda_1^2 \to\sim m^2$ затравочный заряд $e_c(\Lambda_1^2)$ стремится к истинному заряду e, и тогда (133.10) совпадает с (133.3),(133.4). [1])

[1]) Систематическое развитие метода, основанного на использовании функциональных свойств пропагаторов и вершинных частей (так называемый метод ренормализационной группы), дано в книге: *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1984.

§ 134. Асимптотическое поведение амплитуд рассеяния при высоких энергиях

Рассмотрим вопрос об асимптотическом (при высоких энергиях) поведении амплитуд и сечений двухчастичных процессов рассеяния ($1 + 2 \to 3 + 4$). Для основных электродинамических процессов в первом (по α) неисчезающем приближении ответ на этот вопрос может быть найден, исходя из полученных в предыдущих главах конкретных формул, справедливых при любых энергиях. Здесь, однако, мы рассмотрим этот вопрос с более общей точки зрения, которая позволит находить такие асимптотики прямым способом.

Как и в § 66, введем инвариантные переменные

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 \tag{134.1}$$

(причем $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$); обозначения соответствуют реакциям в s-канале, которые мы и будем рассматривать. В ультрарелятивистском случае, когда энергии много больше масс частиц, в системе центра инерции энергии обеих частиц приближенно одинаковы. Обозначив через ε сумму энергий сталкивающихся частиц, получим в этой системе $p_1 = (\varepsilon/2,\ \mathbf{p}_1)$, $p_2 = (\varepsilon/2,\ -\mathbf{p}_1)$, $p_3 = (\varepsilon/2,\ \mathbf{p}_3)$, $p_4 = (\varepsilon/2,\ -\mathbf{p}_3)$, $\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_3^2 = \varepsilon^2/4$, и тогда

$$s = \varepsilon^2, \quad t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta), \quad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta), \tag{134.2}$$

где θ — угол между $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$.

Рассмотрим сначала асимптотику сечения реакции при некотором фиксированном значении угла рассеяния θ. Тогда все три переменные s, t, u пропорциональны друг другу и устремляются к бесконечности вместе. В ультрарелятивистском случае массы частиц не могут войти в ответ, и единственной величиной размерности длины является $1/\varepsilon\,(= \hbar c/\varepsilon)$. Поэтому уже из соображений размерности следует, что дифференциальное сечение двухчастичных реакций уменьшается с ростом энергии по асимптотическому закону

$$d\sigma/do \propto 1/s \quad \text{при} \quad s, |t|, |u| \to \infty. \tag{134.3}$$

Если относить сечение не к элементу телесного угла do, а к дифференциалу dt, то (поскольку $do \propto dt/s$)

$$d\sigma/dt \propto 1/s^2. \tag{134.4}$$

Сечение выражается через амплитуду рассеяния (в ультрарелятивистском случае) как $d\sigma/dt \propto |M_{fi}|^2/s$ — см. (64.22),(64.23). Поэтому закон (134.3) означает, что в асимптотическом пределе амплитуда рассеяния не зависит от s:

$$M_{fi} = \text{const}. \tag{134.5}$$

Как ясно из характера вывода, эти результаты относятся не только к первому неисчезающему, но и к высшим (т. е. с учетом радиационных поправок) приближениям теории возмущений, если только не обращать внимания на логарифмические (вида $\ln(s/m^2)$) множители; зависимость от безразмерных логарифмов, разумеется, не может быть выяснена из соображений размерности [1].

Иная ситуация возникает, если увеличивать s при фиксированном t, т. е. при фиксированном квадрате передаваемого импульса. Другими словами, рассматривается рассеяние на малые, убывающие с ростом энергии углы:

$$s \to \infty, \quad |t| \sim s\theta^2 = \text{const}, \quad \theta \sim (|t|/s)^{1/2}. \qquad (134.6)$$

В таком случае соображения размерности позволяют утверждать лишь, что суммарная степень $1/s$ и $1/t$ в $d\sigma/dt$ равна 2 (а в амплитуде M_{fi} — нулю) [2]. Поэтому для нахождения наименее быстро убывающей с ростом s части сечения надо выделить множитель, зависящий от $1/t$ в наибольшей степени. Но такие множители возникают, лишь если фейнмановскую диаграмму можно разделить между концами *1*, *3* и *2*, *4* на две части путем пересечения линий виртуальных частиц. Суммарный 4-импульс таких линий равен $p_1 - p_3$, от чего и возникает зависящий от $t = (p_1 - p_3)^2$ множитель. Таким образом, асимптотика диаграммы в области (134.6) зависит от характера возможных пересечений диаграммы в t-канале.

Аналогичным образом асимптотика в области

$$s \to \infty, \quad |u| \sim s(\pi - \theta)^2 = \text{const}, \quad |\pi - \theta| \sim (|u|/s)^{1/2}, \qquad (134.7)$$

отвечающая рассеянию на углы, близкие к π, определяется характером возможных пересечений диаграммы в u-канале (т. е. между концами *1*, *4* и *2*, *3*).

Простейший пример — рассеяние электрона на электроне, описывающееся диаграммами (73.13) и (73.14). Из них рассечение в t-канале по линии виртуального фотона допускает первая; она и определит асимптотическое поведение амплитуды рассеяния в области (134.6). Линии виртуального фотона отвечает D-функция, пропорциональная $1/t$. Поэтому асимптотики ам-

---

[1] Суммирование рядов, содержащих логарифмические поправки, может привести к экспоненциальной зависимости от логарифмов, что означает изменение показателя степенной зависимости. Это изменение, однако, мало в силу малости α.

[2] Значение $|t| \gg m^2$ здесь мы предполагаем постоянным. Получающиеся таким образом результаты остаются справедливыми — в смысле зависимости от s (т. е. от энергии) — и при $|t| \sim m^2$.

плитуды и дифференциального сечения рассеяния:

$$M_{fi} \propto s/t, \quad d\sigma \propto dt/t^2. \tag{134.8}$$

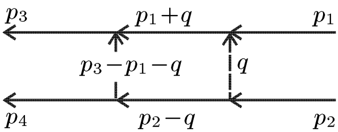
Асимптотика же в пределе (134.7) (вблизи направления назад) определяется «обменной» диаграммой (73.14); в этом пределе

$$M_{fi} \propto s/u, \quad do \propto du/u^2.$$

В случае взаимного рассеяния различных частиц (электрон и мюон) обменная диаграмма отсутствует; поэтому для него сечение рассеяния на углы $\theta \approx \pi$ убывает по закону (134.3),(134.4) [1]).

Покажем, что эти результаты для асимптотики рассеяния электрона на электроне не меняются и при учете радиационных поправок. Для этого рассмотрим поправки различного рода к диаграмме (73.13).

Мы уже видели, что диаграммы, представляющие собой поправки к внутренней D-функции (см. (113.11)) или к вершинным частям (см. (117.1)), приводят лишь к логарифмическим поправкам в амплитуде; они не меняют степенной зависимости (134.8). Покажем, что то же самое относится к диаграмме, допускающей рассечение по двум (вместо одной) внутренним фотонным линиям:



(134.9)

Соответствующая этой диаграмме амплитуда рассеяния отличается от амплитуды, отвечающей диаграмме (73.13), заменой множителя $1/t$ на

$$\frac{(\gamma(p_1+q))(\gamma(p_2-q))}{(p_1+q)^2(p_2-q)^2q^2(p_3-p_1-q)^2}\, d^4q$$

с последующим интегрированием по d^4q. Существенная область интегрирования — та, которая приводит в результате к наименьшей степени $1/s$. Для этого во всяком случае q должно быть мало по сравнению с p_1, p_2. Отбросив малые в этом смысле члены (а также члены $p_1^2 = p_2^2 = m^2$), перепишем это выражение как

$$\frac{(\gamma p_1)(\gamma p_2)}{(p_1q)(p_2q)q^2(p_3-p_1-q)^2}\, d^4q. \tag{134.10}$$

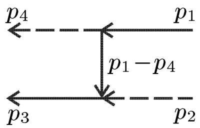
---

[1]) Все эти утверждения находятся, конечно, в согласии с результатами § 81 — см. (81.11) и задачу 6.

Знаменатель не будет содержать s, если q_0 и q_x (ось x — по направлению $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$) будут $\propto 1/\sqrt{s}$, а компоненты q_y, q_z могут быть $\propto 1/\sqrt{|\,t\,|}$; тогда область интегрирования $\propto 1/s$. Числитель же имеет порядок величины $p_1p_2 \propto s$. Таким образом, замена одной внутренней фотонной линии в диаграмме двумя не меняет ее зависимости от s (при заданном t [1])). Другими словами, вклад диаграммы (134.9) в амплитуду рассеяния следует тому же асимптотическому закону (134.8), что и вклад основной диаграммы. Положение не изменится при добавлении в диаграмме еще и других параллельных внутренних фотонных линий, а также при введении поправок к внутренним электронным линиям.

Этот результат имеет общий характер: всякой диаграмме, которая может быть разрезана в t-канале или в u-канале на две части путем пересечения любого числа внутренних фотонных линий, отвечает вклад в амплитуду с асимптотикой соответственно $M_{fi} \propto s/t$ при $t = \text{const}$ или s/u при $u = \text{const}$ (*В. Г. Горшков, В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, Г. В. Фролов,* 1967; *H. Cheng, T. T. Wu,* 1969).

В качестве другого примера рассмотрим комптоновское рассеяние, описываемое двумя диаграммами (74.14). Эти диаграммы не допускают рассечения в t-канале, но вторая из них рассекается в u-канале по внутренней электронной линии; в обозначениях этого параграфа она имеет вид



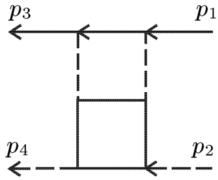
(134.11)

Это значит, что рассеяние сосредоточено в основном вблизи направления назад (как это уже было отмечено в конце § 86; см. (86.20)). Для нахождения асимптотики в этой области замечаем, что множитель G, отвечающий внутренней линии диаграммы (134.11), имеет порядок величины $1/\gamma(p_1 - p_4) \propto 1/\sqrt{|u|}$. Поэтому амплитуда рассеяния $M_{fi} \propto \alpha(s/|u|)^{1/2}$; в нее введен множитель α в соответствии с тем, что диаграмма (134.10) — второго порядка. Отсюда дифференциальное сечение: $d\sigma/du \propto \alpha^2/|u|s$. Интеграл этого выражения по $|u|$ определяется областью значений $|u| \ll s$. В результате полное сечение убывает с

[1]) Снова напомним, что речь идет только о степенных асимптотиках, и потому можно не обращать внимания на логарифмические расходимости при интегрировании. Мы вернемся к более подробному исследованию диаграмм вида (134.9) в § 137.

ростом энергии по закону $\sigma \propto \alpha^2/s$ (точнее, $\sigma \propto (\alpha^2/s)\ln(s/m^2)$); ср. (86.20)) [1]).

Но для этого процесса радиационные поправки меняют асимптотику. Изменение возникает за счет диаграмм шестого порядка типа



(134.12)

Они допускают в t-канале рассечение по двум внутренним фотонным линиям и потому дают вклад в амплитуду с асимптотикой $M_{fi} \propto \alpha^3 s/t$ множитель α^3 отвечает шестому порядку диаграммы. При достаточно больших s эта часть амплитуды становится основной и тогда дифференциальное сечение

$$d\sigma/dt \propto \alpha^6/t^2.$$

Интеграл этого выражения по t определяется областью малых значений $|t| \sim m^2$, т. е. областью углов рассеяния $\theta \sim m/\sqrt{s}$ (обратим внимание на то, что рассеяние происходит теперь в основном в направлении вперед, а не назад). В результате полное сечение перестает убывать с энергией:

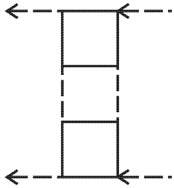
$$\sigma \propto \alpha^6/m^2 = \alpha^4/r_e^2. \tag{134.13}$$

Убывающая часть сечения сравнивается с этой его постоянной частью $\varepsilon = \sqrt{s} \propto m/\alpha^2$.

Аналогичная ситуация имеет место для рассеяния света на свете. В первом неисчезающем приближении оно описывается «квадратными» диаграммами (127.1), которые могут быть рассечены по двум внутренним электронным линиям. По 4-импульсу этих линий в диаграмме производится интегрирование, причем существенны импульсы $\sim \sqrt{s}$, и малые значения t (или u) ничем не выделены. Поэтому асимптотика этих диаграмм при любом $t = \text{const}$ (или $u = \text{const}$) дается законом (134.5): $M_{fi} = \text{const} \propto \alpha^2$. При этом полное сечение убывает с ростом энергии: $\sigma \propto \alpha^4/s$ (ср. (127.23)); углы, близкие к нулю или к π, здесь никак не выделены. Но в восьмом порядке появляются диаграммы, допускающие рассечение (в t- или в u-канале) по двум

[1]) Точный вид зависимости сечения от $|u|$ или $|t|$ при их значениях $\lesssim m^2$, разумеется, не может быть выяснен на основании излагаемых соображений. Подразумевается, что интеграл по $|u|$ (или по $|t|$) сходится на значениях $\sim m^2$. Это действительно так для всех процессов, за исключением упругого рассеяния заряженных частиц.

внутренним фотонным линиям, например,



(134.14)

Эти диаграммы приводят к постоянной асимптотике сечения: $\sigma \propto \alpha^8/m^2$ при $\sqrt{s} \gg m/\alpha^2$ [1]).

Постоянная асимптотика для полного сечения — характерное свойство процессов рассеяния, диаграммы которых рассекаются (в t- или в u-канале) по внутренним фотонным линиям. Это свойство имеет место и в тех случаях, когда в конечном состоянии реакции возникает более двух частиц.

§ 135. Выделение дважды логарифмических членов в вершинном операторе

Поправки вида $(\alpha L)^n$ (L — большой логарифм) могут стать существенными, как уже было отмечено в конце § 133, лишь при фантастически высоких энергиях и потому имеют только теоретическое значение. Но в амплитудах реальных процессов рассеяния возникают также и гораздо большие поправки — вида $(\alpha L^2)^n$. Такие члены, содержащие по квадрату логарифма на каждую степень α, называют дважды логарифмическими.

Характерным параметром разложения в дважды логарифмических поправках является величина

$$\frac{\alpha}{\pi}\ln^2\frac{\varepsilon^2}{m^2}, \tag{135.1}$$

где ε — фигурирующие в задаче энергии (скажем, суммарная энергия сталкивающихся частиц в системе их центра инерции). Условие применимости теории возмущений требует малости этой величины; оно нарушается при энергиях

$$\varepsilon \sim m\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) \sim 3\cdot 10^4 m. \tag{135.2}$$

[1]) Сечение когерентного рассеяния фотона в поле ядра имеет постоянную асимптотику уже в первом неисчезающем приближении, описываемом «квадратными» диаграммами, два из концов которых — линии внешнего поля (см. (128.7)). В действительности, однако, эти диаграммы должны были бы изображаться в виде (134.12), где верхняя сплошная линия была бы линией ядра. Линии внешнего поля становятся тогда внутренними линиями диаграммы и происхождение постоянной асимптотики становится очевидным.

Поставим себе целью освободиться от этого условия и получить формулы, применимые при условии

$$\frac{\alpha}{\pi}\ln^2\frac{\varepsilon^2}{m^2} \lesssim 1. \tag{135.3}$$

Ясно, что это потребует суммирования бесконечного ряда поправок всех степеней $(\alpha L^2)^n$.

Дважды логарифмические поправки возникают в двух категориях случаев. К одной из них относятся процессы рассеяния на фиксированный конечный угол; их сечения (как мы видели в предыдущем параграфе) всегда падают в асимптотической области высоких энергий. Дважды логарифмические поправки в этих случаях тесно связаны с инфракрасной расходимостью. Сюда относится, в частности, упругое рассеяние электрона во внешнем кулоновом поле; в § 122 была найдена первая дважды логарифмическая поправка к его сечению. Полному определению этих поправок при условии (135.3) посвящены этот и следующий параграфы.

К другой категории относятся убывающие с ростом энергии сечения реакций при заданном квадрате передачи импульса, т. е. для углов, асимптотически приближающихся к нулю или к π; как было показано в предыдущем параграфе, это имеет место для процессов, диаграммы которых не могут быть рассечены в t- или в u-канале по внутренним фотонным линиям. В этом случае дважды логарифмические поправки не связаны с инфракрасной расходимостью. В качестве такого рода примера в § 137 будет рассмотрено электрон-мюонное рассеяние назад, т. е. при $u = \mathrm{const}$.

Отметим прежде всего, что при условии (135.3) однологарифмические поправки

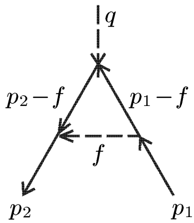
$$\sim \frac{\alpha}{\pi}\frac{\varepsilon^2}{m^2} \lesssim \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \ll 1$$

и потому могут быть опущены. Поскольку в $\mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$ дважды логарифмические поправки вообще отсутствуют, эти функции можно полагать теперь равными просто их невозмущенным значениям G и D.

Вычисление же вершинного оператора Γ требует суммирования дважды логарифмических членов, возникающих из бесконечного ряда диаграмм. Этой задаче посвящен следующий параграф. Предварительно же изложим метод, позволяющий выделять дважды логарифмические члены из отдельных интегралов Фейнмана до фактического проведения в них интегрирования по всем переменным (*В. В. Судаков,* 1956).

Рассмотрим поправку первого (по α) порядка к вершинному оператору, изображаемому диаграммой (117.1), которую удобно

изобразить здесь (переобозначив переменные) в виде



(135.4)

или, аналитически,

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = \\ = -\frac{ie^2}{4\pi^3}\int \frac{\gamma^\nu(\gamma p_2 - \gamma f + m)\gamma^\mu(\gamma p_1 - \gamma f + m)\gamma_\nu d^4 f}{[(p_2-f)^2 - m^2 - i0][(p_1-f)^2 - m^2 + i0][f^2 + i0]}. \quad (135.5)$$

Будем предполагать, что

$$|q^2| \gg p_1^2,\, p_2^2,\, m^2, \quad (135.6)$$

причем концы p_1, p_2 могут быть как физическими, так и виртуальными. Из (135.6) следует, что

$$|p_1 p_2| \approx {}^1\!/_2 |q^2| \gg p_1^2,\, p_2^2,\, m^2, \quad (135.7)$$

т. е. 4-векторы p_1, p_2 имеют большие компоненты при малых квадратах — ситуация, возможная в силу псевдоевклидовости четырехмерной метрики. Дважды логарифмические члены возникают именно при условиях (135.6).

Мы увидим в дальнейшем, что при интегрировании по $d^4 f$ будут существенны относительно малые значения f. Поэтому можно пренебречь f в числителе подынтегрального выражения, после чего $\Gamma^{(1)}$ приобретает вид

$$\Gamma^{\mu(1)} = -\frac{ie^2}{4\pi^3}\gamma^\nu(\gamma p_2 + m)\gamma^\mu(\gamma p_1 + m)\gamma_\nu I_1, \quad (135.8)$$

где

$$I_1 = \int \frac{d^4 f}{[(p_2-f)^2 - m^2 + i0][(p_1-f)^2 - m^2 + i0][f^2 + i0]}. \quad (135.9)$$

Матричный множитель в (135.8) можно упростить, если учесть, что Γ всегда входит в диаграммы, по существу, умноженным на матрицы $(\gamma p_2 + m)$ и $(\gamma p_1 + m)$:

$$(\gamma p_2 + m)\Gamma(\gamma p_1 + m). \quad (135.10)$$

Действительно, если линии p_1 и p_2 виртуальные, то множители происходят от $G(p_1)$ и $G(p_2)$; если же линии отвечают реальным

электронам, то Γ умножается на $\overline{u}_2$, и u_1, причем в силу уравнений Дирака имеем

$$\overline{u}_2 = \overline{u}_2 \frac{\gamma p_2 + m}{2m}, \quad u_1 = \frac{\gamma p_1 + m}{2m} u_1.$$

Переставляя порядок матричных множителей и пренебрегая каждый раз, согласно условию (135.7), возникающими квадратами p_1^2, p_2^2, m^2 по сравнению с $(p_1 p_2)$, получаем

$$(\gamma p_2 + m)\Gamma^{\mu(1)}(\gamma p_1 + m) \approx -\frac{ie^2}{\pi^3}(p_1 p_2)(\gamma p_2 + m)\gamma^\mu(\gamma p_1 + m)I_1.$$

Поэтому окончательно можно представить $\Gamma^{(1)}$ в виде

$$\Gamma^{\mu(1)} = \frac{ie^2}{2\pi^3}\gamma^\mu t I_1, \tag{135.11}$$

где

$$t = q^2 \approx -2(p_1 p_2). \tag{135.12}$$

Отметим, что интеграл I_1 сходится при больших f и потому уже не требует регуляризации.

Основной пункт дальнейших вычислений — введение новых, более удобных переменных интегрирования.

Разобьем f на составляющие, тангенциальные и нормальные по отношению к плоскости p_1, p_2:

$$f = u p_1 + v p_2 + f_\perp \equiv f_{||} + f_\perp, \tag{135.13}$$

$$f_\perp p_1 = f_\perp p_2 = 0. \tag{135.14}$$

В качестве же новых переменных выберем коэффициенты u, v и величину

$$\rho = -f_\perp^2. \tag{135.15}$$

Из условий (135.7) видно, что метрика в плоскости $p_1 p_2$ псевдоевклидова. Поэтому временную ось можно выбрать в этой плоскости, так что $f_\perp$ — пространственноподобный 4-вектор и $\rho > 0$.

Обозначим временно индексами 0, x компоненты 4-векторов в плоскости $p_1 p_2$, а индексами y, z — компоненты в нормальной плоскости. Для преобразования элемента 4-объема $d^4 f = d^2 f_\perp d^2 f_{||}$ к новым переменным пишем

$$d^2 f_\perp = |\mathbf{f}_\perp| d|\mathbf{f}_\perp| d\varphi = {}^1\!/\!_2 d\rho\, d\varphi \to \pi d\rho$$

(имея в виду, что подынтегральное выражение в (135.9) не зависит от угла φ). Далее,

$$d^2 f_{||} = \left|\frac{\partial(f_0, f_x)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv = |p_{10}p_{2x} - p_{20}p_{1x}| du\, dv \approx \frac{1}{2}|q^2| du\, dv.$$

Действительно, ввиду малости квадрата p_2^2 имеем $p_{2x}^2 \approx p_{20}^2$, и поэтому

$$(p_{10}p_{2x} - p_{20}p_{1x})^2 \approx (p_{10}p_{20} - p_{2x}p_{1x})^2 = (p_1p_2)^2 = (q^2/2)^2.$$

Таким образом,

$$d^4f = \frac{1}{2}|\,t\,|du\,dv\,d^2f_\perp^2 \to \frac{\pi}{2}|\,t\,|du\,dv\,d\rho. \tag{135.16}$$

Дальнейшие вычисления зависят от соотношения между величинами p_1^2, p_2^2, m^2. Рассмотрим два случая.

Случай виртуальных электронных линий. Пусть импульсы p_1, p_2 отвечают виртуальным электронам, причем

$$|p_1^2|,\ |p_2^2| \gg m^2. \tag{135.17}$$

Мы увидим, что основной областью интегрирования, приводящей к дважды логарифмическому выражению, является в этом случае область, определяемая неравенствами

$$0 < \rho \ll |tu|,\ |tv|; \quad \left|\frac{p_1^2}{t}\right| \ll |v| \ll 1; \quad \left|\frac{p_2^2}{t}\right| \ll |u| \ll 1. \tag{135.18}$$

Соответственно этому в знаменателе подынтегрального выражения в (135.9) можно пренебречь m^2, p_1^2, p_2^2, f^2 по сравнению с (p_1f) или (p_2f), так что

$$I_1 = \int \frac{d^4f}{2(p_2f)\cdot 2(p_1f)(f^2 + i0)}. \tag{135.19}$$

Для величин же (p_1f), (p_2f), f^2 имеем

$$\begin{aligned} f^2 &= (up_1 + vp_2)^2 - \rho \approx -tuv - \rho,\\ 2(p_1f) &= 2p_1(up_1 + vp_2) \approx -tv,\\ &\qquad\qquad 2(p_2f) \approx -tu. \end{aligned}$$

Тогда

$$I_1 = -\frac{\pi}{2|\,t\,|}\int \frac{d\rho}{\rho + tuv - i0}\,\frac{du}{u}\,\frac{dv}{v}. \tag{135.20}$$

Согласно условиям (135.18) интегрирование по ρ производится в пределах от 0 до меньшего из $|tv|$ или $|tu|$ и дает

$$\int\limits_0^{\min\{|tu|,|tv|\}} \frac{d\rho}{\rho + tuv - i0} = \ln\min\left\{\frac{1}{|u|},\ \frac{1}{|v|}\right\} + \begin{cases} i\pi, & tuv < 0,\\ 0, & tuv > 0.\end{cases} \tag{135.21}$$

Логарифмическое же интегрирование по v производится в пределах от -1 до $-\left|p_1^2/t\right|$ и от $\left|p_1^2/t\right|$ до 1 (и аналогично по u). При подстановке ((135.21) в (135.20) интеграл по $du\,dv$ от первого члена обращается в нуль ввиду нечетности подынтегральной функции. Интегрирование же второго члена производится по интервалам значений u и v одинакового (при $t < 0$) или различного (при $t > 0$) знака. В обоих случаях области $v > 0$ и $v < 0$ дают (после интегрирования по u) одинаковый вклад, и в результате находим (знак интеграла совпадает со знаком t)

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t}\cdot 2\int\limits_{\left|p_2^2/t\right|}^{1}\frac{du}{u}\int\limits_{\left|p_1^2/t\right|}^{1}\frac{dv}{v} = \frac{i\pi^2}{t}\ln\left|\frac{t}{p_1^2}\right|\ln\left|\frac{t}{p_2^2}\right|. \qquad (135.22)$$

Наконец, подставив значение I_1 в (135.11), получим окончательно

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2,\, p_1;\, q) = -\frac{\alpha}{2\pi}\gamma^\mu \ln\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right|\ln\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|, \qquad (135.23)$$
$$|q^2| \gg |p_1^2|,\ |p_2^2| \gg m^2.$$

Случай физических электронных концов. Пусть теперь импульсы p_1, p_2 отвечают реальным электронам, так что

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2. \qquad (135.24)$$

В этом случае существенна область интегрирования

$$0 < \rho \ll |tu|,\ |tv|;\ 0 < |v|,\ |u| \ll 1. \qquad (135.25)$$

Поскольку $p_1^2 - m^2 = p_2^2 - m^2 = 0$, то пренебрегая p_1^2 и p_2^2 по сравнению с (p_1f) или (p_2f), снова приводим интеграл (135.9) к виду (135.19). Для устранения появляющейся в этом случае инфракрасной расходимости надо, однако, ввести еще в фотонный пропагатор конечную массу фотона $\lambda \ll m$ (ср. § 117):

$$I_1 = \int\frac{d^4f}{2(p_1f)\cdot 2(p_2f)(f^2-\lambda^2+i0)}. \qquad (135.26)$$

Далее, имеем

$$f^2 \approx -tuv - \rho, \quad 2(p_1f) \approx -tv + 2m^2u, \quad 2(p_2f) \approx -tu + 2m^2v,$$

так что

$$I_1 = -\frac{\pi}{2|\,t\,|}\int\frac{d\rho}{\rho + tuv + \lambda^2 - i0}\,\frac{du}{u-\tau v}\,\frac{dv}{v-\tau u},\ \tau = \frac{2m^2}{t} \ll 1. \quad (135.27)$$

После интегрирования по ρ (аналогичного (135.21)) находим

$$I_1 = -\frac{i\pi^2}{2|\,t\,|}\iint \frac{du}{u-\tau v}\frac{dv}{v-\tau u},$$

причем интегрирование производится при условии $tuv + \lambda^2 < 0$. Области $v > 0$ и $v < 0$ снова дают одинаковый вклад, и после интегрирования по u находим

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{t}\int\limits_0^1 dv \int\limits_{\delta/v}^1 \frac{du}{(u-\tau v)(v-\tau u)} = \frac{i\pi^2}{t}\int\limits_0^1 \ln\left|\frac{\tau\delta - v^2}{(\delta-\tau v^2)(\tau - v)}\right|\frac{dv}{v}, \tag{135.28}$$

где $\delta = \lambda^2/t,\ |\delta| \ll |\tau|$ и учтено, что $\tau| \ll 1$.

В интеграле (135.28) три области значений v приводят к дважды логарифмическим выражениям:

$$\text{I})|\tau| \ll v \ll 1, \quad \text{II})\sqrt{\delta/\tau} \ll v \ll |\tau|, \quad \text{III})\sqrt{\tau\delta} \ll v \ll \sqrt{\delta/\tau}.$$

(Для определенности считаем, что $\sqrt{\delta/\tau} \ll |\tau|$. Ответ от этого предположения не зависит.) Делая в каждой области соответствующие пренебрежения, получаем

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t}\left(\ln^2\frac{|\,t\,|}{m^2} + 4\ln\frac{|\,t\,|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right). \tag{135.29}$$

Наконец, подставив в (135.11), найдем окончательно

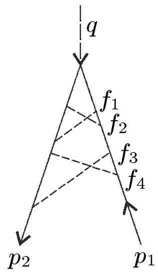
$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2,\, p_1;\, q) = -\frac{\alpha}{4\pi}\gamma^\mu\left(\ln^2\frac{|q^2|}{m^2} + 4\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right), \tag{135.30}$$
$$|q^2| \gg |p_1^2| = |p_2^2| = m^2,$$

что совпадает с (117.21).

§ 136. Дважды логарифмическая асимптотика вершинного оператора

Когда вычисленные в предыдущем параграфе поправки $\Gamma^{(1)}$ достигают значений порядка единицы, вычисление вершинного оператора требует суммирования всей бесконечной последовательности дважды логарифмических членов всех степеней по α. Решение этой задачи оказывается возможным благодаря тому, что такие члены возникают только от диаграмм определенного типа, а вклады диаграмм различного порядка оказываются связанными друг с другом простыми соотношениями.

Именно, дважды логарифмические члены возникают, как мы убедимся ниже, от всех диаграмм вида



(136.1)

и т. п., в которых каждая из фотонных линий соединяет правую и левую электронные линии; при этом они могут любым образом пересекаться друг с другом.

Перенумеруем фотонные импульсы f_1, f_2, ... в порядке следования, скажем, правых концов их линий. Тогда различные диаграммы одинакового порядка будут отличаться друг от друга перестановкой левых концов фотонных линий. В каждом интеграле Фейнмана производим пренебрежения в числителе и знаменателе, подобные тем, которые были сделаны в интеграле (135.5); после этого числитель преобразуем тем же способом, что и при выводе (135.11). В результате сумма всех диаграмм с n фотонными линиями, составляющая член $\sim\alpha^n$ в Γ, представится в виде

$$\Gamma^{\mu(n)} = \gamma^\mu \left(\frac{i\alpha}{2\pi^3} t\right)^n I_n, \tag{136.2}$$

$$I_n = \sum_{\text{пер}} \int\limits_2 d^4 f_1 \ldots d^4 f_n \times \\ \times \frac{1}{2(p_1 f_1)\cdot 2(p_1 f_1 + p_1 f_2)\ldots 2(p_1 f_1 + \ldots + p_1 f_n)\cdot 2(p_2 f_1)\ldots 2(p_2 f_1 + \ldots + p_2 f_n)} \times \\ \times \frac{1}{f_1^2 f_2^2 \ldots f_n^2}, \tag{136.3}$$

(сумма берется по всем перестановкам индексов у импульсов f_k в произведениях $(p_2 f_k)$; члены $i0$ и λ^2 в знаменателях для краткости не выписываем).

Очевидно, что если переставить в сумме (136.3) каким-либо образом индексы у множителей f_k в произведениях $(p_1 f_k)$, то это сведется лишь к переобозначению импульсов и потому не изменит значения I_n. Поэтому можно распространить суммирование в (136.3) по всем перестановкам множителей f_k как в произведениях $(p_2 f_k)$, так и в $(p_1 f_k)$, разделив после этого результат на $n!$.

Воспользуемся теперь важной формулой

$$\sum_{\text{пер}} \frac{1}{a_1(a_1+a_2)\ldots(a_1+a_2+\ldots+a_n)} = \frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}, \tag{136.4}$$

где сумма берется по перестановкам индексов 1, 2, ..., n [1]). Двукратное применение этой формулы сводит сумму интегралов к произведению n одинаковых интегралов вида (135.19) (или (135.26)), так что

$$I_n = I_1^n/n! \tag{136.5}$$

Подставив это в (136.2) и просуммировав $\Gamma^{(n)}$ по всем $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, получим окончательно

$$\Gamma^\mu(p_2,\, p_1;\, q) = \gamma^\mu \exp\left(\frac{ie^2}{2\pi^3} t I_1\right). \tag{136.6}$$

В частности, подставив сюда I_1 из ((135.22), получим дважды логарифмическую асимптотику вершинного оператора с виртуальными электронными концами

$$\Gamma^\mu(p_2,\, p_1;\, q) = \gamma^\mu \exp\left\{-\frac{\alpha}{2\pi}\ln\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right|\ln\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|\right\}, \tag{136.7}$$

$$|q^2| \gg |p_1^2|,\ |p_2^2| \gg m^2$$

(*В. В. Судаков,* 1956).

Подставив же I_1 из (135.29), найдем асимптотику для вершинного оператора в случае реальных электронных концов:

$$\Gamma^\mu(p_2,\, p_1;\, q) = \gamma^\mu \exp\left\{-\frac{\alpha}{4\pi}\left(\ln^2\frac{|q^2|}{m^2} + 4\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right)\right\}, \tag{136.8}$$

$$|q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2.$$

Множитель, отличающий Γ^μ от его невозмущенного значения γ^μ, определяет также и отличие амплитуды рассеяния электрона во внешнем поле от ее борновского значения. Поэтому сечение рассеяния

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Б}} \exp\left\{-\frac{\alpha}{2\pi}\left(\ln^2\frac{|q^2|}{m^2} + 4\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right)\right\}. \tag{136.9}$$

Для устранения инфракрасной расходимости надо, однако, еще умножить это выражение на сумму вероятностей испускания различного числа мягких фотонов с энергией, не превышающей некоторого малого $\omega_{\max}$, т. е. на величину (см. (122.2))

$$1 + \int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega + \frac{1}{2!}\int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_1}\int_0^{\omega_{\max}} dw_{\omega_2} + \ldots = \exp\left\{\int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega\right\}. \tag{136.10}$$

[1]) При $n = 2$ эта формула очевидна, а ее обобщение легко достигается индукцией от n к $n+1$.

Интеграл в экспоненте берем из (120.14) (выражение, стоящее множителем при $d\sigma_{\text{упр}}$) и в результате находим окончательно следующую асимптотическую формулу для сечения рассеяния электрона с энергией ε при большой передаче импульса:

$$d\sigma = d\sigma_{\text{Б}} \exp\left\{ -\frac{2\alpha}{\pi} \ln \frac{|q^2|}{m^2} \ln \frac{\varepsilon}{\omega_{\max}} \right\}, \tag{136.11}$$

$$|q^2| \gg m^2, \quad \frac{\alpha}{2\pi} \ln^2 \frac{\varepsilon}{m} \sim 1$$

(*А. А. Абрикосов,* 1956). Первый (по α) член разложения этого выражения совпадает, естественно, с формулой (122.12).

Обратим внимание на то обстоятельство, что если положить $\omega_{\max} \sim \varepsilon$, то один из логарифмов в (136.11) становится порядка единицы; другими словами, дважды логарифмические поправки сокращаются, если рассматривать сечение с одновременным испусканием фотонов любых энергий [1]. В принятом приближении экспоненциальный множитель в (136.11) обращается тогда в единицу, так что сечение оказывается совпадающим с борновским — в соответствии с общим утверждением в конце § 98.

§ 137. Дважды логарифмическая асимптотика амплитуды рассеяния электрона на мюоне

В качестве примера другого рода рассмотрим рассеяние электрона на отрицательном мюоне, причем ограничимся случаем рассеяния строго назад, т. е. на угол $\theta = \pi$ (*В. Г. Горшков, В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, Г. В. Фролов*, 1967). Этот процесс является простейшим с двух точек зрения. Во-первых, ввиду нетождественности обеих частиц отсутствуют обменные диаграммы. Во-вторых, при рассеянии назад сильно подавлено излучение мягких фотонов, в результате чего не возникает инфракрасной расходимости. Действительно, согласно (98.8), сечение испускания мягких фотонов

$$d\sigma = \alpha \left[\left(\frac{\mathbf{v}'_e}{1 - \mathbf{v}'_e \mathbf{n}} + \frac{\mathbf{v}'_\mu}{1 - \mathbf{v}'_\mu \mathbf{n}} - \frac{\mathbf{v}_e}{1 - \mathbf{v}_e \mathbf{n}} - \frac{\mathbf{v}_\mu}{1 - \mathbf{v}_\mu \mathbf{n}} \right) \mathbf{n} \right]^2 \frac{d\omega do_{\mathbf{n}}}{4\pi^2 \omega} d\sigma_{\text{упр}}, \tag{137.1}$$

где $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_\mu$ и $\mathbf{v}'_e$, $\mathbf{v}'_\mu$ — скорости частиц до и после столкновения. Но в ультрарелятивистском случае равенство импульсов равнозначно равенству скоростей, и с этой точностью имеем в системе

[1]) При рассеянии на конечный угол сформулированное в § 98 условие мягкости фотона требует только, чтобы было $\omega_{\max} \ll \varepsilon$, что позволяет с логарифмической точностью применять полученные здесь формулы и при $\omega_{\max} \sim \varepsilon$.

центра инерции при рассеянии назад $\mathbf{v}_e = -\mathbf{v}_\mu = -\mathbf{v}'_e = \mathbf{v}'_\mu$. В результате выражение (137.1) обращается в нуль.

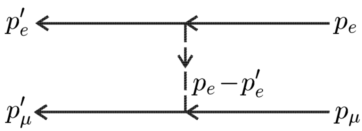
Если рассматриваемый процесс рассеяния отвечает s-каналу реакции, то в t-канале он переходит в процесс превращения электрон-позитронной пары в пару $\mu^+\mu^-$. В этом канале условие $\theta = \pi$ означает, что совпадают направления движения e^- и μ^- (и e^+ и μ^+). Подавление тормозного излучения в этом канале имеет особенно наглядный смысл, так как направление движения заряда каждого знака вообще не меняется.

Взаимное сокращение главных членов в сечении излучения приводит к тому, что в его асимптотике не возникают дважды логарифмические поправки. Соответственно не возникает (с той же дважды логарифмической точностью) инфракрасной расходимости и при интегрировании по импульсам виртуальных фотонов в амплитуде рассеяния.

Если описывать процесс с помощью инвариантных переменных $s = (p_e + p_\mu)^2$, $t = (p_e - p'_e)^2$, $u = (p_e - p'_\mu)^2$, то рассеянию назад в ультрарелятивистском случае будут отвечать значения

$$s = -t \gg m_\mu^2, \quad u = 0. \tag{137.2}$$

В первом (по α) приближении теории возмущений рассеяние электрона на мюоне описывается диаграммой



(137.3)

Соответствующая амплитуда:

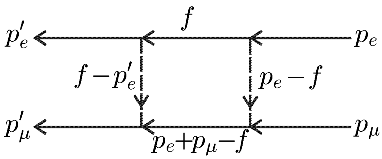
$$M_{fi}^{(1)} = \frac{4\pi\alpha}{t}(\overline{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\nu u^{(\mu)})(\overline{u}^{(e)\prime}\gamma_\nu u^{(e)}). \tag{137.4}$$

Переход к предельному случаю (137.2) в этом выражении осуществляется заменой матричного 4-вектора γ^ν его «проекцией» $\gamma_\perp^\nu$ на плоскость, нормальную плоскости p_e, p'_e (или, что то же, плоскости p_μ, p'_μ, поскольку при ультрарелятивистском рассеянии назад $p_e \approx p'_\mu$, $p'_e \approx p_\mu$). Действительно, параллельными плоскости p_e, p'_e составляющими являются матрицы

$$\frac{1}{\sqrt{s}}(\gamma p_e + \gamma p'_e), \quad \frac{1}{\sqrt{s}}(\gamma p_e - \gamma p'_e)$$

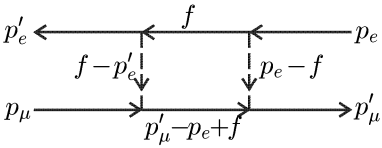
(первая совпадает с γ^0,а вторая равна $\mathbf{n}_e\boldsymbol{\gamma}$, где $\mathbf{n}_e$ — орт направления $\mathbf{p}_e$). Используя уравнения Дирака для биспиноров $u^{(e)}$ и $u^{(\mu)}$, находим, что $(\overline{u}^{(\mu)\prime}\gamma_{\|}^\nu u^{(\mu)})(\overline{u}^{(e)\prime}\gamma_{\nu\|} u^{(e)}) \sim 1/s$, и потому эти члены могут быть опущены.

В следующем приближении добавляется диаграмма



(137.5)

и диаграмма с «перекрещенными» фотонными линиями, которую удобно изобразить в виде, отличающемся от (137.5) лишь направлением одной из сплошных линий:



(137.6)

Исследование соответствующих интегралов показывает, что в обеих диаграммах возникают дважды логарифмические вклады от областей мягких виртуальных фотонов: $\left|\left(f-p_e\right)^2\right| \ll m_e^2$ или $\left|\left(f-p'_e\right)^2\right| \ll m_e^2$. Эти вклады связаны с инфракрасными расходимостями интегралов и, согласно сказанному выше, в данном случае заведомо должны взаимно сокращаться. В диаграмме (137.6) имеется, однако, дважды логарифмический вклад еще и от области больших импульсов: $|f^2| \gg m_\mu^2$. Именно этот вклад и должен быть вычислен.

Диаграмме (137.6) отвечает интеграл

$$M_{fi}^{(2)} = -i\frac{\alpha^2}{\pi^2}\int \frac{(\overline{u}^{(e)\prime}\gamma^\nu(\gamma f+m_e)\gamma_\lambda u^{(e)})(\overline{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\lambda(\gamma f+m_\mu)\gamma_\nu u^{(\mu)})}{(p'_e-f)^2(f^2-m_e^2)(f^2-m_\mu^2)(p_e-f)^2}d^4 f, \tag{137.7}$$

где уже учтено, что $p_e \approx p'_\mu$. Положим снова

$$f = up_e + vp'_e + f_\perp \tag{137.8}$$

(ср. (137.13)). Дважды логарифмический вклад возникает от области, определяемой неравенствами

$$|su|,\ |sv| \gg \rho \gg m_\mu^2; \quad m_\mu^2/s \ll |u|,\ |v| \ll 1, \tag{137.9}$$

где $\rho = -f_\perp^2$. В (137.8) 4-вектор $f_\perp$ определен так, что $f_\perp p_e = f_\perp p'_e = 0$; в данном случае (рассеяние назад) отсюда следует, что в системе центра инерции $f_\perp^0 = 0$, так что $\rho = \mathbf{f}_\perp^2$.

В числителе интеграла (137.7) можно пренебречь m_e, m_μ, а также всеми членами с u или v; множители u или v в числителе

сокращают соответствующие полюсы в знаменателе (см. ниже), в результате чего не возникают требуемые квадраты логарифмов. Замечая, что $(p'_e - f)^2 \approx tu \approx -su$, $(p_e - f)^2 \approx -sv$, $f^2 \approx suv - -\rho$, и преобразуя элемент интегрирования $d^4 f$, согласно (135.16), переписываем интеграл (137.7) в виде

$$M_{fi}^{(2)} = -i\frac{\alpha^2}{2\pi^2}\int \frac{(\overline{u}^{(e)\prime}\gamma^\nu(\gamma f_\perp)\gamma_\lambda u^{(e)})(\overline{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\lambda(\gamma f_\perp)\gamma_\nu u^{(\mu)})}{su\cdot sv(suv-\rho+i0)^2}s\,du\,dv\,d^2f_\perp.$$

Числитель подынтегрального выражения преобразуется далее путем усреднения по направлению $\mathbf{f}_\perp$ и замены (по тем же причинам, что и в (137.4)) γ^ν, γ^λ на $\gamma_\perp^\nu$, $\gamma_\perp^\lambda$. После простых преобразований получим

$$M_{fi}^{(2)} = M_{fi}^{(1)}J^{(1)}, \quad J^{(1)} = -i\frac{\alpha}{4\pi^2}\int\frac{\rho\,du\,dv\,d\rho}{uv(suv-\rho+i0)^2}. \tag{137.10}$$

Наконец, заменив в числителе тождественно $\rho \equiv (\rho - suv) + suv$, можно опустить второй член, который сократил бы простые полюсы и тем самым не дал бы дважды логарифмического вклада. Таким образом,

$$J^{(1)} = -i\frac{\alpha}{4\pi^2}\int\frac{du\,dv\,d\rho}{uv(\rho - suv - i0)}. \tag{137.11}$$

Этот интеграл по форме совпадает с (135.20), поэтому интегрирование по ρ производится тем же способом. Однако поскольку теперь $\rho \gg m_\mu^2$, возникает условие $suv \gg m_\mu^2$ (вместо $suv > 0$). В результате находим

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{du\,dv}{uv}, \tag{137.12}$$

причем область интегрирования ограничена неравенствами

$$m_\mu^2/s < u,\ v < 1 \quad suv > m_\mu^2$$

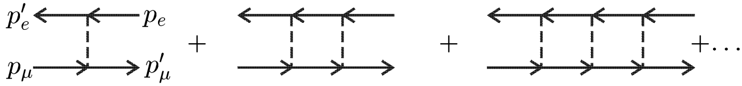
(при вычислении с логарифмической точностью сильные неравенства $\gg$ заменяются простыми неравенствами $>$). Прямое вычисление дает

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{4\pi}\ln^2\frac{s}{m_\mu^2}. \tag{137.13}$$

В более высоких приближениях теории возмущений интересующие нас вклады $\sim\alpha^n \ln^{2n} s$ получаются от аналогичных (137.6) диаграмм «лестничного» типа с большим числом «перекладин». Поэтому полная дважды логарифмическая асимптотика

амплитуды рассеяния дается бесконечной суммой

$iM_{fi} =$



(137.14)

Для установления общего вида членов этой суммы рассмотрим еще диаграмму третьего приближения (третий член ряда (137.14)). Соответствующий ей интеграл можно привести к виду

$$M_{fi}^{(3)} = M_{fi}^{(1)} J^{(2)}, \quad J^{(2)} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1\, dv_1\, du_2\, dv_2}{u_1 v_1 (u_1 + u_2)(v_1 + v_2)} \quad (137.15)$$

с областью интегрирования

$$m_\mu^2/s < u_{1,2},\ v_{1,2} < 1, \quad s u_1 v_1,\ s u_2 v_2 > m_\mu^2.$$

Дважды логарифмическую часть этого интеграла можно выделить, наложив на переменные интегрирования еще условия

$$v_2 \gg v_1, \quad u_2 \gg u_1. \quad (137.16)$$

Тогда

$$J^{(2)} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1\, dv_1\, du_2\, dv_2}{u_1 u_2 v_1 v_2} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int d\xi_1\, d\eta_1\, d\xi_2\, d\eta_2,$$

где $\xi_i = \ln(s u_i/m_\mu^2)$, $\eta_i = -\ln v_i$, а область интегрирования определена неравенствами

$$\xi_1 > \eta_1; \quad \xi_2 > \eta_2; \quad \sigma > \xi_2,\ \eta_2 > 0; \quad \sigma = \ln(s/m_\mu^2).$$

Аналогичным образом n-й член ряда может быть представлен в виде $M_{fi}^{(n)} = M_{fi}^{(1)} J^{(n)}$, где

$$J^{(n)}(\sigma) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int d\xi_1\, d\eta_1 \ldots d\xi_n\, d\eta_n, \quad (137.17)$$

с областью интегрирования

$$\xi_i > \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \sigma > \xi_n,\ \eta_n > 0. \quad (137.18)$$

Полная амплитуда рассеяния равна

$$M_{fi} = M_{fi}^{(1)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J^{(n)}(\sigma)\right]. \quad (137.19)$$

Для вычисления этой суммы введем теперь вспомогательные функции $A^{(n)}(\xi, \eta)$, которые даются теми же интегралами (137.17), но с областями интегрирования

$$\xi_i > \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad \xi > \xi_n > 0, \quad \eta > \eta_n > 0 \quad (137.20)$$

(различные пределы интегрирования по ξ_n и η_n вместо одинаковых в (137.18)). Очевидно, что $M_{fi} = M_{fi}^{(1)} A(\sigma, \sigma)$, где

$$A(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}(\xi, \eta), \quad A^{(0)} = 1. \tag{137.21}$$

Из определения функций $A^{(n)}(\xi, \eta)$ видно, что они удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$A^{(n)}(\xi, \eta) = \frac{\alpha}{2\pi} \int d\xi_1 \, d\eta_1 A^{(n-1)}(\xi_1, \eta_1),$$

а просуммировав эти равенства по n (от 1 до ∞), найдем интегральное уравнение, определяющее функцию $A(\xi, \eta)$:

$$A(\xi, \eta) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int A(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1, \tag{137.22}$$
$$\xi_1 > \eta_1, \quad \xi > \xi_1 > 0, \quad \eta > \eta_1 > 0.$$

Для дальнейшего будет достаточно рассмотреть функцию $A(\xi, \eta)$ в области $\xi > \eta$. Тогда уравнение (137.22) можно записать в виде

$$A(\xi, \eta) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\eta} \int_{\eta_1}^{\xi} A(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 \, d\eta_1. \tag{137.23}$$

Дифференцируя это равенство по η, имеем

$$\frac{\partial A(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\eta}^{\xi} A(\xi_1, \eta) d\xi_1, \tag{137.24}$$

а дифференцируя затем еще и по ξ, находим для $A(\xi, \eta)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \eta \, \partial \xi} - \frac{\alpha}{2\pi} A = 0. \tag{137.25}$$

Это уравнение должно быть решено с граничными условиями

$$A(\xi, 0) = 1, \quad \left.\frac{\partial A}{\partial \eta}\right|_{\xi = \eta} = 0, \tag{137.26}$$

непосредственно следующими из (137.23),(137.24).

Решение можно получить с помощью преобразования Лапласа по переменной ξ:

$$A(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{p\xi} Q(p, \eta) \, dp, \tag{137.27}$$

где контур C в плоскости комплексного p — замкнутая кривая, охватывающая точку $p = 0$. Подставив (137.27) в уравнение (137.25) и приравняв нулю подынтегральное выражение, получим

$$p\frac{\partial Q}{\partial \eta} = \frac{\alpha}{2\pi}Q, \quad Q = \varphi(p)\exp\frac{\alpha\eta}{2\pi p},$$

где $\varphi(p)$ — произвольная функция. Первое из граничных условий (137.26) дает теперь $\varphi(p) = 1/p + \psi(p)$, где $\psi(p)$ — аналитическая функция, не имеющая особенностей внутри контура C. Второму же условию (137.26) можно удовлетворить, положив $\psi(p) = -2\pi p/\alpha$; действительно, тогда

$$\frac{\partial A}{\partial \eta}\Big|_{\xi=\eta} = -\frac{1}{2\pi i\xi}\int\limits_C \frac{d}{dp}\exp\xi\left(p + \frac{\alpha}{2\pi p}\right)dp = 0.$$

Собрав полученные выражения и положив $\xi = \eta = \sigma$, найдем

$$A(\sigma,\, \sigma) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{2\pi}{\alpha\sigma}\int\limits_C p\frac{d}{dp}\exp\left[\sigma\left(p + \frac{\alpha}{2\pi p}\right)\right]dp.$$

Наконец, проинтегрировав по частям и воспользовавшись известной формулой

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \exp\left[\frac{z}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right)\right]dp$$

($I_1(z) = -iJ_1(iz)$ — функция Бесселя мнимого аргумента), получим окончательно для амплитуды рассеяния

$$M_{fi} = M_{fi}^{(1)}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\sigma^2}}I_1\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\sigma\right). \tag{137.28}$$

Сечение же рассеяния (на угол $\theta = \pi$) соответственно равно

$$d\sigma = d\sigma^{(1)}\frac{2\pi}{\alpha\ln^2(s/m_\mu^2)}I_1^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\ln\frac{s}{m_\mu^2}\right), \quad d\sigma^{(1)} = \frac{2\pi\alpha^2}{s^2}dt, \tag{137.29}$$

где $d\sigma^{(1)}$ — сечение в борновском приближении в ультрарелятивистском случае (см. задачу 6, § 81) [1]).

[1]) Дополнительные ссылки на работы по дважды логарифмическим асимптотикам можно найти в обзорной статье: *Горшков В. Г.*//УФН. — 1973. — Т. 110. — С. 45.

ГЛАВА XIV

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА АДРОНОВ

§ 138. Электромагнитные формфакторы адронов

До сих пор в этой книге речь шла о квантовой электродинамике частиц, не способных к сильным взаимодействиям, — электронов, позитронов и мюонов. Существует также большое число частиц, участвующих в сильных взаимодействиях; их называют *адронами* [1].

Адронами являются, например, протоны и нейтроны, имеющие спин $1/2$, π-мезоны со спином 0 и другие частицы. Адронами, разумеется, являются и атомные ядра, так как они состоят из протонов и нейтронов.

Построение исчерпывающей электродинамики адронов в рамках существующей теории невозможно. Ясно, что нельзя составить уравнений, определяющих электромагнитные взаимодействия адронов без учета значительно более интенсивных сильных взаимодействий.

В частности, без учета последних нельзя установить и явный вид адронного тока, с помощью которого должны описываться взаимодействия в квантовой электродинамике.

В этой ситуации адронный ток вводится как феноменологическая величина, структура которой устанавливается лишь исходя из общих кинематических требований, не связанных с какими-либо предположениями о динамике взаимодействий [2]. Оператор же электромагнитного взаимодействия будет иметь по-прежнему вид

$$e(\widehat{J}\widehat{A}), \tag{138.1}$$

где теперь ток обозначен прописной буквой J (в отличие от электронного тока j). Поскольку порядок величины этого взаимодействия задается тем же элементарным зарядом e, можно по-прежнему пользоваться методами теории возмущений [3].

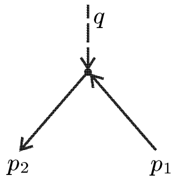
Установим вид тока перехода между двумя состояниями свободно движущегося адрона (не сопровождающегося каким-либо

[1] От греческого слова «хадрос», означающего крупный, массивный.

[2] Вопросы электродинамики адронов, связанные с кварковой моделью, в этой книге не рассматриваются.

[3] В этой главе e обозначает элементарный заряд ($e > 0$).

превращением самого адрона). Этот ток входит в «треххвостку»



(138.2)

которая сама может входить как часть в какую-либо более сложную диаграмму (например, упругого рассеяния электрона на адроне). Штриховая линия в диаграмме (138.2) изображает виртуальный фотон; она не может отвечать реальному фотону, так как свободная частица не может поглотить (или испустить) такой фотон. При этом $q^2 = (p_2 - p_1)^2 < 0$.

Рассмотрим сначала адрон со спином 0. Пусть u_1 и u_2 — волновые амплитуды начального и конечного состояний адрона, в которых он имеет 4-импульсы p_1 и p_2; для частицы со спином 0 эти амплитуды — скаляры (или псевдоскаляры) [1]. Адронный ток перехода J_{fi} между этими двумя состояниями должен быть билинеен по u_1, и u_2^*. Запишем его в виде

$$J_{fi} = u_2^* \Gamma u_1, \tag{138.3}$$

где 4-вектор Γ — неизвестный вершинный оператор (кружок на диаграмме (138.2)). Если положить $u_1 = u_2 = 1$, то будет просто $J_{fi} = \Gamma$.

Универсальным свойством тока в электродинамике, связанным с калибровочной инвариантностью теории, является его сохранение. В импульсном представлении оно выражается ортогональностью тока перехода 4-импульсу фотона $q = p_2 - p_1$:

$$qJ_{fi} = 0. \tag{138.4}$$

В данном случае это значит, что оператор Γ должен иметь вид

$$\Gamma = PF(q^2), \tag{138.5}$$

где $P = p_1 + p_2$, $F(q^2)$ — скалярная функция единственной инвариантной независимой переменной — квадрата q^2. Поскольку род адрона при переходе не меняется, то $p_1^2 = p_2^2 = M^2$ (M — масса адрона), и потому $Pq = 0$.

---

[1]) Напомним, что плоская волна записывается в виде $\psi = \dfrac{u}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ipx}$. Нормировке на одну частицу в единичном объеме отвечает (для частиц со спином 0) нормировка скаляра согласно $u^* u = 1$; при этом можно положить просто $u = 1$ (см. § 10). Мы определяем ниже ток перехода по отношению к амплитудам u_1, u_2 в соответствии со способом обозначений, принятым в § 64.

Матричные элементы (138.3) с Γ из (138.5) (а с ними и сам оператор J) — истинные 4-векторы. Поэтому оператор взаимодействия (138.1) — истинный скаляр. Таким образом, электромагнитное взаимодействие адронов со спином 0 оказывается P-инвариантным автоматически. Оно оказывается также и T-инвариантным. Действительно, обращение времени, во-первых, переставляет начальный и конечный 4-импульсы; при этом сумма $P = p_1 + p_2$ не меняется. Во-вторых, обращение времени меняет знак пространственных компонент 4-импульсов, не меняя их временных компонент; но таким же образом преобразуются и компоненты 4-потенциала A, так что произведение $\widehat{J}\widehat{A}$ не меняется.

Инвариантную функцию $F(q^2)$ называют *электромагнитным формфактором* адрона. В рамках феноменологической теории ее вид, разумеется, не может быть установлен. Можно, однако, утверждать, что эта функция вещественна (в рассматриваемой области $q^2 < 0$). Это следует из тех же соображений, которые были применены в § 116 к формфакторам электрона: при $q^2 < 0$ во всяком случае отсутствуют промежуточные состояния, которые могли бы фигурировать в правой стороне соотношения унитарности; поэтому матрица M_{fi}, а с нею и J_{fi} оказываются эрмитовыми.

При $q = 0$ начальное и конечное состояния совпадают, так что J_{fi} становится диагональным матричным элементом. В частности, $e(J^0)_{ii}/2\varepsilon_i = eF(0)$ есть плотность заряда, совпадающая (нормировка на одну частицу в единичном объеме!) с полным зарядом частицы Ze.

Для электрически нейтральной частицы $F(0) = 0$. Подчеркнем, однако, что это отнюдь не означает еще истинной нейтральности частицы. Если частица истинно нейтральна и обладает определенной зарядовой четностью, то $F(q^2) \equiv 0$ при всех q^2: так как оператор тока зарядово-нечетен (см. § 13), его матричные элементы между двумя состояниями одного и того же адрона равны нулю [1]).

Перейдем к адронам со спином 1/2. В этом случае волновые амплитуды u_1, u_2 — биспиноры и адронный ток имеет вид

$$J_{fi} = \overline{u}_2 \Gamma u_1. \tag{138.6}$$

[1]) Это не означает, конечно, что такой адрон вообще не взаимодействует с электромагнитным полем. Произведение двух операторов тока, $\widehat{J}(x)$, $\widehat{J}(x')$, уже зарядово-четно, и его матричные элементы отличны от нуля для переходов между состояниями с одинаковой зарядовой четностью. Поэтому истинно нейтральный адрон может рассеивать фотон, а также испускать одновременно два фотона, т. е. участвовать в процессах более высокого порядка по α.

Из билинейных комбинаций $\overline{u}_2$ и u_1 и 4-векторов p_1, p_2 можно составить как истинные 4-векторные, так и псевдовекторные величины (удовлетворяющие условию (138.4)). Поэтому условие P-инвариантности взаимодействия не удовлетворяется автоматически и должно быть поставлено дополнительно [1]. Как было показано в § 116, при этом условии вершинный оператор содержит два независимых вещественных (при $q^2 < 0$) формфактора. Запишем его теперь в виде

$$\Gamma^\mu = 2M(F_e - F_m)\frac{P^\mu}{P^2} + F_m\gamma^\mu = 2M\left(F_e - \frac{q^2}{4M^2}F_m\right)\frac{P^\mu}{P^2} - \frac{F_m}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu =$$
$$= (4M^2F_e - q^2F_m)\frac{\gamma^\mu}{P^2} + \frac{2M}{P^2}(F_e - F_m)\sigma^{\mu\nu}q_\nu, \quad (138.7)$$

где $F_e(q^2)$ и $F_m(q^2)$ — инвариантные формфакторы (M — масса адрона); в эквивалентности трех написанных выражений легко убедиться с помощью равенств $P^2 + q^2 = 4M^2$ и (116.5) [2].

Электромагнитные формфакторы относятся к категории инвариантных амплитуд, понятие о которых было введено в § 70. Их можно рассматривать как амплитуды «реакции», представляющей собой (в своем аннигиляционном канале) распад виртуального фотона на адрон и антиадрон. Виртуальный фотон — «частица» со спином 1. В том, что ее распад на две частицы со спином 1/2 должен описываться двумя независимыми амплитудами, легко убедиться и подсчетом соответствующих спиральных амплитуд $\langle\lambda_b\lambda_c|S^J|\lambda_a\rangle$ (см. § 69). Действительно, в силу P-инвариантности четыре отличных от нуля элемента S-матрицы попарно равны друг другу:

$$\langle {}^1\!/\!_2\, {}^1\!/\!_2|S^1|1\rangle = \langle -{}^1\!/\!_2 - {}^1\!/\!_2|S^1| - 1\rangle,$$
$$\langle {}^1\!/\!_2 - {}^1\!/\!_2|S^1|0\rangle = \langle -{}^1\!/\!_2\, {}^1\!/\!_2|S^1|0\rangle.$$

Требование T-инвариантности (или C-инвариантности — в аннигиляционном канале) не добавляет новых связей между эти-

[1]) Мы не рассматриваем возможные нарушения сохранения четности в электромагнитных взаимодействиях, связанные с учетом виртуальных слабых взаимодействий.

[2]) Целесообразность определения формфакторов согласно (138.7) (*R. Sackhs,* 1962) выяснится ниже. В литературе используются также формфакторы F_1, F_2, определенные аналогично f и g в (116.6), т. е. согласно

$$\Gamma^\mu = F_1\gamma^\mu - \frac{F_2}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu.$$

Они связаны с F_e, F_m соотношениями

$$F_e = F_1 + F_2\frac{q^2}{4M^2}, \qquad F_m = F_1 + F_2.$$

ми элементами. С этим обстоятельством связан тот факт, что взаимодействие, описываемое вершинным оператором (138.7), автоматически оказывается также и T-инвариантным (такая ситуация, однако, не имеет уже места для частиц с более высокими спинами).

При $q \to 0$ члены нулевого и первого (по q) порядка в (138.7):

$$\Gamma^{\mu} = F_e(0)\gamma^{\mu} - \frac{1}{2M}[F_m(0) - F_e(0)]\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}. \tag{138.8}$$

Отсюда видно (см. § 116), что $F_e(0) \equiv Z$ — электрический заряд частицы (в единицах e), а $F_m(0) - F_e(0)$ — ее аномальный магнитный момент (в единицах $e/2M$) [1]).

До сих пор мы пользовались только формфакторами в импульсном пространстве. Этого, разумеется, достаточно для описания наблюдаемых явлений. С чисто иллюстративной целью, однако, можно дать формфакторам и несколько более наглядную интерпретацию, рассматривая их как фурье-образы некоторых функций от координат.

Для этого удобно выбрать систему отсчета, в которой $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ (так называемая *система Брейта*); это всегда возможно, поскольку $P^2 > 4M^2 > 0$. В этой системе $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon$, так что $P^0 = 2\varepsilon$, а составляющие 4-вектора q равны $q^0 = 0$, $\mathbf{q} = 2\mathbf{p}_2 = -2\mathbf{p}_1$.

Для адрона со спином 0 ток перехода принимает в системе Брейта особенно простую форму:

$$\frac{J^0_{fi}}{2\varepsilon} = F(-\mathbf{q}^2), \quad \mathbf{J} = 0.$$

Отсюда видно, что $F(-\mathbf{q}^2)$ можно истолковать как фурье-образ статического распределения зарядов с плотностью

$$e\rho(\mathbf{r}) = e\frac{1}{(2\pi)^3}\int F(-\mathbf{q}^2)e^{i\mathbf{qr}}d^3q. \tag{138.9}$$

В этом смысле говорят о пространственной электромагнитной структуре частицы: при $F = \text{const} = Z$ было бы $\rho(\mathbf{r}) = Z\delta(\mathbf{r})$; зависимость же формфактора от $\mathbf{q}$ интерпретируется как отклонение распределения заряда от точечного. Подчеркнем, однако, что этой интерпретации не следует придавать буквального смысла. Функция $\rho(\mathbf{r})$ вообще не относится к какой-либо определенной системе отсчета, так как каждому значению $\mathbf{q}$ отвечает своя система.

Лишь в нерелятивистском пределе $\mathbf{q}^2 \ll M^2$, когда изменением энергии частицы при рассеянии можно пренебречь, система Брейта совпадает с системой покоя частицы и не зависит

[1]) Так, для протона $F_e(0) = 1$, $F_m(0) - F_e(0) = 1,79$. Для нейтрона $F_e(0) = 0$, $F_m(0) = -1,91$ (магнитный момент полностью «аномален»).

от $\mathbf{q}$. Начальные и конечные состояния частицы в этом приближении одинаковы, так что ток перехода становится диагональным матричным элементом и функция $\rho(\mathbf{r})$ приобретает реальный смысл пространственного распределения зарядов. Для элементарных частиц, однако, характерные значения $|\mathbf{q}|$, на которых существенно меняются формфакторы, лишь немногим меньше M. Поэтому в нерелятивистском пределе для них можно вообще заменить $F(-q^2)$ на $F(0)$, т. е. рассматривать частицу как точечную. Иная ситуация для ядер. Масса ядра M пропорциональна числу A нуклонов в нем, а характерное значение $|\mathbf{q}| \sim 1/R$, т. е. пропорционально $A^{-1/3}$ (R — радиус ядра). Поэтому для достаточно тяжелых ядер характерные $\mathbf{q}^2 \ll M^2$, и, таким образом, нерелятивистское рассмотрение допустимо во всем существенном интервале; тем самым понятие электромагнитной структуры ядра приобретает вполне определенный смысл.

Для частицы со спином 1/2 из (138.7) получим в системе Брейта

$$J^0_{fi} = (F_e - F_m)\frac{M}{\varepsilon}(\overline{u}_2 u_1) + F_m(\overline{u}_2\gamma^0 u_1) = F_e(\overline{u}_2\gamma^0 u_1), \qquad (138.10)$$

$$\mathbf{J}_{fi} = -\frac{1}{2M}F_m[i\mathbf{q}(\overline{u}_2\boldsymbol{\Sigma}u_1), \qquad (138.11)$$

где $\boldsymbol{\Sigma}$ — трехмерный оператор (матрица) спина (21.21), а в (138.10) использовано равенство $\varepsilon(\overline{u}_2\gamma^0 u_1) = M(\overline{u}_2 u_1)$, которое легко проверить с помощью уравнений Дирака для u_1 и $\overline{u}_2$ при $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$.

Временная компонента тока перехода (138.10) отличается от выражения для «точечной частицы» — электрона множителем $F_e(-\mathbf{q}^2)$. Поэтому можно сказать, что формфактор F_e (его называют *зарядовым*) описывает «пространственное распределение заряда» согласно (138.9).

Аналогичным образом трехмерному вектору (138.11) можно привести в соответствие «пространственное распределение» плотности токов $e\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r})$, где

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) = \frac{e}{2M}\boldsymbol{\Sigma}\int F_m(-\mathbf{q}^2)e^{i\mathbf{qr}}d^3q$$

представляет собой «плотность магнитного момента». Таким образом, формфактор F_m (его называют *магнитным*) можно интерпретировать как плотность пространственного распределения магнитного момента — разумеется, с теми же оговорками, которые были сделаны выше по поводу распределения заряда. При этом F_m включает в себя как «нормальный» дираковский магнитный момент, так и специфический для адрона «аномальный» момент; «плотности» последнего отвечает разность $F_m - F_e$.

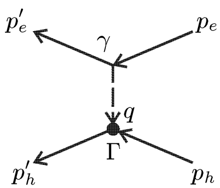
Естественно считать, что особые точки адронных электромагнитных формфакторов, как и электронных, лежат при вещественных положительных значениях аргумента $t = q^2 = -\mathbf{q}^2$. Это позволяет сделать определенные заключения об асимптотическом поведении распределения $\rho(r)$ (и $\boldsymbol{\mu}(r)$) при $r \to \infty$. Именно, такое же преобразование интеграла (138.9), которое было применено в § 114 для перехода от (114.3) к (114.4), приведет к результату, что при больших r будет $\rho(r) \propto e^{-\varkappa_0 r}$, где $\varkappa_0^2$ — абсцисса первой особой точки формфактора $F(q^2)$ (ср. также примеч. на с. 564). Если ближайшая особенность дается порогом образования виртуальным фотоном пары адронов (массы M_0 каждый), то $\varkappa_0 = 2M_0$.

§ 139. Рассеяние электронов адронами

Применим полученные в предыдущем параграфе формулы к упругому рассеянию электрона на адроне. Обозначим начальный и конечный 4-импульсы адрона через p_h и p'_h, а 4-импульсы электрона через p_e и p'_e; при этом

$$p_e + p_h = p'_e + p'_h. \tag{139.1}$$

Рассматриваемый процесс изображается диаграммой



(139.2)

Испусканию виртуального фотона электроном отвечает обычный вершинный оператор γ; поглощению его адроном — оператор Γ.

Рассмотрим наибилее интересный случай адрона со спином 1/2 (например, рассеяние электрона протоном или нейтроном). Диаграмме (139.2) соответствует амплитуда рассеяния

$$M_{fi} = -4\pi e^2 \frac{1}{q^2} (\overline{u}'_e \gamma^\mu u_e)(\overline{u}'_h \Gamma_\mu u_h) \tag{139.3}$$

(в этой главе заряд электрона есть $-e$!). Вычисление сечения по этой амплитуде не представляет принципиальных отличий от произведенных в § 81 вычислений; при том оператор Γ удобно писать в виде первого из выражений (138.7).

Для рассеяния неполяризованных частиц получается следующий результат:

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2 dt}{[s-(M+m)^2][s-(M-m)^2]\,t^2(1-t/4M^2)} \times$$
$$\times\Big\{F_e^2[(s-u)^2+(4M^2-t)t]-\frac{t}{4M^2}F_m^2[(s-u)^2-(4M^2-t)(4m^2+t)]\Big\}. \qquad (139.4)$$

Здесь M — масса адрона, m — масса электрона,

$$s=(p_e+p_h)^2, \quad t=q^2=(p_e-p'_e)^2, \quad u=(p_e-p'_h)^2,$$
$$s+t+u=2m^2+2M^2.$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи.

Для рассеяния электронов на тяжелом ядре представляет интерес случай, когда передача импульса электроном ядру $|\mathbf{q}|$ мала по сравнению с массой ядра, но не мала по сравнению с $1/R$ (R — радиус ядра), так что ядро нельзя рассматривать как точечное. В таком случае система центра инерции приближенно совпадает с системой покоя ядра, отдачей ядра можно пренебречь и энергия электрона не меняется. При этом

$$-t=\mathbf{q}^2 \ll M^2, \quad \pi|dt|=\mathbf{p}_e^2 do'_e, \quad s-M^2\approx M^2-u\approx 2M\varepsilon_e$$

и формула (139.4) принимает вид

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 do'_e}{q^4}(4\varepsilon_e^2-q^2)F_e^2(-\mathbf{q}^2). \qquad (139.5)$$

В этом приближении в сечении остается лишь член с электрическим формфактором и (139.5) соответствует формуле (80.5), справедливой для рассеяния электрона на статическом распределении зарядов.

При рассеянии электрона на неподвижном нейтроне в том же предельном случае $\varepsilon_e \ll M$ (M — масса нейтрона) формфакторы можно заменить их значениями при $\mathbf{q}=0$, поскольку, как уже отмечалось, для отдельного нуклона характерный «радиус» распределения зарядов сравним с $1/M$ [1]. В силу электрической нейтральности нейтрона $F_e(0)=0$, и сечение принимает вид

$$d\sigma=\alpha\mu^2\left[\frac{4(\varepsilon_e^2-m^2)}{\mathbf{q}^2}+1\right]do'_e=\alpha\mu^2\left(\frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)}+1\right)do'_e, \qquad (139.6)$$

где $\mu=\dfrac{e}{2M}F_m(0)$ — магнитный момент нейтрона, ϑ — угол рассеяния. Эта формула отвечает рассеянию электрона на неподвижном точечном магнитном моменте.

[1]) Эмпирическое значение среднеквадратичного «радиуса» нуклона $\approx 3,5/M \approx 1/(2m_\pi)$ (m_π — масса пиона).

Наконец, напишем формулу для сечения рассеяния ультрарелятивистского электрона на нуклоне при $|\mathbf{q}| \gg m$. Под $\mathbf{q}^2$ мы по-прежнему понимаем квадрат передачи импульса в системе центра инерции, так что инвариант $t = -\mathbf{q}^2$. В системе же покоя начального нуклона (лабораторная система) имеем

$$-t \approx 2(p_e p'_e) = 2\varepsilon_e \varepsilon'_e (1 - \cos\vartheta),$$

где ε_e, ε'_e — начальная и конечная энергия электрона, а ϑ — угол рассеяния в этой системе. В ультрарелятивистском случае ε'_e связана с ϑ той же формулой, что и при рассеянии фотона (ср. (86.8)):

$$\frac{1}{\varepsilon'_e} - \frac{1}{\varepsilon_e} = \frac{1}{M}(1 - \cos\vartheta).$$

Поэтому имеем

$$-t = \frac{4\varepsilon_e^2 \sin^2 \dfrac{\vartheta}{2}}{1 + \dfrac{2\varepsilon_e}{M} \sin^2 \dfrac{\vartheta}{2}}, \tag{139.7}$$

$$\pi d|\,t\,| = \frac{\varepsilon_e^2 do'_e}{\left(1 + \dfrac{2\varepsilon_e}{M} \sin^2 \dfrac{\vartheta}{2}\right)^2}, \tag{139.8}$$

где $do'_e = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta$. В формуле (139.4) можно везде опустить массу электрона m; выразив все величины через t и $s - M^2 = 2M\varepsilon_e$, получим

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2 d|\,t\,|}{\varepsilon_e^2 t^2}\left\{F_e^2(t)\left[\frac{(4M\varepsilon_e + t)^2}{4M^2 - t} + t\right] - \frac{t}{4M^2} F_m^2(t)\left[\frac{(4M\varepsilon_e + t)^2}{4M^2 - t} - t\right]\right\}, \tag{139.9}$$

или, используя (139.7),(139.8),

$$d\sigma = do'_e \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_e^2} \frac{\cos^2 \dfrac{\vartheta}{2}}{\sin^4 \dfrac{\vartheta}{2}} \frac{1}{1 + \dfrac{2\varepsilon_e}{M} \sin^2 \dfrac{\vartheta}{2}} \left\{ \frac{F_e^2 - \dfrac{t}{4M^2} F_m^2}{1 - \dfrac{t}{4M^2}} - \frac{t}{2M^2} F_m^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right\} \tag{139.10}$$

(*M. Rosenbluth,* 1950).

Обратим внимания на то, что формфакторы F_e и F_m дают независимые вклады в сечение, интерференционные члены отсутствуют. Это оправдывает целесообразность сделанного выбора формфакторов.

З а д а ч а

Найти сечение рассеяния электрона на адроне со спином 0.

Р е ш е н и е. Используя (138.5), имеем вместо (139.3)

$$M_{fi} = -\frac{4\pi e^2}{q^2}(\overline{u}'_e(\gamma P_h)u_e)F(q^2).$$

Для сечения получаем

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2 dt[(s-u)^2 + (4M^2 - t)t]}{[s-(M+m)^2][s-(M-m)^2]t^2} F^2(t)$$

(обозначения те же, что и в (139.4)). При $|t| \gg m^2$

$$d\sigma = do'_e \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_e^2} \frac{\cos^2 \dfrac{\vartheta}{2}}{\sin^4 \dfrac{\vartheta}{2}} \frac{F^2(t)}{1 + \dfrac{2\varepsilon_e}{M}\sin^2 \dfrac{\vartheta}{2}}$$

(обозначения те же, что и в (139.10)).

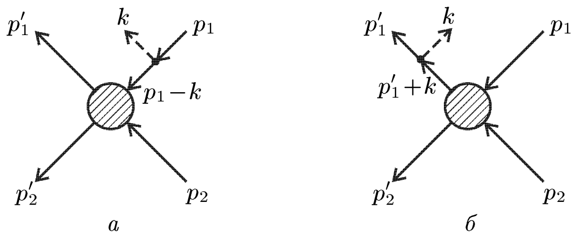
§ 140. Низкоэнергетическая теорема для тормозного излучения

В § 98 был исследован процесс испускания фотона при столкновении частиц в пределе, когда частота фотона стремится к нулю. Оказалось, что амплитуда процесса обратно пропорциональна ω и простым образом выражается через амплитуду того же столкновения без испускания мягкого фотона (об этой последней мы будем снова говорить условно как об амплитуде «упругого» рассеяния и обозначать ее как $M_{fi}^{\text{упр}}$). В следующем по ω приближении будет

$$M_{fi} = M_{fi}^{(-1)} + M_{fi}^{(0)}, \tag{140.1}$$

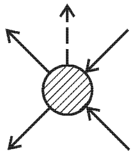
где к главному члену ($\propto \omega^{-1}$) добавляется не зависящий от ω ($\propto \omega^0$) поправочный член. Мы увидим, что и этот поправочный (как и главный) член может быть выражен через $M_{fi}^{(\text{упр})}$, причем независимо от деталей электромагнитной структуры адрона. Это утверждение называют *низкоэнергетической теоремой* для тормозного излучения (*F. E. Low,* 1958).

Мы видели в § 98, что основной вклад в амплитуду испускания мягкого фотона (отвечающий первому члену в (140.1)) возникает от диаграмм, в которых фотон излучается непосредственно начальной или конечной частицей. Это — диаграммы вида



(140.2)

в противоположность диаграммам вида



(140.3)

в которых фотонная линия выходит из внутренних частей диаграммы. Для графиков (140.2) характерно, что они могут быть рассечены на две части путем пересечения одной линии виртуального адрона (начального или конечного). Другими словами, они иллюстрируют существенное в данном аспекте свойство: наличие одночастичного промежуточного состояния с одним адроном. Мы видели в § 79, что в силу требований унитарности это свойство уже само по себе приводит к появлению полюсной особенности в амплитуде.

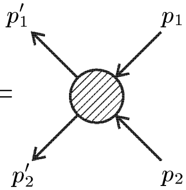
Предположим для простоты, что из двух сталкивающихся адронов электрически заряжен (и потому может излучать) лишь один (первый) и что оба адрона не имеют спина. Волновые амплитуды u таких адронов — скаляры, которые полагаем равными 1.

Тогда вклад в амплитуду от полюсной части диаграммы (140.2,a) имеет вид

$$iM_{fi}^{(a)} = \sqrt{4\pi}e_\mu^*\left(2p_1^\mu - k^\mu\right)eF\frac{1}{(p_1-k)^2 - M^2}i\Gamma. \tag{140.4}$$

Первый множитель отвечает фотону k (e_μ — его 4-вектор поляризации). Второй множитель отвечает электромагнитной адронной вершине (жирная точка на диаграмме); она записана в форме (138.5), F — формфактор адрона. Третий множитель — пропагатор виртуального адрона $p_1 - k$ (M — его масса). Наконец, множитель $i\Gamma$ обозначает весь остальной блок. Последний отличается от амплитуды упругого процесса

$iM_{fi}^{(\text{упр})} =$



(140.5)

заменой реального адрона p_1 виртуальным $p_1 - k$.

Среди первых членов разложения выражения (140.4) по степеням ω будут члены: 1) обратно пропорциональные ω, 2) не зависящие от ω, но зависящие от направления $\mathbf{k}$, 3) не зависящие от ω, $\mathbf{k}$ вовсе. Члены третьего (и только такого) рода возникнут также от «неособых» диаграмм — диаграмм вида (140.3),

не содержащих полюсной особенности, и от неполюсных частей диаграмм (140.2). Мы увидим, что все такие члены вместе однозначно определяются по членам первых двух типов условием калибровочной инвариантности и потому не требуют специального вычисления.

Амплитуда упругого процесса (140.5) зависит лишь от двух инвариантных переменных:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_1' + p_2')^2, \qquad t = (p_2' - p_2)^2. \tag{140.6}$$

Замена p_1 на $p_1 - k$ не только превращает s в $(p_1 - k + p_2)^2$, но вводит еще и зависимость от новой переменной

$$(p_1 - k)^2 - M^2 = -2(p_1 k),$$

характеризующей «нефизичность» импульса $p_1 - k$. Но уже первый член разложения по этой новой (малой) переменной устраняет особенность в амплитуде (140.4) и потому может дать в ней лишь не зависящие от k члены, которые, согласно сказанному выше, нас пока не интересуют. Таким образом, мы приходим к важному заключению, что вместо величины Γ в (140.4) можно подставить физическую амплитуду $M_{fi}^{(\text{упр})}(s,\ t)$, лишь заменив в ней

$$s \to (p_1 + p_2 - k)^2 = s - 2k(p_1 + p_2). \tag{140.7}$$

Первые члены ее разложения:

$$\Gamma \to M_{fi}^{(\text{упр})}(s,\ t) - 2(kp_1 + kp_2)\left(\frac{\partial M_{fi}^{(\text{упр})}}{\partial s}\right)_t.$$

По такой же причине несуществен тот факт, что электромагнитный формфактор F относится здесь к вершине, в которой из двух адронных концов (p_1 и $p_1 - k$) лишь один физический. Его можно поэтому заменить рассмотренным в § 138 формфактором вершины с двумя физическими концами, а поскольку фотон k в данном случае реальный, то $F(k^2) = F(0) = Z_1$, где eZ_1 — заряд адрона.

Таким образом, находим из (140.8)

$$M_{fi}^a = Z_1 e\sqrt{4\pi}\frac{2(e^* p_1)}{-\,2(kp_1)} M_{fi}^{(\text{упр})} -$$
$$- Z_1 e\sqrt{4\pi} 2(e^* p_1)\frac{1}{-\,2(kp_1)} \cdot 2(p_2 k)\frac{\partial M_{fi}^{(\text{упр})}}{\partial s} + \ldots, \tag{140.8}$$

где многоточие означает члены, не зависящие от k вовсе (между тем как второй член в (140.8) зависит от направления $\mathbf{k}$). Аналогичным образом найдем, что вклад в M_{fi} диаграммы (140.2,*б*)

отличается от (140.8) заменой p_1, p_2, k на p_1', p_2', $-k$. Для главного члена разложения получим в результате известное уже нам выражение

$$M_{fi}^{(-1)} = Z_1 e\sqrt{4\pi}\left(\frac{(p_1'e^*)}{(p_1'k)} - \frac{(p_1e^*)}{(p_1k)}\right)M_{fi}^{(\text{упр})} \tag{140.9}$$

(ср. (98.5)).

Не зависящие же от k члены можно определить из требования, чтобы амплитуда в целом была калибровочно-инвариантна. Именно, она не должна меняться при замене $e^* \to e^* + \text{const}\cdot k$, т. е. должна иметь вид $M_{fi} = e_\mu^* J^\mu$, причем $k_\mu J^\mu = 0$. Легко видеть, что для этого нужно добавить к (140.8) не зависящий от k член

$$-2Z_1 e\sqrt{4\pi}(p_2e^*),$$

и аналогично для диаграммы (140.2,*б*). В результате получим окончательно

$$M_{fi}^{(0)} = 2Z_1 e\sqrt{4\pi}e_\mu^*\left[p_1^\mu\frac{(p_2k)}{(p_1k)} - p_2^\mu + p_1'^\mu\frac{(p_2'k)}{(p_1'k)} - p_2'^\mu\right]\frac{\partial M_{fi}^{\text{упр}}}{\partial s}. \tag{140.10}$$

Эта формула решает поставленную задачу. Ее можно представить в более компактном виде, заменив тождественно

$$2p_{2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial p_1^\nu}\right)_{p_1', p_2, p_2'}$$

(и аналогично для $\partial/\partial p_1'$) и введя дифференциальные операторы

$$\widehat{d}_{1\mu} = \frac{p_{1\mu}}{(p_1k)}k^\nu\frac{\partial}{\partial p_1^\nu} - \frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \tag{140.11}$$

(и аналогично $\widehat{d}'_{1\mu}$). Тогда

$$M_{fi}^{(0)} = Z_1 e\sqrt{4\pi}e_\mu^*\left(\widehat{d}_1^\mu + \widehat{d}_1'^\mu\right)M_{fi}^{(\text{упр})}. \tag{140.12}$$

Сечение определяется квадратом $|M_{fi}|^2$ с требуемой точностью

$$|M_{fi}|^2 = |M_{fi}^{(-1)}|^2 + 2\,\text{Re}\left(M_{fi}^{(-1)}M_{fi}^{(0)*}\right). \tag{140.13}$$

Второй член дает искомую поправку к сечению излучения. Просуммировав по поляризациям фотона, получим для этой поправки следующее выражение:

$$-4\pi(Z_1e)^2\left(\frac{p'}{(p'k)} - \frac{p}{(pk)}\right)^\mu(\widehat{d}_1' + \widehat{d}_1)_\mu|M_{fi}^{(\text{упр})}|^2. \tag{140.14}$$

Таким образом, поправка к сечению излучения выражается через сечение упругого процесса и его производную по s.

Если заряженный адрон имеет спин 1/2, то вся принципиальная сторона вычислений остается прежней. Меняется лишь конкретный вид вершин и пропагаторов. При этом оказывается, что после усреднения по поляризациям адронов и фотона остается справедливой формула (140.14) (*T. N. Burnett, N. M. Kroll,* 1968).

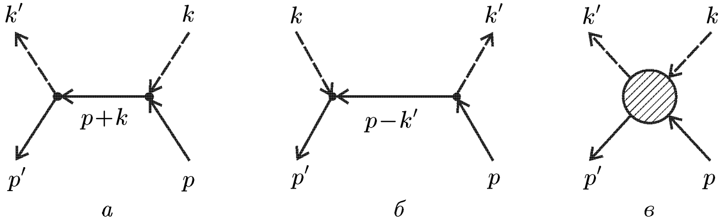
§ 141. Низкоэнергетическая теорема для рассеяния фотона на адроне

В пределе малых частот сечение рассеяния фотона на всякой неподвижной заряженной частице стремится к своему классическому значению, даваемому формулой Томсона. Этому пределу соответствует не зависящая от частоты фотона ω амплитуда, которую обозначим через $M_{fi}^{(0)}$. Оказывается, однако, что и для рассеяния фотона (как и для рассмотренного в предыдущем параграфе тормозного излучения) от деталей электромагнитной структуры адрона не зависит не только этот первый, но и следующий член разложения амплитуды по степеням ω:

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} + M_{fi}^{(1)}, \qquad (141.1)$$

где $M^{(1)} \sim \omega$ (*F. E. Low,* 1954; *M. Gell-Mann, M. L. Goldberger,* 1954).

Рассматриваемый процесс изображается диаграммами трех видов:



(141.2)

из которых первые две снова характеризуются наличием одночастичного промежуточного состояния и потому обладают полюсной особенностью.

Аргументация и принципиальная сторона вычислений остаются теми же, что и в § 140. Достаточно фактически вычислить лишь вклад от полюсных частей диаграмм (141.2,*а—б*), причем электромагнитные вершины в них выражаются через статические формфакторы (заряд Ze и аномальный магнитный момент $\mu_{\text{ан}}$).

Однако, в отличие от случая тормозного излучения, интересующие нас теперь поправки к сечению комптон-эффекта существуют лишь для частиц со спином. Дело в том, что в случае тормозного излучения кроме поправок, связанных со спином, имеются также поправки, связанные с энергетической зависимостью амплитуды «упругого» процесса. Но в данном случае роль последней играют формфакторы, которые для «физических концов» сводятся к постоянным и от энергии не зависят. Поэтому для рассеяния фотона поправки возникают только за счет магнитного момента, отсутствующего у частиц без спина. Ниже мы рассмотрим рассеяние фотона на адроне со спином 1/2.

Понимая под M_{fi} вклад в амплитуду рассеяния от полюсных диаграмм, имеем (ср. (86.3),(86.4))

$$M_{fi} = -4\pi(Ze)^2 e'^*_\mu e_\nu (\overline{u}' Q^{\mu\nu} u), \tag{141.3}$$

где

$$Q^{\mu\nu} = \big(\gamma^\mu + S'^\mu\big)\frac{\gamma p + \gamma k + M}{s - M^2}\big(\gamma^\nu - S^\nu\big) + \\ + \big(\gamma^\nu - S^\nu\big)\frac{\gamma p - \gamma k' + M}{u - M^2}\big(\gamma^\mu + S'^\mu\big), \tag{141.4}$$

$$s = (p+k)^2 = (p'+k')^2, \quad u = (p-k')^2 = (p'-k)^2$$

и для краткости введены обозначения

$$\mu_{\text{ан}}\sigma^{\mu\lambda}k_\lambda = ZeS^\mu, \quad \mu_{\text{ан}}\sigma^{\mu\lambda}k'_\lambda = ZeS'^\mu. \tag{141.5}$$

Переставляя операторы $\gamma p + M$ и учитывая уравнения

$$\overline{u}'(\gamma p' - M) = (\gamma p - M)u = 0,$$

можно преобразовать выражение (141.4) к виду

$$Q^{\mu\nu} = \left[\big(\gamma^\mu + S'^\mu\big)\frac{(\gamma k)\gamma^\nu + 2p^\nu}{2(pk)} + \frac{\gamma^\nu(\gamma k) - 2p'^\nu}{2(p'k)}\big(\gamma^\mu + S'^\mu\big)\right] - \\ - \left[\frac{\gamma^\mu(\gamma k') + 2p'^\mu}{2(p'k')}S^\nu + S^\nu\frac{\gamma^\mu(\gamma k') - 2p^\mu}{2(pk')}\right] - \\ - \left[S'^\mu\frac{\gamma p + \gamma k + M}{2(pk)}S^\nu - S^\nu\frac{\gamma p - \gamma k' + M}{2(pk)'}S'^\mu\right]. \tag{141.6}$$

Такая форма записи (и аналогичная с переставленными k и k') делает очевидной калибровочную инвариантность выражения (141.3), условием которой являются равенства

$$k'_\mu\big(\overline{u}' Q^{\mu\nu} u\big) = \big(\overline{u}' Q^{\mu\nu} u\big)k_\nu = 0 \tag{141.7}$$

(при проверке надо помнить, что $(\gamma k)(\gamma k) = 0,\ kS = k'S' = 0$).

Поскольку полюсная часть амплитуды рассеяния оказывается, таким образом, калибровочно-инвариантной уже сама по себе, должна быть инвариантной сама по себе также и регулярная часть амплитуды, включающая в себя и вклад диаграммы (141.2,*в*). Отсюда в свою очередь следует, что разложение этой части по степеням k и k' должно начинаться с квадратичных членов (ср. аналогичное замечание в связи с условием (127.5)). Другими словами, регулярная часть амплитуды содержит лишь члены, начиная с пропорциональных $\omega\omega' \sim \omega^2$, т. е. не дает никакого вклада в интересующие нас члены, пропорциональные ω^0 и ω^1. Все последние содержатся, следовательно, в выражении (141.3).

Для их фактического вычисления выбираем лабораторную систему отсчета, в которой покоится начальный адрон. Для фотонов же выбираем трехмерно поперечную калибровку, в которой $e_0 = e_0' = 0$. Тогда $(pe) = 0$, $(p'e'^*) \sim |\mathbf{p}'| \sim \omega$, и из (141.6) видно, что первые члены разложения M_{fi} будут пропорциональны ω^0, а члены, содержащие $\mu_{\text{ан}}$, дадут вклад лишь в члены, пропорциональные ω^1.

Волновые амплитуды начального и конечного адронов в лабораторной системе отсчета с нужной точностью имеют вид

$$u = \sqrt{2M}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{u}' = \sqrt{2M}\Big(w'^*, -\frac{w'^*}{2M}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\boldsymbol{\sigma}\Big),$$

где w, w' — 3-спиноры.

Прямое вычисление приводит к следующему результату:

$$M_{fi}^{(0)} = -8\pi(Ze)^2(\mathbf{e}'^*\mathbf{e})(w'^*w), \tag{141.8}$$

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(1)} = -16\pi i M\mu_{\text{ан}}^2\omega(w'^*\sigma w)[[\mathbf{n}'\mathbf{e}'^*][\mathbf{n}\mathbf{e}]] - \\ - 4\pi i Ze\mu_{\text{ан}}\omega(w'^*\boldsymbol{\sigma}w)\{\mathbf{n}([\mathbf{n}\mathbf{e}]\mathbf{e}'^*) + [\mathbf{n}\mathbf{e}](\mathbf{n}\mathbf{e}'^*) - \\ - \mathbf{n}'([\mathbf{n}'\mathbf{e}'^*]\mathbf{e}) - [\mathbf{n}'\mathbf{e}'^*](\mathbf{n}\mathbf{e}) - 2[\mathbf{e}'^*\mathbf{e}]\}, \end{aligned} \tag{141.9}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$, $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/\omega'$.

Сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}|M_{fi}|^2\frac{\omega'^2}{M^2\omega^2}do' \tag{141.10}$$

(см. (64.19)). Для рассеяния на заряженной частице отличны от нуля как $M_{fi}^{(1)}$, так и $M_{fi}^{(0)}$. Принятая точность допускает при этом сохранение в квадрате $|M_{fi}|^2$ членов $|M_{fi}^{(0)}|^2$ и $\mathrm{Re}\big(M_{fi}^{(0)}M_{fi}^{(1)*}\big)$. Первый дает томсоновское сечение. Второй же обращается в нуль

при усреднении по поляризациям фотонов и адронов. Поэтому при рассеянии на заряженном адроне рассматриваемые поправки проявляются только в поляризационных эффектах.

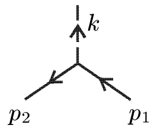
Для рассеяния же на электрически нейтральном адроне $M_{fi}^{(0)} = 0$ и сечение определяется квадратом $|M_{fi}^{(1)}|^2$. После усреднения по поляризациям начальных и суммирования по поляризациям конечных частиц оно оказывается равным (в обычных единицах)

$$d\sigma = \frac{2\mu^4\omega^2}{\hbar^2 c^4}(2 + \sin^2\vartheta)do', \tag{141.11}$$

где ϑ — угол рассеяния фотона, а аномальный магнитный момент совпадает с полным моментом μ. Отметим, что по своей угловой зависимости это сечение соответствует случаю антисимметрического рассеяния (см. задачу 2 к § 60).

§ 142. Мультипольные моменты адронов

Рассмотрим теперь ток перехода, соответствующий такой же как (138.2), диаграмме



(142.1)

в которой, однако, линии p_1 и p_2 отвечают разным частицам (массы M_1 и M_2); фотонную линию $k = p_1 - p_2$ удобнее представлять здесь исходящей из вершины. При этом фотон может быть теперь как виртуальным, так и реальным: должно быть лишь $k^2 < (M_1 - M_2)^2$, так что значение $k^2 = 0$ допустимо. Таким образом, применения рассматриваемой диаграммы включают в себя, в частности, процессы испускания фотона при превращениях частиц, в том числе ядер (в последнем случае начальной и конечной частицами является ядро в различных состояниях).

В связи с поставленным вопросом наиболее интересен случай, когда длина волны фотона велика по сравнению с характерными «размерами» частицы (т. е. размерами, входящими в ее формфакторы; для ядра они совпадают, конечно, с его «радиусом»). Тогда ток перехода может быть разложен по степеням k [1].

Отметим прежде всего, что должно быть

$$J_{fi} = 0 \quad \text{при} \quad k = 0. \tag{142.2}$$

[1]) Ниже мы следуем методике, предложенной *В. Б. Берестецким* (1948).

Действительно, пределу $k \to 0$ отвечает постоянный в пространстве и времени потенциал. Но такой потенциал не имеет физического значения и не может являться причиной каких-либо реальных процессов. К этому же выводу можно подойти и с более формальной точки зрения: рассмотренные в § 138 токи были отличны от нуля при $k = 0$ за счет членов, пропорциональных 4-вектору $P = p_1 + p_2$; но при $M_1 \neq M_2$ произведение $(Pk) \neq 0$, так что такие члены запрещены условием поперечности тока.

Запишем условие поперечности тока $J_{fi} = (\rho_{fi}, \mathbf{J}_{fi})$ в трехмерном виде:

$$\mathbf{kJ}_{fi} = \omega\rho_{fi}. \tag{142.3}$$

Этому условию можно удовлетворить двумя способами:

$$\mathbf{J}_{fi} = \omega\mathbf{v}(\mathbf{k}, \omega), \quad \rho_{fi} = \mathbf{kv}(\mathbf{k}, \omega) \tag{142.4}$$

или

$$\mathbf{J}_{fi} = [\mathbf{ka}(\mathbf{k}, \omega)], \quad \rho_{fi} = 0. \tag{142.5}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — некоторый полярный, а $\mathbf{a}$ — аксиальный векторы. В первом случае говорят о токе электрического, а во втором — магнитного типа. Согласно (142.2) $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ при $\mathbf{k}, \omega \to 0$ остаются конечными или обращаются в нуль.

Пусть энергия фотона $\omega \ll M_1$. Тогда можно пренебречь эффектом отдачи и считать покоящейся (в системе покоя частицы M_1) также и конечную частицу M_2; при этом ω становится заданной величиной: $\omega = M_1 - M_2$. Состояния покоящихся частиц M_1 и M_2 характеризуются трехмерными спинорами w_1 и w_2 рангов $2s_1$ и $2s_2$, где s_1 и s_2 — спины частиц. Ток перехода должен быть билинейной комбинацией w_1 и w_2^*. Из произведений компонент этих спиноров можно составить неприводимые тензоры рангов $l = s_1 + s_2, \ldots, |s_1 - s_2|$ (при заданном l это будет истинный или псевдотензор в зависимости от внутренних четностей частиц M_1 и M_2). Кроме этих тензоров в нашем распоряжении имеется только вектор $\mathbf{k}$. Чтобы построить первый член разложения тока по степеням $\mathbf{k}$, надо с помощью этих величин составить вектор как можно более низкой степени по $\mathbf{k}$. Мы достигнем этой цели, взяв тензор наименьшего ранга и умножив его скалярно $l-1$ раз на вектор $\mathbf{k}$. Это и будет полярный вектор $\mathbf{v}$ или аксиальный вектор $\mathbf{a}$.

Пусть Q_{lm} — сферические компоненты тензора, составленного из волновых амплитуд частиц. Сферические же компоненты тензора ранга $l-1$, составленного из компонент $\mathbf{k}$, равны $|\mathbf{k}|^{l-1} Y_{l-1,m}(\mathbf{n})$, где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/\omega$. По общему правилу сложения сферических тензоров (см. III, (107,3)) сферические компоненты

вектора $\mathbf{v}$ можно написать в виде

$$\mathbf{v}_\lambda = (-1)^{\lambda+1} i^l \frac{\sqrt{4\pi}}{(2l-1)!!}\sqrt{\frac{2l+1}{l}}|\mathbf{k}|^{l-1} \times \\ \times \sum_m \begin{pmatrix} l-1 & 1 & l \\ \lambda+m & -\lambda & -m \end{pmatrix} Q_{l,-m} Y_{l-1,\lambda+m}(\mathbf{n}),$$

где λ пробегает значения 0, ± 1 (о выборе общего множителя см. ниже). Используя формулы (7.16), можно выразить $\mathbf{v}$ через шаровые векторы:

$$\mathbf{v} = i^l \frac{\sqrt{4\pi}\,|\mathbf{k}|^{l-1}}{(2l-1)!!\sqrt{l(2l+1)}} \sum_m (-1)^{l-m} Q_{l,-m} \times \\ \times [\sqrt{l+1}\mathbf{Y}^{(э)}_{lm}(\mathbf{n}) + \sqrt{l}\mathbf{Y}^{(п)}_{lm}(\mathbf{n})]. \quad (142.6)$$

Подставив в (142.4), найдем El-ток перехода:

$$\mathbf{J}_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi|}\,\omega|\mathbf{k}|^{l-1}}{(2l-1)!!\sqrt{l(2l+1)}} \sum_m (-1)^{l-m} Q^{(э)}_{l,-m} \times \\ \times [\sqrt{l+1}\mathbf{Y}^{(э)}_{lm}(\mathbf{n}) + \sqrt{l}\mathbf{Y}^{(п)}_{lm}(\mathbf{n})], \quad (142.7)$$

$$\rho_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi|\mathbf{k}|^l}}{(2l-1)!!\sqrt{l(2l+1)}} \sum_m (-1)^{l-m} Q^{(э)}_{l,-m} Y_{lm}(\mathbf{n})] \quad (142.8)$$

(мы различаем везде $|\mathbf{k}|$ и ω, имея в виду возможные применения как к реальным, так и к виртуальным фотонам, для которых эти величины не совпадают).

В (142.7),(142.8) подразумевается, что сферический тензор Q_{lm} (обозначенный здесь $Q^{(э)}_{lm}$) — истинный тензор. Если же это псевдотензор (в таком случае обозначим его $Q^{(м)}_{lm}$), то формула (142.6) определит псевдовектор $\mathbf{a}$. Подстановка в (142.5) дает тогда Ml-ток перехода:

$$\mathbf{J}_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi}}{(2l-1)!!}\sqrt{\frac{l+1}{l(2l+1)}}|\mathbf{k}|^l \sum_m (-1)^{l-m} Q^{(м)}_{l,-m} \mathbf{Y}^{(м)}_{lm}(\mathbf{n}), \\ \rho_{fi} = 0. \quad (142.9)$$

Величины $Q^{(э)}_{lm}$ и $Q^{(м)}_{lm}$ представляют собой адронные электрические и магнитные мультипольные моменты перехода. Их роль в электродинамике адронов вполне аналогична роли соответствующих величин в электродинамике электронов. В то время, однако,

как для электронных систем эти моменты могут быть, в принципе, вычислены по волновым функциям (как матричные элементы соответствующих операторов), в электродинамике адронов они выступают как феноменологические величины, значения которых находятся из опыта.

Нормировка этих величин в (142.7)–(142.9) выбрана в соответствии с их определением в § 46. В этом можно убедиться, рассматривая токи (142.7)–(142.9) как компоненты Фурье тока перехода в координатном представлении. Так, разложив множитель $e^{-i\mathbf{kr}}$ в интеграле

$$\rho_{fi}(\mathbf{k}) = \int \rho_{fi}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}} d^3x \tag{142.10}$$

с помощью формулы (46.3), получим

$$\rho_{fi}(\mathbf{k}) = 4\pi i^l \sum_{l,m} Y_{lm}(\mathbf{n}) \int \rho_{fi}(\mathbf{r}) Y^*_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) g_l(|\mathbf{k}|r)\, d^3x.$$

Оставив здесь член с наименьшим l, для которого интеграл отличен от нуля, и заменив функцию $g_l(|\mathbf{k}|r)$ при $|\mathbf{k}|r \ll 1$ ее первым членом разложения (46.5), мы вернемся к формуле (142.9), причем

$$Q^{(\text{э})}_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r^l \rho_{fi}(\mathbf{r}) Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) d^3x \tag{142.11}$$

в соответствии с определением (46.7).

Покажем также, что при применении к испусканию реального фотона полученные формулы приводят к уже известным нам результатам.

Амплитуда перехода с испусканием фотона с импульсом $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}$ и поляризацией $e = (0, \mathbf{e})$:

$$M_{fi} = -e\sqrt{4\pi}\mathbf{e}^*\mathbf{J}_{fi}. \tag{142.12}$$

Если в начальном и конечном состояниях ядро обладает определенным значением проекции момента (M_i и M_f), то в сумме по m в (142.7)–(142.9) остается лишь по одному члену: $m = M_i - M_f$. Поскольку согласно (16.23) произведения $\mathbf{Y}^{(\text{э})}_{lm}\mathbf{e}^{(\lambda)*}$ или $\mathbf{Y}^{(\text{м})}_{lm}\mathbf{e}^{(\lambda)*}$ ($\lambda = \pm 1$ — спиральность фотона, $e^{(\lambda)} \perp \mathbf{n}$) пропорциональны $D^l_{\lambda m}$, мы возвращаемся к формулам, рассмотренным в § 48.

Дифференциальная вероятность излучения [1])

$$dw = 2\pi\delta[\omega - (E_i - E_f)]|M_{fi}|^2 \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \qquad (142.13)$$

(E_i, E_f — начальная и конечная энергия ядра). Полная вероятность получится суммированием по поляризациям и интегрированием по d^3k. Подставив (142.7) или (142.9) в (142.12) и затем в (142.13) и произведя указанные действия, мы вернемся к формуле (46.9) (или (47.2)).

Формулы (142.7)–(142.9) включают в себя все случаи, которые могут иметь место для испускания реального фотона. Для виртуальных же фотонов возможен еще и другой случай, не описываемый этими формулами (*R. H. Fowler,* 1930).

Если спины и четности начального и конечного состояний ядра одинаковы, то из их волновых амплитуд можно составить скаляр Q_0, а с его помощью — ток перехода вида

$$\rho_{fi} = Q_0\mathbf{k}^2, \quad \mathbf{J}_{fi} = Q_0\omega\mathbf{k}. \qquad (142.14)$$

Величину Q_0 называют *монопольным* ($E0$) моментом перехода. Для испускания реального фотона соответствующая амплитуда перехода обращается в нуль (так как $\mathbf{e}^*\mathbf{k} = 0$). Монопольный ток, однако, может быть источником переходов, связанных с испусканием виртуального фотона. Более того, он является единственным таким источником при $s_1 = s_2 = 0$, когда все мультипольные моменты равны нулю.

По своей зависимости от ω и $\mathbf{k}$ монопольный ток (142.14) аналогичен электрическому квадрупольному. Соответственно и момент Q_0 представляет собой величину того же порядка, что и квадрупольный момент. К этому заключению можно прийти также и путем истолкования (142.14) как компоненты Фурье тока в координатном представлении. Разложив в (142.10) множитель $e^{-i\mathbf{kr}}$ по степеням $\mathbf{kr}$ и положив функцию $\rho_{fi}(\mathbf{r})$ сфсрически-симметричной, получим

$$\rho_{fi}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{6}\mathbf{k}^2 \int \rho_{fi}(r) r^2 d^3x.$$

Сравнив с (142.14), найдем

$$Q_0 = -\frac{1}{6} \int \rho_{fi}(r) r^2 d^3x. \qquad (142.15)$$

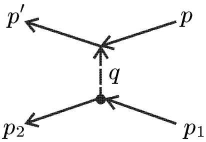
Сходство этой величины с квадрупольным моментом очевидно.

[1]) Множитель $2\pi\delta$ в этой формуле вместо $(2\pi)^4\delta^{(4)}$ в (64.11) связан с тем, что при пренебрежении отдачей ядра импульс не сохраняется, так что остается лишь сохранение энергии.

З а д а ч и

1. Найти вероятность ионизации атома из K-оболочки за счет энергии возбуждения ядра ω (так называемая внутренняя конверсия γ-излучения) при ядерном Ml-переходе в пренебрежении энергией связи электрона в атоме и влиянием поля ядра на его волновые функции [1]).

Р е ш е н и е. Процесс описывается диаграммой



(1)

где p_1 и p_2 относятся к неподвижному ядру в различных состояниях, а $p = (m,\ 0)$ и $p' = (m{+}\omega,\ \mathbf{p}')$ — 4-импульсы начального и конечного электронов. Этой диаграмме отвечает амплитуда

$$M_{fi} = -e^2\frac{4\pi}{q^2}\overline{u}(p')\big(\gamma J_{fi}\big)u(p),$$

где J_{fi} — ток перехода ядра. После суммирования по конечным и усреднения по начальным поляризациям электрона получим

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{поляр}}|M_{fi}|^2 = e^4\frac{16\pi^2}{(q^2)^2}\big\{q^2\big(J_{fi}J^*_{fi}\big) + 4(J_{fi}p)\big(J^*_{fi}p\big)\big\}$$

(использовано, что $J_{fi}q = 0$ и поэтому $J_{fi}p = J_{fi}p'$). Вероятность конверсии вычисляется как

$$dw_{\text{конв}} = 2|\psi_i(0)|^2\left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}d\sigma\right)_{\mathbf{p}\to 0},$$

где $d\sigma$ — сечение рассеяния, изображенного диаграммой (1) с $p = (\varepsilon, \mathbf{p})$, а ψ_i — волновая функция атомного электрона; для K-электрона

$$|\psi_i(0)|^2 = (Z\alpha m)^3/\pi.$$

Множитель 2 учитывает два электрона в K-оболочке атома. Сечение $d\sigma$ вычисляется как

$$d\sigma = 2\pi\delta(\varepsilon+\omega-\varepsilon')|M_{fi}|^2\frac{d^3p'}{2|\mathbf{p}|2\varepsilon'(2\pi)^3}$$

(ср. примеч. на с. 710).

Для Ml-переходов ток J_{fi} надо взять из (142.9). Интегрирование $dw_{\text{конв}}$ по $d\varepsilon'$ устраняет δ-функцию, а интегрирование по do' обращает квадрат $|\mathbf{Y}^{(\text{м})}_{lm}|^2$ в 1. В результате вероятность конверсии окажется выраженной через квадрат $|Q^{(\text{м})}_{l,-m}|^2$. Но через эту же величину выражается согласно (46.9) вероятность w_γ спонтанного излучения фотона при том же ядерном переходе. Окончательно получается

$$\frac{w_{\text{конв}}}{w_\gamma} = 2\alpha(Z\alpha)^3\frac{m}{\omega}\left(1+\frac{2m}{\omega}\right)^{l+1/2}$$

(это отношение называют *коэффициентом конверсии*).

[1]) Это приближение требует малости заряда ядра и достаточно больших энергий возбуждения ω (в то же время $1/\omega$ предполагается большим по сравнению с размерами ядра). Фактически такое приближение малоудовлетворительно, и более точное вычисление требует учета кулонова поля ядра.

2. То же для ядерного El-перехода.

Р е ш е н и е. Тем же способом с током перехода из (142.7),(142.8) получается

$$\frac{w_{\text{конв}}}{w_\gamma} = 2\alpha(Z\alpha)^3\left(1 + \frac{4l}{l+1}\frac{m^2}{\omega^2}\right)^{l-1/2}\frac{m}{\omega}.$$

3. То же для монопольного перехода ядра.

Р е ш е н и е. С током перехода из (142.14) получается

$$w_{\text{конв}} = 4\alpha^2(Z\alpha)^3 m^3\omega^2\left(1 + \frac{2m}{\omega}\right)^{3/2}|Q_0|^2.$$

Поскольку монопольное испускание фотона невозможно, исключить отсюда $|Q_0|^2$ нельзя.

§ 143. Неупругое рассеяние электронов адронами

В § 139 было рассмотрено упругое рассеяние электронов адронами. Аналогичным образом может быть поставлена задача о неупругом рассеянии. Отличие состоит в том, что конечное адронное состояние будет теперь отвечать другому адрону или же совокупности адронов. Закон сохранения импульса (139.1) останется в силе, если под p'_h подразумевать 4-импульс конечного адрона или суммарный 4-импульс всей образовавшейся в процессе рассеяния совокупности адронов. Таким образом, теперь $p'^2_h \neq p^2_h \neq M^2$, где M — масса начального адрона.

С этим отличием процесс неупругого рассеяния описывается той же диаграммой (139.2). Нижнюю вершину этой диаграммы мы обозначим через J_{fi}, как это делалось в § 138. Однако в отличие от (138.3) или (138.6) мы не будем выражать ток перехода через вершинный оператор и амплитуды состояний, чтобы не фиксировать заранее характер конечного адронного состояния.

Теперь можно записать амплитуду рассеяния в аналогичном (139.3) виде

$$M_{fi} = -\frac{4\pi e^2}{(p_e - p'_e)^2}(\overline{u}'_e\gamma_\mu u_e)J^\mu_{fi} \qquad (143.1)$$

(такая амплитуда уже использовалась в задаче 1 к § 142, где рассматривалась передача энергии электрону; аналогичную структуру имеет амплитуда в задаче о возбуждении ядер электронами).

Будем считать энергию начального электрона достаточно большой, чтобы в конечном состоянии могло образоваться большое число адронов. Мы будем интересоваться так называемым *инклюзивным* сечением, отвечающим тому, что в конечном состоянии фиксируется только импульс электрона, а по всем адронным состояниям произведено суммирование.

Такое дифференциальное сечение запишем, в соответствии с формулами § 64, в виде

$$d\sigma = \frac{d^3p'_e}{4I(2\pi)^3 2\varepsilon'_e} \sum_f (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_h + p'_h - p_e - p'_e)|M_{fi}|^2. \qquad (143.2)$$

Инклюзивное сечение может зависеть лишь от трех кинематических инвариантов, которые могут быть определены путем измерений, производимых только над электронами. Таких инвариантов существует три:

$$t = q^2 \equiv (p_e - p'_e)^2, \quad s = (p_e + p_h)^2 \qquad (143.3)$$

и p'^2_h. Необходимость учета третьего инварианта связана с тем, что в отличие от упругого рассеяния p'^2_h — «масса» конечного адронного состояния — теперь не задана. Вместо p'^2_h удобно, однако, пользоваться инвариантом

$$\nu = qp_h. \qquad (143.4)$$

Связь между ν и p'^2_h следует из равенства $p'_h = p_h + q$:

$$p'^2_h = M^2 + t + 2\nu. \qquad (143.5)$$

Если начальный адрон стабилен (например, протон), то энергия покоя конечного состояния больше чем M, т. е. $p'^2_h \gg M^2$, и из (143.5) следует (ввиду того, что $t < 0$):

$$\nu \geqslant |\,t\,|/2 \qquad (143.6)$$

(знак равенства отвечает упругому рассеянию).

Кинематические инварианты можно выразить через энергии электрона в начальном и конечном состояниях ε_e и ε'_e и угол рассеяния θ. Ниже будем считать электрон ультрарелятивистским ($\varepsilon_e \gg m$, $\varepsilon'_e \gg m$) и пренебрегать его массой. Тогда в системе покоя начального адрона (лабораторная система) получим

$$t = -4\varepsilon_e\varepsilon'_e \sin^2(\theta/2), \quad \nu = M(\varepsilon_e - \varepsilon'_e), \quad s - M^2 = 2M\varepsilon. \quad (143.7)$$

Подставив (143.1) в (143.2) и выполнив обычным образом суммирование по поляризациям электронов, получим сечение рассеяния неполяризованных электронов. Запишем его в виде

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{(q^2)^2} \frac{d^3p'_e}{(2\pi)^3 \cdot 8M\varepsilon_e\varepsilon'_e} w_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \qquad (143.8)$$

или

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{(q^2)^2} \frac{dt\, d\nu}{4(p_h p_e)^2} w_{\mu\nu} W^{\mu\nu}, \qquad (143.9)$$

где

$$w_{\mu\nu} = 4p_{e\mu}p'_{e\nu} - 2(p_{e\mu}q_\nu + p_{e\nu}q_\mu) + q^2 g_{\mu\nu}, \tag{143.10}$$

$$W^{\mu\nu} = \sum_f (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_h - p_h - q) J^\mu_{fi} J^{\nu *}_{fi}. \tag{143.11}$$

Тензор $W^{\mu\nu}$, конечно, существенно зависит от свойств адронных токов, и мы можем в общем случае только поставить задачу о его феноменологической структуре, аналогичную задаче о формфакторах адронов. Прежде всего, воспользуемся тем, что тензорная структура $W^{\mu\nu}$ должна определяться только 4-векторами, имеющими отношение к нижней вершине диаграммы (139.2), т. е. p_h и q. Из них (а также метрического тензора $g_{\mu\nu}$) можно составить всего пять независимых тензоров. Требование инвариантности относительно обращения времени сводится к требованию симметричности тензора; таких тензоров можно построить четыре. Наконец, условие сохранения тока, т. е.

$$W^{\mu\nu} q_\nu = 0, \quad W^{\mu\nu} q_\mu = 0,$$

сводит число независимых тензоров к двум. Их можно выбрать в виде

$$\tau^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu}, \quad \tau^{(2)}_{\mu\nu} = \left(p_{h\mu} - \frac{\nu}{t} q_\mu\right)\left(p_{h\nu} - \frac{\nu}{t} q_\nu\right) \tag{143.12}$$

и записать $W_{\mu\nu}$ как

$$W_{\mu\nu} = 4\pi M W_1 \tau^{(1)}_{\mu\nu} + \frac{4\pi}{M} W_2 \tau^{(2)}_{\mu\nu}. \tag{143.13}$$

Подставив в (143.8) выражения (143.10) и (143.13), представим сечение в виде

$$d\sigma = \left(W_2 + 2W_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right) d\varepsilon'_e \, d\sigma_{\text{упр}}, \tag{143.14}$$

где

$$d\sigma_{\text{упр}} = \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_e^2} \frac{\cos^2(\vartheta/2)}{\sin^4(\vartheta/2)} do'$$

— сечение рассеяния ультрарелятивистского электрона в кулоновом поле (ср. (80.7)).

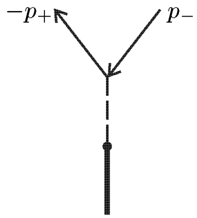
Мы видим, что сечение определяется двумя структурными функциями, зависящими от двух инвариантов t и ν. Если при больших энергиях физика адронов не содержит характерных величин размерности массы (*гипотеза масштабной инвариантности*), то можно ожидать, что структурные функции будут зависеть при больших энергиях от единственного безразмерного параметра t/ν. Тогда функции W_1, W_2 должны иметь вид функций одной переменной:

$$W_1 = \frac{M}{\nu} F_1\left(\frac{t}{\nu}\right), \quad W_2 = \frac{M}{\nu} F_2\left(\frac{t}{\nu}\right) \tag{143.15}$$

(заметим, что отношение M/ν не зависит от M).

§ 144. Превращение электрон-позитронной пары в адроны

Рассмотрим теперь процесс превращения электрон-позитронной пары в адроны. Обозначим 4-импульсы электрона и позитрона через p_- и p_+, а 4-импульс (суммарный) совокупности образующихся адронов через p_h; при этом $p_- + p_+ = p_h$. Процесс изображается диаграммой



(144.1)

Нижней вершине этой диаграммы отвечает ток перехода из вакуума в некоторое адронное состояние $|n\rangle$, который обозначим, как это делалось в § 104, через $\langle n|J|0\rangle$.

Диаграмме (144.1) соответствует амплитуда рассеяния

$$M_n = -\frac{4\pi\alpha}{q^2}\overline{u}(-p_+)\gamma_\mu u(p_-)\langle n|J^\mu|0\rangle. \tag{144.2}$$

Мы будем интересоваться полным сечением аннигиляции в адроны σ_h, т. е. просуммируем по всем конечным состояниям $|n\rangle$. Тогда, в соответствии с (64.18),

$$\sigma_h = \frac{1}{4I}\sum_n |M_n|^2(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_h - q), \tag{144.3}$$

где $q = p_- + p_+$. В дальнейшем будем пренебрегать массой электрона; тогда $q^2 = 2(p_-p_+),\ I = q^2/2$.

Аналогично тому, как мы поступали в § 143, запишем сечение в виде

$$\sigma_h = \frac{(4\pi)^2}{2t^3}w^{\mu\nu}W_{\mu\nu}, \tag{144.4}$$

где

$$w^{\mu\nu} = \alpha\big(p_-^\mu q^\nu + p_-^\nu q^\mu - 2p_-^\mu p_-^\nu - {}^1\!/\!{}_2 q^2 g^{\mu\nu}\big), \tag{144.5}$$

$$W_{\mu\nu} = \alpha\sum_n (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_h - q)\langle 0|J_\nu|n\rangle\langle n|J_\mu|0\rangle \tag{144.6}$$

и $t = q^2 > 0$.

Заметим, что t является единственным кинематическим инвариантом рассматриваемой задачи («трехххвостой» диаграммы

(144.1)) и q — единственным 4-вектором, от которого может зависеть $W_{\mu\nu}$. Поэтому с учетом требования сохранения тока тензор $W_{\mu\nu}$ можно представить в виде

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\rho_h(t)\left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu}\right), \tag{144.7}$$

где $\rho_h(t)$ — единственная инвариантная функция, зависящая от свойств адронного тока и определяющая сечение аннигиляции. Подставив (144.5)–(144.7) в (144.4), получим

$$\sigma_h = \frac{4\pi^2\alpha}{t^2}\rho_h(t). \tag{144.8}$$

Обратим внимание на то, что функция $\rho_h(t) = -2W_\mu^\mu/3$ в точности совпадает с определенной в (104.9) функцией $\rho(t)$, если в последней формуле понимать под токами адронные токи. Напомним также, что $\rho(t)$ является спектральной плотностью фотонной собственно-энергетической функции $\Pi(t)$: $\operatorname{Im}\Pi(t) = -\pi\rho(t)$. В рассматриваемом низшем приближении по α функция Π совпадает с поляризационным оператором $\mathcal{P}$. В этом приближении, следовательно, $\rho_h(t)$ является также и спектральной плотностью адронного вклада в поляризационный оператор:

$$\operatorname{Im}\mathcal{P}_h(t) = -\pi\rho_h(t). \tag{144.9}$$

Использовав дисперсионное соотношение (111.13) и выразив ρ_h через σ_h согласно (144.8), получим формулу

$$\mathcal{P}_h(t) = -\frac{t^2}{4\pi^2\alpha}\int_0^\infty \frac{\sigma_h(t')\,dt'}{t' - t - i0}, \tag{144.10}$$

выражающую адронный вклад в поляризацию вакуума через измеряемое на опыте сечение аннигиляции в адроны.

Заметим, что таким же точно способом можно было бы решить задачу об аннигиляции электрон-позитронной пары в мюонную пару (в первом приближении по α может образоваться только одна такая пара). Аналогично результату (144.8) мы получили бы

$$\sigma_\mu = \frac{4\pi^2\alpha}{t^2}\rho_\mu(t), \tag{144.11}$$

где $\rho_\mu(t)$ — спектральная плотность мюонной поляризации вакуума. Она отличается от электронной поляризации лишь заменой массы электрона m массой мюона μ и согласно (113.8) дается выражением

$$\rho_\mu(t) = \frac{\alpha}{3\pi}(t + 2\mu^2)\sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{t}}.$$

Подставив его в (144.11), мы воспроизведем результат, полученный уже в задаче 8 к § 81.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ [1]

[1]) Этот указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. В указатель включены термины и понятия, непосредственно не отраженные в оглавлении.

Учебное издание

БЕРЕСТЕЦКИЙ Владимир Борисович
ЛИФШИЦ Евгений Михайлович
ПИТАЕВСКИЙ Лев Петрович

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

(Серия: «Теоретическая физика», том IV)

Редакторы: *Е. В. Сатарова, Д. А. Миртова*
Оригинал-макет: *В. В. Затекин*

ЛР №071930 от 06.07.99
Подписано в печать 22.02.01. Формат $60 \times 90^1/_{16}$
Бумага офсетная №1. Печать офсетная
Усл. печ. л. 45. Уч.-изд. л. 46,11
Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная ул., 90

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.
E-mail: pfpv@vologda.ru http://www.vologda/~pfpv

ISBN 5-9221-0058-0

9785922100588